Examen Master STIC Spécialité IGMMV ISI ESSI3
2005-2006 : géométrie algorithmique
2h — 9 décembre 2005

Les trois exercices sont indépendants

1 Quadrangulation

Étant donné un ensemble $\mathcal{S}$ de n points, on va regarder des quadrangulations de l'enveloppe convexe de ces n points, c'est à dire un découpage en quadrilatère (polygones à 4 cotés) ayant leur sommets dans $\mathcal{S}$. On appellera k la taille de l'enveloppe convexe.

Given $\mathcal{S}$ a set of n points, we look at a quadrangulation of the convex hull of these n points, that is a partition of the convex hull in quads (4-sided polygons) having vertices in $\mathcal{S}$. Let k denote the size of the convex hull.

1.1 Taille

Déterminer le nombre exact de quadrilatères dans une telle quadrangulation, et en déduire une condition nécessaire sur n et k pour qu'une telle quadrangulation puisse exister.

What is the number of quads in such a quadrangulation ? Deduce a necessary condition on n and k for the existence of a quadrangulation.

1.2 Quadrangulation d'un polygone

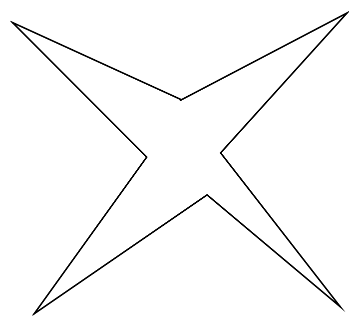


FIG. 1 –

Quandranguler l'intérieur du polygone de la figure 1 sans ajouter de points (figure reprise sur la feuille jointe). Trouver un exemple de polygone à 8 cotés qu'on ne puisse quandranguler (en le justifiant).

Give a quadrangulation of the polygon of Figure 1 without adding points (the figure is also an the additional material). Find an example of 8-sided polygon which is impossible to quadrangulate (justify).

2 Robustesse

On utilise l'arithmétique des `double`. Pour les propositions suivantes, dire si la proposition est juste ou fausse et justifier en moins d'une ligne.

We are using the arithmetic of `double`. For each of the following, claim if it is true or false and justify in less than one sentence.

$$\mathsf{a} > \mathsf{b} \quad\Leftrightarrow\quad \mathsf{a} - \mathsf{b} > 0 \tag{1}$$

$$(\mathsf{a} * \mathsf{b}) * \mathsf{c} \quad=\quad \mathsf{a} * (\mathsf{b} * \mathsf{c}) \tag{2}$$

$$\mathsf{a} + \mathsf{b} \quad=\quad \mathsf{b} + \mathsf{a} \tag{3}$$

$$\mathsf{a} * (\mathsf{b} + \mathsf{c}) \quad=\quad \mathsf{a} * \mathsf{b} + \mathsf{a} * \mathsf{c} \tag{4}$$

$$\mathtt{x} > \mathtt{y} \quad\Rightarrow\quad \mathtt{sqrt}(\mathtt{x}) > \mathtt{sqrt}(\mathtt{y}) \tag{5}$$

`x` et `y` supposés positifs.
Assuming `x` and `y` positives.

$$\mathtt{x} * \mathtt{x} \geq \mathtt{y} * \mathtt{y} \quad\Rightarrow\quad \mathtt{x} \geq \mathtt{y} \tag{6}$$

`a,b,c` contiennent des entiers entre -2^{20} et 2^{20} stockés dans des `double`.
`a,b,c` are integers between -2^{20} and 2^{20} stored in `double`.

$$\Rightarrow\quad (\mathsf{a} - \mathsf{b}) * (\mathsf{a} + \mathsf{c}) = \mathsf{a} * \mathsf{a} + \mathsf{a} * (\mathsf{c} - \mathsf{b}) - \mathsf{b} * \mathsf{c} \tag{7}$$

Quel est l'effet de la fonction suivante si on l'appelle sur un nombre `double` compris strictement entre -2^{50} et 2^{50} ?

What is the effect of the following function if called on a `double` number stricltly between -2^{50} and 2^{50} ?

```
double QuiSuisJe(double x) {
    double a = 3377699720527872.0;      // 2^50 + 2^51
    double s=x+a;
    double r=s-a;
    return r;
}
```

3 Delaunay et plus proches voisins

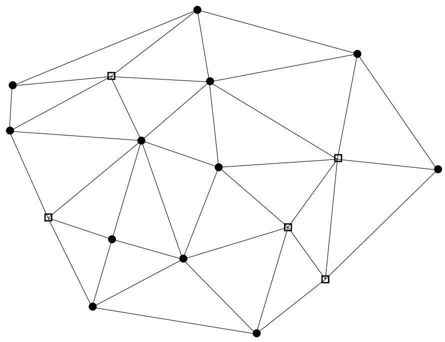


FIG. 2 –

3.1 Exemple

Étant donné une ensemble $\mathcal{S}$ de n points, le graphe des plus proches voisins $\mathcal{NN}(\mathcal{S})$ relie chaque point de $\mathcal{S}$ à son plus proche voisin dans $\mathcal{S}$ (en cas d'égalité, on choisit arbitrairement un seul des plus proches voisins).

Sur la feuille jointe, dessiner le graphe des plus proche voisins des points de la figure 2 (figure supplémentaire à rendre à la fin du sujet).

Given a set $\mathcal{S}$ of n points, the nearest neighbor graph $\mathcal{NN}(\mathcal{S})$ links each point of $\mathcal{S}$ to its nearest neighbor in $\mathcal{S}$ (in case of equality, only one of the neireast neighbor is chosen arbitrarily).

Draw the nearest neighbor graph on Figure 2 (additional figure to give back at the end of the subject).

3.2 Degré

Démontrez que le degré $deg_{\mathcal{NN}(\mathcal{S})}$ d'un point dans le graphe des plus proches voisins est borné supérieurement par 6.

Prove that the degree $deg_{\mathcal{NN}(\mathcal{S})}$ of a point in the nearest neighbor graph is upper bounded by 6.

3.3 Plus proche voisins et Delaunay

Montrez qu'une arête de $\mathcal{NN}(\mathcal{S})$ est aussi une arête de $\mathcal{DEL}(\mathcal{S})$ la triangulation de Delaunay de $\mathcal{S}$.

Prove that an edge of $\mathcal{NN}(\mathcal{S})$ is also an edge of $\mathcal{DEL}(\mathcal{S})$ the Delaunay triangulation of $\mathcal{S}$.

3.4 Colorions les points

Maintenant nous supposons que $\mathcal{S}$ est partitionné en deux sous ensembles $\mathcal{S}_{red}$ et $\mathcal{S}_{blue}$ de points rouges et bleus (par exemple les carrés et les ronds sur la figure 2).

Soit $p \in \mathcal{S}_{red}$ un point rouge, appelons q son plus proche voisin dans $\mathcal{S}_{red}$ et C_p le cercle de centre p passant par q. Montrer qu'il y a un chemin de p à q utilisant des arêtes de $\mathcal{DEL}(\mathcal{S})$ et restant à l'intérieur de C_p.

Now, we assume that $\mathcal{S}$ is split in two subsets $\mathcal{S}_{red}$ and $\mathcal{S}_{blue}$ of blue and red points (e.g. squares and disks on Figure 2).

Given $p \in \mathcal{S}_{red}$ a red point, let q be its nearest neighbor in $\mathcal{S}_{red}$ and C_p the circle of center p through q. Prove that there is a path between p and q using edges of $\mathcal{DEL}(\mathcal{S})$ that are inside C_p.

3.5 Si le coloriage est aléatoire

Dans cette question (et seulement celle ci) on va supposer que le coloriage a été fait en tirant à pile ou face pour chaque point de $\mathcal{S}$ si il serait bleu ou rouge.

Pouvez vous borner la longueur maximale du chemin obtenu à la question précédente entre p et q ? Et pour sa longueur moyenne ? (Ici, la longueur du chemin est le nombre d'arêtes sur le chemin).

In this question (and only this one) we assume that the points have been colored by tossing a coin for each point to decide if it will be red or blue.

Can you bound the maximal length of the path of the preceding question between p and q ? What about the expected length ? (The length is the number of edges on the path.)

3.6

Soient p et q comme aux questions précédentes et r un point bleu à l'intérieur du cercle C_p. On regarde $\mathcal{NN}(\mathcal{S}_{red} \cup \{r\})$. pq, pr et qr sont elles des arêtes de ce graphe ? Pour chacune de ces trois arêtes, le démontrer ou exhiber un exemple de points où ce ne serait pas le cas.

Let p and q as before and r be a blue point inside C_p. We look at $\mathcal{NN}(\mathcal{S}_{red} \cup \{r\})$. Are pq, pr and qr edges of this graph ? For each of these three edges, prove it or draw a counter-example.

3.7 Encore l'exemple

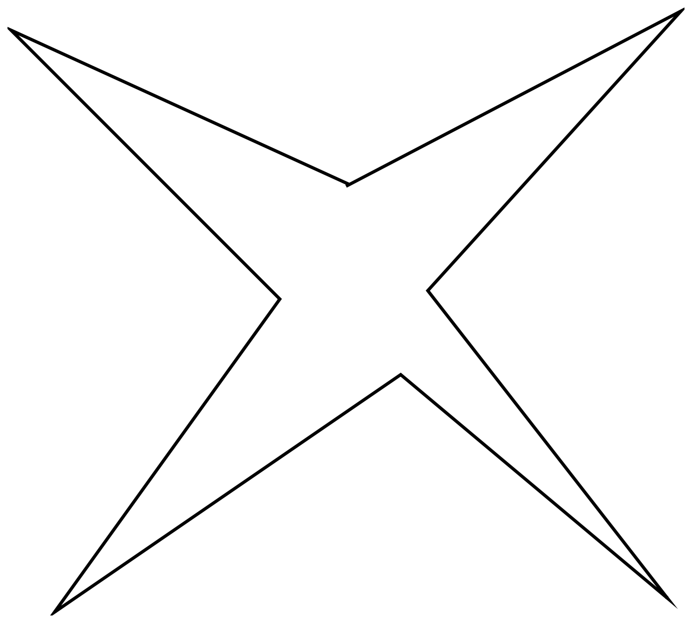
Sur le deuxième dessin dessiner pour chaque point carré le cercle centré en ce point et passant par le plus proche carré. Si on choisit un carré au hasard parmi les 5 carres, quel est le nombre moyen de ronds que l'on trouvera dans son cercle.

On the second picture draw for each square the circle centered there and passing through the closest square. If we choose a square at random, how many disks are expected to be inside its circle.

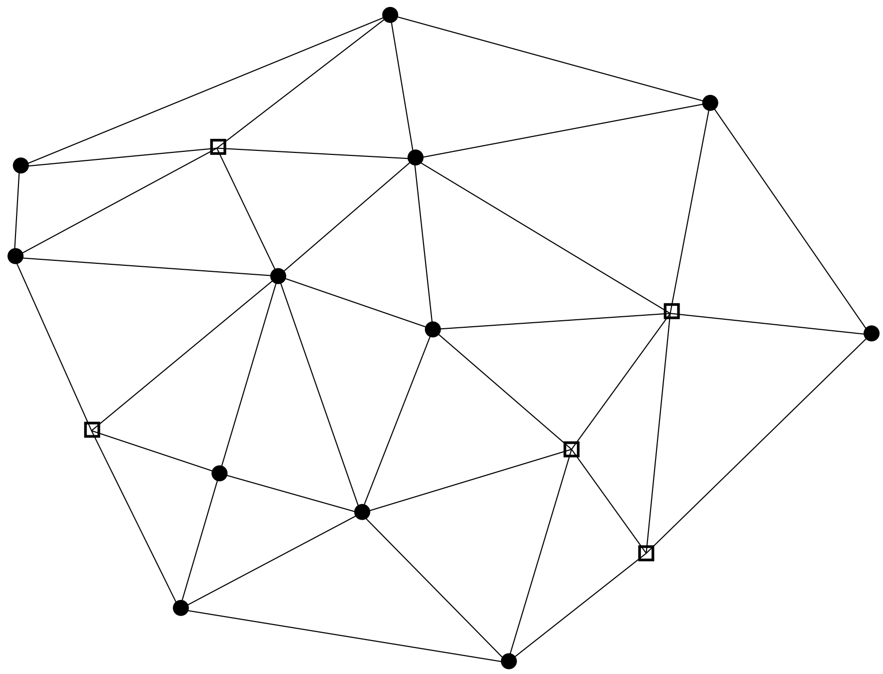
3.8 En moyenne sur p

Dans cette question, le coloriage a été donné, et p est choisi aléatoirement dans $\mathcal{S}$. Est il possible de borner la taille du chemin (comme dans les question précédentes) entre p et q en moyenne sur le choix de p (p peut être rouge ou bleu et q est son plus proche voisin de la même couleur).

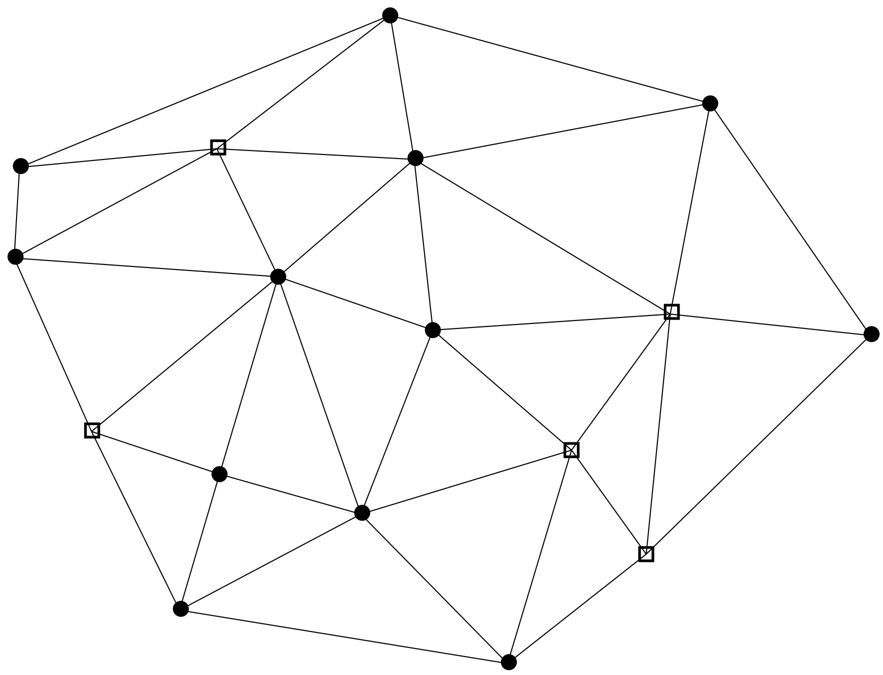
In this question, the colors are given, we will choose a point p at random in $\mathcal{S}$. Can you bound the size of the path (as before) between p and q by averaging on the choice of p (p can be red or blue and q is its nearest neighbor of the same color).



Pour la question 1.2



Pour la question 3.1



Pour la question 3.7