

Examen Maîtrise 2003-2004 : géométrie algorithmique
vendredi 30 avril. Durée : 2h.

1 Union de disques

On a un ensemble de n disques dans le plan, et on va s'intéresser au bord de leur union, et en particulier au nombre de segments de cercles intervenant dans ce bord.

On supposera (ou on construira les exemples de telle sorte) que ce bord a une seule composante connexe.

1) Dessiner un exemple avec 5 cercles où ce bord est composé de deux segments de cercles.

Correction: Trois petits cercles dans deux gros qui se coupent.

2) Dessiner un exemple avec 5 cercles où ce bord est composé de 8 segments de cercles.

Correction: Quatre petits cercles disjoints qui coupent le bord d'un gros.

3) Étant donné n cercles et un alphabet à n lettres, on va construire un mot sur cet alphabet de la façon suivante :

— On choisit un point de début sur un des segments de cercles

— On énumère les lettres associées au cercle dans l'ordre du bord.

(Rq : la dernière lettre est toujours la même que la première)

Donner les mots associés aux deux exemples des questions 1 et 2.

Correction: aba et abacadaea

4) Montrer que le mot formé est une séquence de Davenport Schinzel d'ordre s pour un certain s que vous déterminerez.

Correction: Deux cercles se coupent en 2 points... DS d'ordre 2.

5) Quelle est la longueur maximale d'une telle séquence ?

Correction: $2n-1$

6) Quelle est la longueur maximale du bord de l'union de n cercles ?

Correction: $2n-2$ puisque la première et dernière lettres correspondent en fait au même segment.

7) Dessiner un deuxième exemple avec 5 cercles où le bord est composé de 8 segments de cercles, qui ne soit pas "isomorphe" au précédent (pas le même mot, quelque soit la manière de choisir le début).

Correction: abcdedcba et abacadaea

8) Question subsidiaire si tout le reste est fini : proposer un algorithme pour calculer une telle union, analyser sa complexité et donner une borne inférieure sur la complexité de ce problème.

Correction: En $\Theta(n \log n)$ par balayage par exemple. Borne inférieure en considérant des valeurs à trier $x_i \in [0, 2\pi]$ $1 \leq i \leq n-1$ et en considérant les cercles de rayon 1 : C_0 de centre $(0, 0)$ C_i de centre $(\cos x_i, \sin x_i)$.

2 Chaînes polygonales

On considère deux chaînes polygonales $P = \{p_1, p_2 \dots p_m\}$ et $Q = \{q_1, q_2 \dots q_n\}$ x -monotone (c'est à dire que $x_{p_1} < x_{p_2} < \dots < x_{p_m}$ et $x_{q_1} < x_{q_2} < \dots < x_{q_n}$).

1) Quel est le nombre maximal de points d'intersection entre P et Q ? le démontrer, dessiner un exemple où cette borne est atteinte.

2) Proposer un algorithme pour calculer ces points d'intersection, étudier sa complexité.

3) Si P est x -monotone et Q est y -monotone, quel est le nombre maximal de points d'intersection entre P et Q ? le démontrer, dessiner un exemple où cette borne est atteinte.

3 Localisation dans un convexe

On considère un polygone convexe $P = \{p_1, p_2 \dots p_n\}$ et l'on veut effectuer des requêtes : on propose un point q et l'on doit répondre si q est à l'intérieur ou à l'extérieur de P .

1) Expliquer comment répondre à cette question pour un seul point q . Quel est la complexité de votre algorithme.

2) Proposer un prétraitement de P pour répondre plus rapidement à une requête. Quel est la complexité du prétraitement, quel est la complexité du traitement d'une requête.

4 Triangulation de Delaunay

Étant donné S un ensemble de n points du plan, et $DT(S)$ la triangulation Delaunay de ces n points.

1) Sur la feuille jointe, dessiner la triangulation de Delaunay des points de l'ensemble donné.

Correction:voir à la fin

2) On considère $p \in S$. Soit q le point le plus proche de p parmi les points de S .

Indiquer q sur la feuille jointe.

Dans le cas général, est-ce que pq est une arête de Delaunay ? (Le démontrer ou exhiber un contre-exemple).

Correction:Oui, cercle de diamètre pq inclus dans cercle de centre p passant par q donc vide.

3) Si p n'est pas le point d'abscisse maximale, soit r le point le plus proche de p parmi les points de S d'abscisse supérieure à p .

Indiquer r sur la feuille jointe.

Dans le cas général, est-ce que pr est une arête de Delaunay ? (Le démontrer ou exhiber un contre-exemple).

Correction:Non, voir figure

4) Si il existe, soit t le point le plus proche de p parmi les points de S d'abscisse et d'ordonnée supérieure à p .

Indiquer t sur la feuille jointe.

Dans le cas général, est-ce que pt est une arête de Delaunay ? (Le démontrer ou exhiber un contre-exemple).

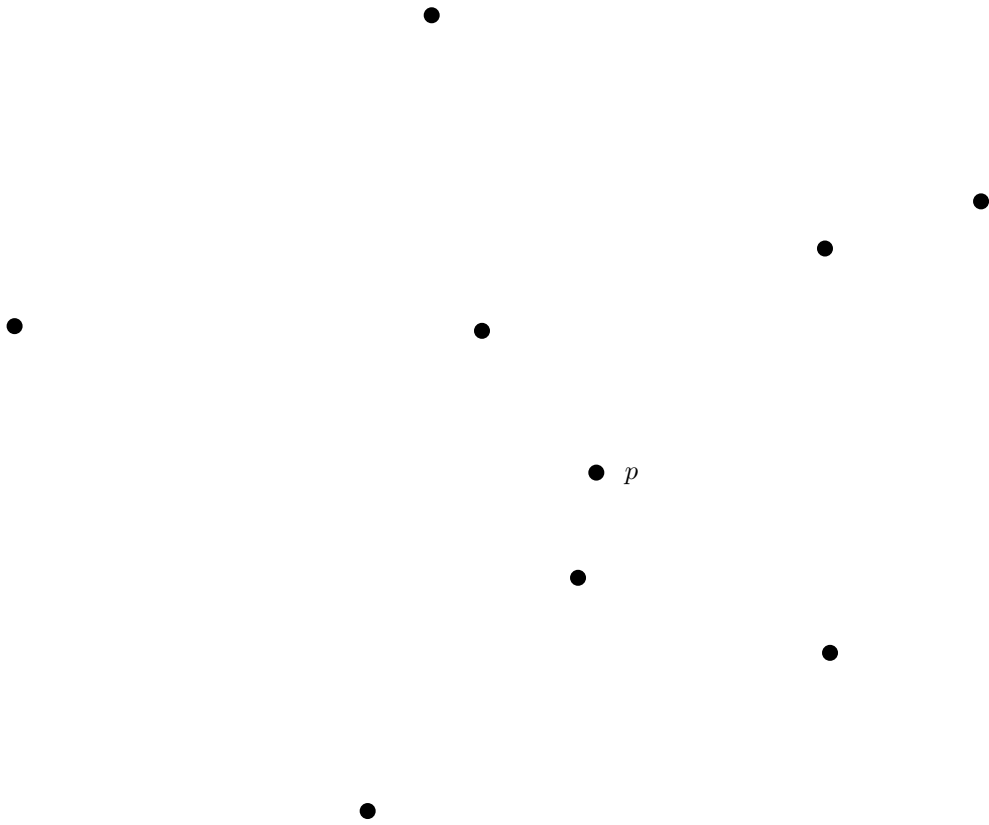
Correction:Non, voir figure

5) On considère trois points, $a, b, c \in S$ tel que le cercle passant par abc contienne un seul point $d \in S$. Pour chacune des six arêtes ab, bc, ca, ad, bd, cd choisir entre les trois affirmations suivantes :

- c'est certainement une arête de Delaunay (le prouver),
- il est possible que ce soit une arête de Delaunay (dessiner deux exemples réalisant les deux possibilités),
- ce n'est jamais une arête de Delaunay (le prouver).

Correction: ad, bd, cd de Delaunay (cercle passant par d tangent au cercle abc en a, b ou c). ab, bc, cd possibles.

Num :



Correction:

