

1 Informations

CGAL doit impérativement être installé pour la semaine prochaine (ça devrait déjà être fait).

Les cours des 23 janvier, 6 et 20 février comportent des TD machines et se termineront à 18h15.

Les sujets de micro-projets seront disponibles la semaine prochaine.

2 k -Ring

Étant donné un ensemble S de n points du plan en position générale et un point $q \in S$ on appelle le k -Ring de q , noté $R_k(q)$ l'ensemble des points de S dont la distance dans la triangulation de Delaunay $DT(S)$ à q est inférieure ou égale à k (la distance de p à q est ici le nombre minimal d'arêtes de $DT(S)$ pour aller de p à q).

En d'autres termes :

$$R_0(q) = \{q\}$$

$$R_1(q) = \{q\} \cup \{p \in S; p \text{ est voisin de } q \text{ dans } DT(S)\}$$

$$R_i(q) = R_{i-1}(q) \cup \{p \in S; p \text{ est voisin d'un point de } R_{i-1}(q) \text{ dans } DT(S)\}$$

$|R_k(q)|$ désigne la taille de $R_k(q)$.

Dans toutes les questions, on est essentiellement intéressé par un ordre de grandeur quand $n \rightarrow \infty$, pas par la valeur exacte.

2.1

Quel est la valeur maximale de $|R_k(q)|$ en fonction de k et n ? Décrire l'ensemble S permettant d'atteindre cette valeur.

2.2

Quel est la valeur minimale de $|R_k(q)|$ en fonction de k et n ? Décrire l'ensemble S permettant d'atteindre cette valeur.

2.3

Quelle est la moyenne de $|R_1(q)|$ quand q est choisi au hasard dans S , dans le cas le pire pour S .

2.4

Quelle est la moyenne de $|R_2(q)|$ quand q est choisi au hasard dans S , dans le cas le pire pour S ?

2.5

Quelle est la moyenne de $|R_1(q)|^2$ quand q est choisi au hasard dans S , dans le cas le pire pour S ?

2.6

Quelle est la moyenne de $\min(|R_1(p)|^2, |R_1(q)|^2)$ quand p et q sont choisis indépendamment au hasard dans S ?

Indication : trouver une forme simple de « $\min(a, b) \cdot \max(a, b)$ ».

2.7

Maintenant on veut calculer la taille de $R_1(p)$ pour tout les points p de S . On suppose que (comme dans CGAL) la triangulation est augmentée d'un point à l'infini p_∞ , ce qui évite d'avoir à gérer le bord d'une manière spéciale, et on considère que $p_\infty \in S$.

On suppose que chaque point p de S est muni d'un champ entier `p.ring1`. Écrire en pseudo-code un algorithme permettant de calculer dans le champ `p.ring1` la taille de $R_1(p)$.

Rq : *Pour v parcourant les les voisins de p dans $DT(S)$ ou encore Pour p parcourant S ou encore Pour chaque triangle t de $DT(S)$* sont des lignes de pseudo-code acceptables.

2.8

Étudier la complexité de cet algorithme.

2.9

On va noter $T_k(q)$ l'ensemble des triangles de $DT(S)$ ayant leur 3 sommets dans $R_k(q)$.

On veut calculer la taille de $T_2(p)$ pour tout les points p de S .

On suppose qu'à chaque point p de S est ajouté un champ entier `p.t_ring2`. Écrire en pseudo-code un algorithme permettant de calculer dans le champ `p.t_ring2` la taille de $T_2(p)$.

Rq : Pour chaque triangle à compter, se demander quel est le nombre de ses sommets à distance 0, 1 ou 2 de p .

2.10

Étudier la complexité de cet algorithme.

3 Triangulation de Delaunay

Dessiner la triangulation de Delaunay de l'ensemble de points ci dessous (sur la feuille jointe).

4 Triangulation de Delaunay, 2 points par disque

Notations

On a un ensemble S de n disques disjoints de rayon 1 $S = \{D_i, 0 \leq i < n\}$, Chaque disque D_i contient deux points, on décide à pile ou face qu'un des ces deux points est p_i et que l'autre est q_i .

$P = \{p_i, 0 \leq i < n\}$ et $Q = \{q_i, 0 \leq i < n\}$.

On note $DT(S)$ la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points S

4.1

Dessiner un exemple dans lequel p_i et p_j sont voisins dans $DT(P)$ et q_i et q_j ne sont pas voisins dans $DT(Q)$.

4.2

Dans cette question, $n = 4$ et $DT(P)$ est composée des deux triangles $p_0p_1p_2$ et $p_0p_3p_1$. Décrire (et dessiner) un cercle Γ tel que si Γ ne contient pas c_3 le centre de D_3 alors la triangulation de $DT(Q)$ est nécessairement formée des 2 triangles $q_0q_1q_2$ et $q_0q_3q_1$.

4.3

On considèrera les triangulations $DT(P)$, $DT(P \cup \{q_i\})$ et $DT(P \cup \{q_i\} \setminus \{p_i\})$.

Montrer qu'il existe p_k tel que p_k est voisin de q_i dans $DT(P \cup \{q_i\} \setminus \{p_i\})$ et p_k est voisin de p_i dans $DT(P)$.

4.4

Si i est choisit au hasard entre 0 et n , quel est la complexité de passer de $DT(P)$ à $DT(P \cup \{q_i\} \setminus \{p_i\})$?

4.5

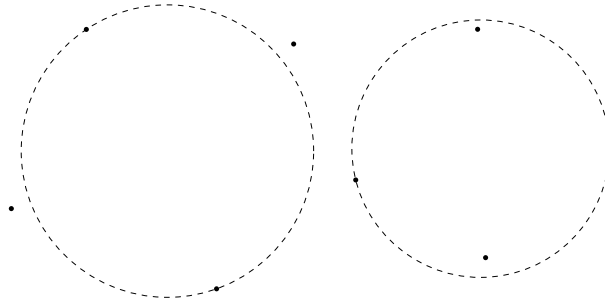
Quel est la complexité de passer de $DT(P)$ à $DT(Q)$?

4.6 ★

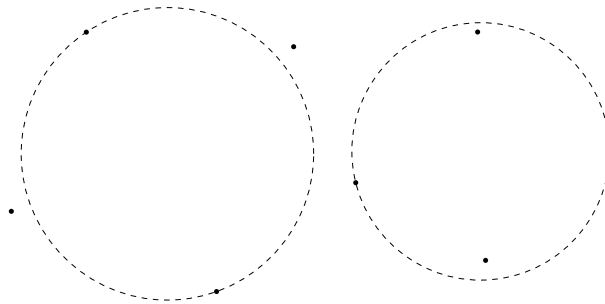
Si maintenant P et Q ne sont plus construit en tirant à pile ou face, mais qu'un adversaire choisit quel point va dans P et quel point va dans Q , les résultats restent-ils valables ? (si non à quel moment avez vous utilisez l'hypothèse ?)

Nom :

2 Triangulation de Delaunay



2ème essai en cas de rature!



3 Triangulation de Delaunay, 2 points par disque

1 k -Ring

1.1

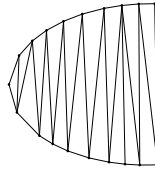
$\forall n, |R_0(q)| = 1, \forall k, n \exists S |R_k(q)| = n$, exemple en roue de chariot, q au moyeu de la roue.

1.2

$$\forall n, |R_0(q)| = 1$$

$$\forall n, |R_1(q)| \geq 3$$

$$\forall n, \forall k \geq 2 |R_k(q)| \geq \min(2k + 1, n)$$



1.3

Le grand classique, $|R_1(q)| = 1 + d^\circ(q)$ (le 1 est pour q lui même).

$$E(|R_1(q)|) = \frac{1}{n} \sum_{q \in S} (1 + d^\circ(q)) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{q \in S} d^\circ(q) \leq 1 + 6 = 7$$

Pour la valeur exacte on peut introduire h le nombre de points de l'enveloppe convexe et on a $E(|R_1(q)|) = \frac{7n-6-2h}{n}$ et donc $5 \leq E(|R_1(q)|) \leq 7$.

1.4

$$E(|R_2(q)|) = \frac{1}{n} \sum_{q \in S} |R_2(q)| \leq \frac{1}{n} \sum_{q \in S} n = n$$

Cette valeur est atteinte dans le cas de points sur la demi parabole $y = x^2; x > 0$. On a $\forall q, R_2(q) = S$.

1.5

Par convexité de la fonction $y = x^2$, on a que la moyenne de carrés est supérieure au carré de la moyenne. On en déduit

$$E(|R_1(q)|^2) \geq E(|R_1(q)|)^2 \geq 49$$

Par ailleurs

$$E(|R_1(q)|^2) = \frac{1}{n} \sum_q |R_1(q)|^2 \leq \frac{1}{n} \sum_q n |R_1(q)| \leq n$$

Cette valeur est atteinte (à une constante près) dans le cas de points sur la demi parabole $y = x^2; x > 0$: on a $d^\circ(q_1) = n - 1$ et $\forall i \neq 1 d^\circ(q_i) \leq 3$, la somme des carrés des degrés est de l'ordre de n^2 , la moyenne de l'ordre de n .

1.6

$$\begin{aligned}
E(\min(|R_1(p)|^2, |R_1(q)|^2)) &= \frac{1}{n^2} \sum_{p \in S} \sum_{q \in S} \min((1 + d^\circ(p))^2, (1 + d^\circ(q))^2) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{p \in S} \sum_{q \in S} \min(1 + d^\circ(p), 1 + d^\circ(q)) \cdot \min(1 + d^\circ(p), 1 + d^\circ(q)) \\
&\leq \frac{1}{n^2} \sum_{p \in S} \sum_{q \in S} \min(1 + d^\circ(p), 1 + d^\circ(q)) \cdot \max(1 + d^\circ(p), 1 + d^\circ(q)) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{p \in S} \sum_{q \in S} (1 + d^\circ(p)) \cdot (1 + d^\circ(q)) \\
&= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{p \in S} 1 + d^\circ(p) \right) \cdot \left(\sum_{q \in S} 1 + d^\circ(q) \right) \leq \frac{1}{n^2} (7n - 6 - 2h)^2 \leq 49
\end{aligned}$$

1.7

```

Pour chaque sommet  $p$  de  $DT(S)$ {
  p.ring1 = 1;
  Pour  $v$  parcourant les les voisins de  $p$  dans  $DT(S)$ {
    p.ring1 += 1;
  }
}

```

1.8

La complexité est proportionnelle à $\sum_{p \in S} d^\circ(p) = 6n - 12$. Cette relation est obtenue en considérant la relation d'Euler $t - a + n = 2$ et la relation $\sum_{p \in S} d^\circ(p) = 3t = 2a$ (ici on considère que le sommet infini appartient à S , toutes les faces sont des triangles).

1.9

Si δ est le degré de p δ triangles de sommet p ont un sommet à distance 0 et deux sommets à distance 1. δ triangles (voisins des précédents) ont un sommet à distance 2 et deux sommets à distance 1. Les autres triangles ont un sommet à distance 1 et deux sommets à distance 2.

Si on additionne le degré des sommets à distance 1, les triangles de la première et deuxième catégorie sont comptés deux fois, et ceux de la troisième une seule.

On suppose que le champ *ring1* est déjà calculé (et contiens donc $\delta + 1$).

```

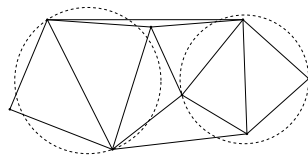
Pour chaque sommet  $p$  de  $DT(S)$ {
  p.t_ring2 = - 2 * ( p.ring1 - 1 );
  Pour  $v$  parcourant les les voisins de  $p$  dans  $DT(S)$ {
    p.t_ring2 += ( v.ring1 - 1 );
  }
}

```

1.10

La complexité est encore $\sum_{p \in S} d^\circ(p) = O(n)$.

2 Triangulation de Delaunay



3 Triangulation de Delaunay, 2 points par disque

3.1

4 disques centrés aux 4 coins d'un carré de côté 3, $p_0 = q_0, p_2 = q_2$ aux coins d'une diagonale du carré. p_1 et p_3 un peu vers l'intérieur du cercle circonscrit au carré q_1 et q_3 un peu vers l'intérieur du cercle circonscrit au carré.

3.2

On construit le cercle Γ' tangent à D_0, D_1 et D_2 qui contient D_0 et D_1 et qui ne contient pas D_2 . Γ' est centré sur la médiatrice de c_0c_1 .

Si D_3 est à l'extérieur de Γ' alors quelque soit la position des q_i dans leur cercle, Γ' sera vide et q_0q_1 sera de Delaunay.

Γ est donc de même centre que Γ' avec un rayon augmenté de 1.

3.3

Dans la triangulation $DT(P \cup \{q_i\})$, p_iq_i est une arête de Delaunay (c'est les seuls points dans D_i et on peut trouver un cercle inclus dans D_i passant par p_i et q_i). Il y a donc un point p_k tel que $p_iq_ip_k$ est un triangle de Delaunay de $DT(P \cup \{q_i\})$. Si on supprime p_i , q_ip_k reste une arête de Delaunay de $DT(P \cup \{q_i\} \setminus \{p_i\})$, si on supprime q_i , p_ip_k reste une arête de Delaunay de $DT(P)$,

3.4

p_i est un point aléatoire de P , son degré moyen est donc inférieur à 6 dans $DT(P)$.

De même q_i est un point aléatoire de $P \cup \{q_i\} \setminus \{p_i\}$ (car on a choisit au hasard dans D_i qui était p_i et qui était q_i) son degré est donc 6 aussi.

Il n'y a pas besoin de localiser q_i puisque l'on connaît déjà la position de p_i , on peut donc insérer q_i et supprimer p_i en temps constant en moyenne.

3.5

On prends les points dans un ordre aléatoire, et on les bouge chaqu'un à leur tour de leur place dans P à leur place dans Q .

La question précédente s'applique. Complexité $O(n)$.

3.6

On s'en sert au 2.4. Sinon q_i n'est plus aléatoire dans $P \cup \{q_i\} \setminus \{p_i\}$.

Par exemple si on prends P des points sur un cercle de rayon n et Q sur un cercle de rayon $n - 1$ alors quelque soit i le degré de q_i dans $DT(P \cup \{q_i\} \setminus \{p_i\})$ est $n - 1$.