Examen Maîtrise 2001-2002 : géométrie algorithmique
2h 29 mai 2002

1 Analyse inverse ("backwards analysis") randomisée de la triangulation de Delaunay des sommets d'un polygone convexe

L'énoncé de cet exercice est long, car les questions sont bien décomposées. La réponse d'une question est généralement donnée, lorsqu'elle est utilisée dans la suite de l'exercice.

On donne n points du plan $p_1,p_2,\ldots,p_n$. On suppose que ces points, pris dans cet ordre, forment un polygone P_n **convexe** ; les arêtes de P_n sont constituées des paires de points consécutifs (p_i,p_{i+1}), $i = 1,2,\ldots,n$ et (p_n,p_1).

On note $Del(P_n)$ la triangulation de Delaunay de ces n points, et on rappelle la propriété fondamentale de la triangulation de Delaunay est la *propriété des cercles vides.*

1. On rappelle la relation d'Euler pour une triangulation de points du plan : $t - a + n = 1$, où t est le nombre de triangles, a le nombre d'arêtes et n le nombre de sommets.
   (a) Déduire de la relation d'Euler le nombre de triangles et d'arêtes de $Del(P_n)$ (on rappelle que P_n est convexe).
   (b) On définit le degré intérieur d'un sommet comme le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet qui ne sont pas sur l'enveloppe convexe. Montrer que le degré intérieur moyen d'un sommet est égal à $2 - \frac{6}{n}$.
2. On suppose que l'on construit $Del(P_n)$ incrémentalement de façon randomisée, c'est-à-dire que les points sont introduits dans un ordre aléatoire. On note $(r_1,r_2,\ldots,r_n)$ une permutation au hasard parmi les $n!$ permutations de $\{1,2,\ldots,n\}$. On note P_i le polygone ayant pour sommets les i premiers points insérés $p_{r_1},p_{r_2},\ldots,p_{r_i}$.
   (a) Si, après l'insertion du $i^{\text{ème}}$ point p_{r_i} dans $Del(P_{i-1})$, p_{r_i} a pour degré intérieur d_i dans $Del(P_i)$, alors combien de triangles de $Del(P_{i-1})$ ont-ils été détruits par cette insertion ?
   (b) En déduire le nombre moyen de triangles détruits lors de l'insertion du $i^{\text{ème}}$ point p_{r_i} dans $Del(P_{i-1})$.
   (c) Quel est le nombre moyen de triangles de $Del(P_i)$ créés lors de l'insertion de p_{r_i} ?
   (d) Montrer que le nombre total de triangles créés lors de la construction de $Del(P_n)$, en moyenne sur tous les ordres d'insertion possibles, est majoré par $3n$.
3. On suppose qu'une permutation aléatoire $(r_1,r_2,\ldots,r_n)$ de $\{1,2,\ldots,n\}$ est construite de la façon suivante :
   (a) On commence par choisir un point au hasard parmi les n points $p_1,p_2,\ldots,p_n$. On le note p_{r_n}, et P_{n-1} sera le polygone convexe formé des $n-1$ points restants. Quels sont les voisins de p_{r_n} sur le polygone P_n ? (la réponse est évidente)

(b) De la même manière, à une étape quelconque, il reste i points non encore choisis qui forment le polygone convexe P_i. On en prend un au hasard, on le note p_{r_i}, et P_{i-1} est le polygone convexe formé des points restants.

Remarquez que, au cours de la construction de la permutation, lors du choix de p_{r_i}, il est également possible de trouver, de façon évidente, les deux voisins de ce point sur le polygone P_i. Quels sont ces deux voisins ?

On stocke ces deux voisins, pour chaque point p_{r_i}, dans une structure de données supplémentaire.

On suppose donc que la permutation aléatoire est construite et qu'on effectue la construction incrémentale de la triangulation $Del(P_n)$ en insérant les points dans l'ordre $p_{r_1}, p_{r_2}, \ldots, p_{r_n}$ donné par cette permutation.

(c) Localisation. Lors de l'insertion de p_{r_i} dans $Del(P_{i-1})$, comment trouve-t-on tous les triangles à détruire ?

(d) Quelle est la complexité de cette localisation ?

(e) Quel est le total des complexités de toutes les localisations effectuées au cours de la construction de $Del(P_n)$, en moyenne sur toutes les permutations ?

(f) En déduire la complexité en moyenne de la construction incrémentale de $Del(P_n)$.

4. Rappeler la borne inférieure de la construction de la triangulation de Delaunay de n points quelconques du plan. Commenter le résultat obtenu à la question 3f.

Correction:

1. (a) Tout triangle a 3 arêtes. Toute arête qui n'est pas sur l'enveloppe convexe est commune à 2 triangles. De plus, il y a n arêtes sur l'enveloppe convexe. Donc $2a = 3t + n$. Avec la relation d'Euler on déduit que $t = n - 2$ et $a = 2n - 3$.

   (b) Toute arête a 2 sommets, et tout sommet a 2 arêtes sur l'enveloppe convexe, donc $2a = \sum_{i=1}^{n}(d_i + 2)$ où d_i est le degré intérieur de p_i. D'où $4n - 6 = n.d + 2n$, où d est le degré moyen.

2. (a) Si p_{r_i} a pour degré intérieur d_i, alors d_i triangles de $Del(P_{i-1})$ ont été détruits.

   (b) Après l'insertion de p_{r_i}, chaque sommet est en moyenne incident à $2-\frac{6}{i}$ arêtes d'après la question 1b, donc le nombre moyen de triangles détruits est $2 - \frac{6}{i}$.

   (c) Le nombre de triangles créés est 1 de plus que le degré intérieur, c'est-à-dire $3 - \frac{6}{i}$.

   (d) Le nombre de triangles créés, en moyenne, est $\sum_{i=1}^{n}(3 - \frac{6}{i}) \leq 3n$.

3. (a) Les voisins de p_{r_n} sont de façon triviale $p_{r_n - 1}$ et $p_{r_n + 1}$ (indices pris modulo n) puisque les arêtes de P_n sont formées par les paires de points consécutifs.

   (b) De la même façon, à chaque étape, les voisins de p_{r_i} sur P_{i+1} sont les deux points d'indice immédiatement inférieur et immédiatement supérieur parmi les points restants dans P_{i+1}.

   (c) On connait les voisins (notés u_i et v_i) de p_{r_i} sur P_i. On sait donc que (u_i, v_i) est une arête de P_{i-1}. On part du triangle de $Del(P_{i-1})$ ayant cette arête, on effectue le test du cercle vide pour p_{r_i} sur ce triangle. Si le cercle contient p_{r_i}, on fait la même opération, récursivement, sur ses voisins.

   (d) La complexité est proportionnelle au nombre de triangles dont le cercle contient p_{r_i}, c'est-à-dire le nombre de triangles détruits lors de l'insertion de p_{r_i}.

(e) Le total est, en moyenne, d'après la question 2b, proportionnel à $\sum_{i=1}^{n} 2-\frac{6}{i} \leq 2n$, donc linéaire.

(f) La complexité est la complexité de la localisation (linéaire d'après la question précédente) + celle de la mise-à-jour (linéaire d'après les questions 2b et 2d). On déduit que l'algorithme a une complexité randomisée linéaire.

4. La borne inférieure est $\Omega(n \log n)$. La complexité obtenue ici pour le cas des sommets d'un polygone convexe est plus faible, car l'étape de localisation est évitée grâce au stockage préalable des deux voisins de p_{r_i} dans P_i qui permet d'avoir un accès direct.

2 Quadri-section

On donne un ensemble $\mathcal{S}$ de $4n$ points du plan en position générale (pas trois points alignés).

—1— Une direction de droite étant repérée par un angle α par rapport à l'axe des x, montrer qu'il existe une droite de direction α partageant l'ensemble $\mathcal{S}$ en deux sous-ensembles $\mathcal{S}_\alpha$ et $\mathcal{S}'_\alpha$ de tailles $2n$.

Correction: Il s'agit juste de trouver le médian des points après projection dans la direction perpendiculaire à α.

—2— Proposer un algorithme pour calculer $\mathcal{S}_\alpha$, donner sa complexité.

Correction: C'est un médian. on peut utiliser les algorithmes linéaires (sophistiqués!) ou bien trier les points dans la direction perpendiculaire à α et prendre le médian. La complexité de cette dernière solution est $O(n \log n)$.

—3— On définit :
$\mathcal{K}_1(\alpha) = \mathcal{S}_\alpha \cap \mathcal{S}'_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$
$\mathcal{K}_2(\alpha) = \mathcal{S}_\alpha \cap \mathcal{S}_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$
$\mathcal{K}_3(\alpha) = \mathcal{S}'_\alpha \cap \mathcal{S}_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$
$\mathcal{K}_4(\alpha) = \mathcal{S}'_\alpha \cap \mathcal{S}'_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$
et $k_i(\alpha)$ la taille de $\mathcal{K}_i(\alpha)$. Quelles relations lient les $k_i(\alpha)$?

Correction: $k_1(\alpha)+k_2(\alpha) = k_2(\alpha)+k_3(\alpha) = k_3(\alpha)+k_4(\alpha) = k_4(\alpha)+k_1(\alpha) = 2n$ donc $k_1(\alpha) = k_3(\alpha)$ $k_2(\alpha) = k_4(\alpha)$.

—4— Exprimer les $k_i(\frac{\pi}{2})$ en fonction des $k_i(0)$.

Correction: Si $k_1(0) = k$ alors d'après les relations ci dessus $k_2(0) = k_4(0) = 2n-k$ et $k_3(0) = k$. D'autre part $\mathcal{K}_{i+1}(\alpha) = \mathcal{K}_i(\alpha + \frac{\pi}{2})$. On a donc $k_1(0) = k_3(0) = k_2(\frac{\pi}{2}) = k_4(\frac{\pi}{2}) = k$ et $k_1(\frac{\pi}{2}) = k_3(\frac{\pi}{2})k_2(0) = k_4(0) = 2n - k$

—5— Comment évoluent les $\mathcal{K}_i(\alpha)$ quand α augmente?

Correction: Pour certaines valeurs critiques de α, $\mathcal{S}_\alpha$ et $\mathcal{S}'_\alpha$ ou $\mathcal{S}_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ et $\mathcal{S}'_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ échangent deux points, cet échange est soit un échange entre $\mathcal{K}_i(\alpha)$ et $\mathcal{K}_{i+1}(\alpha)$ sans incidence sur les valeurs des $k_i(\alpha)$, soit $\mathcal{K}_i(\alpha)$ donne un point à $\mathcal{K}_{i+1}(\alpha)$ pendant que $\mathcal{K}_{i+2}(\alpha)$ donne un point à $\mathcal{K}_{i+3}(\alpha)$. Cela se traduit par une augmentation de 1 de deux des $k_i(\alpha)$ alors que les deux autres baissent de 1.

—6— En déduire l'existence de deux droites orthogonales, séparant $\mathcal{S}$ en 4 parties égales.

Correction: Si $k < n$ on a $k_1(0) = k < n \leq k_1(\frac{\pi}{2}) = 2n - k$ sinon on a $k_1(0) = k \geq n > k_1(\frac{\pi}{2}) = 2n - k$ et comme $k_1(\alpha) = n$ ne varie que de 1 à chaque valeur critique, il existe une valeur α_0 où $k_1(\alpha_0) = n$. On en déduit que $k_2(\alpha_0) = k_3(\alpha_0) = k_4(\alpha_0) = n$.