Examen Master STIC Spécialité IGMMV 2004-2005 : géométrie algorithmique
3h — 3 decembre 2004

1 Delaunay et échantillonage de courbes

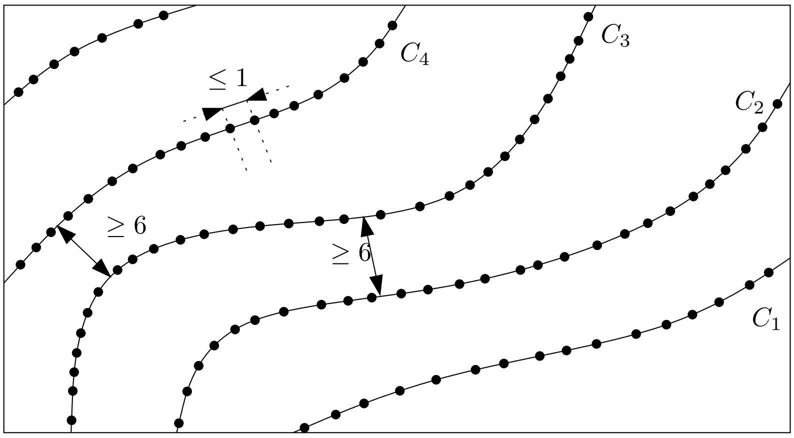

FIG. 1 –

On a un réseau de courbes à peu près parallèles C_1, C_2, C_3...On suppose que la distance entre deux courbes est toujours supérieure à 6, le rayon de courbure de ces courbes est également supérieur à 6. Ces courbes sont échantillonnées, deux points successifs sur une courbe ont une distance inférieure à 1 (Figure ??).

On calcule la triangulation de Delaunay de l'ensemble de ces points.

1.1 Delaunay «reconstruit» les courbes

Question 1

Montrer que deux points successifs $p_{i,j}$ et $p_{i,j+1}$ sur une courbe C_i sont reliés dans la triangulation de Delaunay.

1.2 Degré dans Delaunay

Supposons dans cette question, pour simplifier, que nos courbes sont des droites parfaitement parallèles avec une distance de 6. On considère la triangulation de Delaunay des points sur C_1 et C_3 et des points $p_{2,k}$ pour $k \leq j$ mais pas les $p_{2,k}$ pour $k > j$.

Question 2

Donner une borne inférieure sur le degré de $p_{2,j}$ dans la triangulation (Figure ??).

1.3 Insertion dans Delaunay

Supposons maintenant que les points sur chaque droite ont des écarts de longueur 1 exactement, que les points sur C_1 et C_3 soient déjà insérés dans la triangulation de Delaunay. Si on insère les points dans l'ordre $p_{2,1}$, $p_{2,2}$, $p_{2,3}$...$p_{2,k}$, donner une borne inférieure sur le nombre de triangles créés au cours de l'insertion de cette séquence de points.

Question 3

Proposer un autre ordre d'insertion, en donnant une estimation du nombre de triangle créés (et en essayant de minimiser ce nombre).

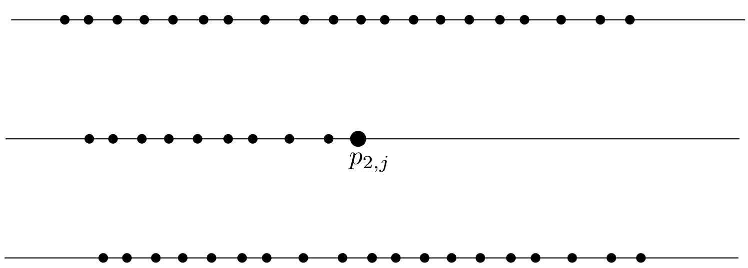

FIG. 2 –

2 Représentation de triangulation

On considère une triangulation de n points dont l'enveloppe convexe est un carré.

2.1 Demi-arêtes

Question 4

Si on utilise la représentation en demi-arêtes vue en cours avec des objets associés aux demi-arêtes et aux sommets, quel est le nombre de pointeurs nécéssaire dans cette structure en fonction de n ?

Question 5

Étant donné e une demi-arête, quel est le triangle voisin du triangle défini par les trois sommets $e.target$, $e.next.target$, $e.next.next.target$ opposé à $e.target$? Et celui opposé à $e.next.next.target$? Quel est la complexité de ces opérations ?

2.2 Triangles

Question 6

Si on utilise la représentation basé sur des triangles et des sommets quel est le nombre de pointeurs nécéssaire ?

2.3 Sommets

On va utiliser la structure suivante : le seul objet est le sommet, un sommet v comporte, outre les coordonnées du point, les informations suivantes :

- son degré d_v dans la triangulation.
- un tableau N_v de taille d_v de pointeurs vers les sommets voisins ordonnés dans l'ordre direct autour de v.

Question 7

Quel est le nombre mots machine nécéssaire ? (on supposera que le degré comme les pointeurs occupe un mot machine).

Question 8

Étant donné v, i décrire comment trouver le triangle voisin du triangle $vN_v(i)N_v(i+1)$ opposé au sommet v ? Quelle est la complexité de cette opération ?

2.4 Triangles et quadrilatères

On a maintenant comme objet des sommets, et un mélange de triangles et de quadrilatères (regroupant deux triangles). On a toujours n sommets.

Question 9

Décrire une structure (qui a des pointeurs vers quoi ? quelles information supplémentaires sont nécessaires ?) permettant de représenter une triangulation avec ces objets.

Question 10

Combien de pointeurs seraient nécéssaires dans une telle structure en fonction de n et du rapport $\alpha = \frac{\text{nombre de quadrilatères}}{\text{nombre de triangles}}$?

Question 11

Étant donné une triangulation, comment regrouper les triangles deux par deux en quadrilatères en laissant un minimum de triangles isolés ? Donner une borne inférieure sur le α obtenu.

Question 12

Donner un exemple de triangulation de n points ne permettant pas un α supérieur.

Question 13

Quel borne peut-on garantir sur le nombre de pointeurs en appliquant ce découpage ?

3 Algo mystère

On donne l'algorithme suivant :

```
entrée : S un ensemble de n points du plan
trier S en x ;
initier une liste circulaire avec les 3 points les plus à gauche
tel que u soit le point le plus à droite et u, u.suivant, u.suivant.suivant tourne à gauche ;
dessiner u, u.suivant, u.suivant.suivant
Pour v le prochain en x
    w = u
    dessiner uv
    tant que (v, u, u.suivant) tourne à droite
        u = u.suivant ;
        dessiner uv ;
    v.suivant = u ; u.pred = v ;
    tant que (v, w, w.pred) tourne à gauche
        w = w.pred ;
        dessiner wv ;
    v.pred = w ; w.suivant = v ;
    u = v ;
```

Question 14

À la fin de l'algorithme, qu'est ce qui a été dessiné ? Que contient la liste (définie par *pred* et *suivant*) ?

Question 15

Combien de fois l'instruction «dessiner» est-elle appellée ? Quelle est la complexité de cet algorithme ?

4 Question subsidiaire : Delaunay et projection

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de n points en dimension 3. On imagine un observateur à l'infini qui observe ces points (c'est à dire que l'on projette ces points sur un plan perpendiculaire à la direction de l'observateur) et on cherche à compter combien on peut obtenir de triangulations combinatoirement différentes.

(On pourra considérer la sphère des directions de projection, et la découper en fonction des différentes triangulations.)

Question 16

Trouver une borne supérieure de la forme $O(n^k)$ pour un certain k.

Question 17

Trouver une borne inférieure de la forme $\Omega(n^{k'})$ pour un certain $k' \leq k$ (en exhibant un exemple).