Géométrie algorithmique, exercices, 9 janvier 2011, exercices

1 Graphe de Gabriel

Étant donné un ensemble $\mathcal{S}$ de n points du plan, on appelle Graphe de Gabriel le graphe ayant pour sommet ces points, une arête relie deux points $p, q \in \mathcal{S}$ si et seulement si le cercle de diamètre pq est vide.

1) Pourquoi le graphe de Gabriel est un sous-graphe de Delaunay ?

2) Montrer qu'une arête de Delaunay est de Gabriel si et seulement si les angles opposés à l'arête dans les deux triangles incidents sont aigus.

3) Pour quatre points en position convexe, combien y a-t-il d'arêtes de Gabriel ? Dessiner les différentes configurations.

4) Montrer qu'il y a $\Omega(n)$ arêtes dans le graphe de Gabriel.

5) Expliquer comment calculer le graphe de Gabriel, donner la complexité.

6) Borne inférieure pour le calcul du graphe de Gabriel.

Géométrie algorithmique, exercices, 9 janvier 2011, exercices à rendre

2 Triangulation de Delaunay

Dessiner la triangulation de Delaunay de l'ensemble de points ci dessous (sur la feuille jointe).

3 Polygone simple

Étant donné n points dans le plan,

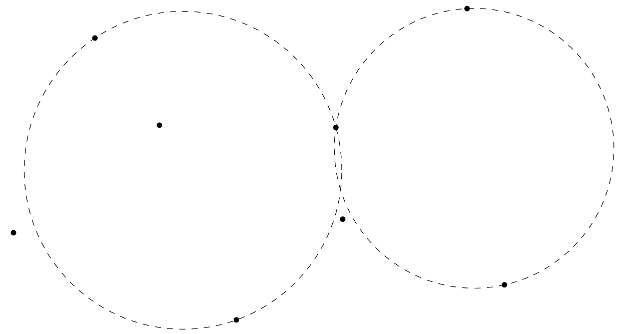
1- Proposer un algorithme permettant de trouver un polygone simple a n cotés ayant ces n points comme sommets

2- Quel est la complexité de votre algorithme ?

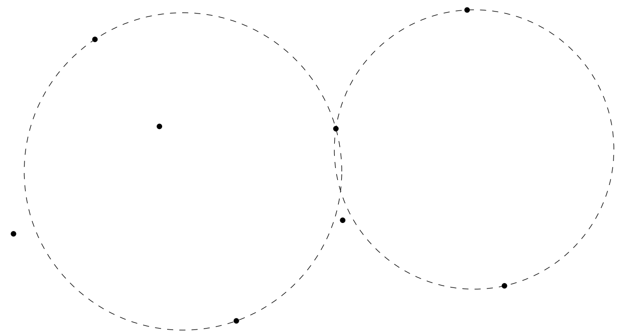
3- Montrer une borne inférieure pour la complexité de ce problème.

Nom :

2 Triangulation de Delaunay



2ème essai en cas de rature !



3 Polygone simple

1

2

3

Géométrie algorithmique, exercices, 9 janvier 2011, correction

1 Graphe de Gabriel

1) Une arête est de Delaunay si il existe un cercle vide passant par les deux extrémités, le cercle de diamètre les deux points est un tel cercle.

2) Géométrie du lycée :-)

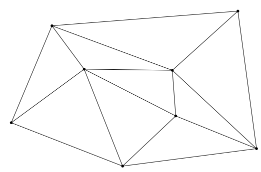
3) Il y a 4 arêtes de l'enveloppe convexe et la diagonale dans la triangulation de Delaunay.
Tout le monde de Gabriel, facile.
Seulement 3 ou 4 arêtes de l'enveloppe convexe de Gabriel, pas dur.
Les arêtes pas de Gabriel sont opposées à un angle obtus, Il y a deux triangles, donc au plus deux angles obtus donc au moins $5 - 2 = 3$ arêtes de Gabriel.

4) On a $3n$ arêtes, mais seulement $2n$ triangles et donc $2n$ angles obtus. Il reste donc au moins n arêtes de Gabriel.

5) Calculer Delaunay, pour chaque arête regarder si le centre du diamètre appartient à l'arête de Delaunay duale (définie par les deux triangles adjacents à l'arête).

6) Comme pour Delaunay $\Omega(n \log n)$. Si on a un problème de tri, on projette les points sur la demi-parabole, les cercles ayant les extrémités de leur diamètre sur la demi-parabole ne recoupe pas la demi-parabole. Les arêtes nous définissant l'ordre en x des points appartienne donc à Gabriel. Si je savais calculer Gabriel plus vite que $n \log n$ j'arriverai à trier plus vite que $n \log n$.

2 Triangulation de Delaunay



3 Polygone simple

1 Choisir un point "à l'intérieur" comme origine (par exemple le barycentre de 3 points de l'ensemble.

Trier les points par angle polaire autour de l'origine (en cas d'egalité trier par distance à l'origine).

Les points dans cet ordre forment un polygone simple.

2 La complexité est celle du tri : $O(n \log n)$.

3 Si on doit trier n nombres a_i de l'intervalle $[0, 2\pi]$, on peut construire n points $(\cos a_i, \sin a_i)$. Alors l'unique polygone simple ayant ces points comme sommet est leur enveloppe convexe, et ces points apparraisse sur l'enveloppe convexe dans l'ordre des a_i. Si on savait calculer le polygone simple en moins de $n \log n$ on aurait trié en moins de $n \log n$ ce qui n'est pas possible. La borne inférieure est $\Omega(n \log n)$. Notre algorihtme est optimal.