Examen DEA SIC 2002-2003 : géométrie algorithmique
3h — 6 mars 2003

1 Droite ordinaire

Étant donné un ensemble $\mathcal{S}$ de n points du plan, on appelle droite ordinaire une droite qui passe par exactement deux points de $\mathcal{S}$, si tous les points de $\mathcal{S}$ ne sont pas alignés, l'existence d'une droite ordinaire est garantie (c'est l'un des fameux problèmes de Sylvester).

On considère un point $p \in \mathcal{S}$ et une droite L passant par p ne contenant pas d'autre point de $\mathcal{S}$. Soit δ la droite passant par deux points de $\mathcal{S} \setminus \{p\}$ ou plus coupant L le plus près de p.

1.1

Montrer que δ passe par deux points ayant des angles polaires autour de p consécutifs modulo π (attention modulo π et pas modulo 2π).

1.2

Montrer que si δ contient trois points q, r et s (si les trois points sont du même coté de L, s sera celui du milieu, sinon s sera le point le plus loin de L du cote ou il y a deux points) alors la droite ps est ordinaire.

1.3

Proposer un algorithme calculant une droite ordinaire et donner sa complexité.

2 Triangulation de Delaunay et échantillon

Notations

- $\mathcal{S}$ est un ensemble de n points du plan,
- $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$ la triangulation de Delaunay de $\mathcal{S}$.
- $\mathcal{ACM}(\mathcal{S})$ l'arbre couvrant de longueur minimale de $\mathcal{S}$ (On rappelle que l'arbre couvrant minimal est un sous-graphe de la triangulation de Delaunay, et que dans cet arbre le degré des nœuds est borné par 5.)
- On note $C(pqr)$ le cercle circonscrit aux trois points p, q et r.
- $\mathcal{K}$ un sous-ensemble de $\mathcal{S}$
- $x \in \mathcal{S}$ un point de $\mathcal{S}$
- $\mathcal{K}_x = \mathcal{S} \setminus \{x\}$ un sous-ensemble de $n-1$ points de $\mathcal{S}$
- $\alpha(x) = |\mathcal{DT}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{DT}(\mathcal{K}_x)|$
  c'est-à-dire le nombre d'arêtes de $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$ crées par l'insertion de x.
- $\beta(x) = |\mathcal{DT}(\mathcal{K}_x) \setminus \mathcal{DT}(\mathcal{S})|$
  c'est-à-dire le nombre d'arêtes de $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$ supprimées par l'insertion de x.
- $\gamma(x)$ le nombre de points d'intersections entre les arêtes de $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$ et celles de $\mathcal{DT}(\mathcal{K}_x)$.

– $\delta(x)$ le nombre de points d'intersections entre les arêtes de $\mathcal{ACM}(\mathcal{S})$ et celles de $\mathcal{DT}(\mathcal{K}_x)$.

Pour toutes les questions du problème, on pourra se contenter d'ordres de grandeur asymptotiques (si vous avez une borne inférieure en $\frac{n^3}{2}$ et supérieure en $28n^3$ vous pouvez conclure à $\Theta(n^3)$, dans certains cas les bornes exactes sont faciles à donner).

Pour de nombreuses questions, on peut penser au cas de la demi-parabole pour trouver les réponses, mais la démonstration doit être pour un ensemble de points quelconques.

2.1

Soit abc un triangle de $\mathcal{DT}(\mathcal{K})$ et uv une arête de $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$.

— Montrer que si uv coupe ab alors $C(abc)$ contient u ou v.

2.2

Dans le cas le pire pour le choix de x.

-a- Donner une borne sur $\alpha(x)$.

-b- Donner une borne sur $\beta(x)$.

-c- Donner une borne sur $\gamma(x)$.

-d- Donner une borne sur $\delta(x)$.

2.3

Maintenant x va être choisi au hasard parmi les n points de $\mathcal{S}$, aucune hypothèse n'est faite sur la position des points de $\mathcal{S}$.

-a- Quelle est la valeur moyenne de $\alpha(x)$.

-b- Quelle est la valeur moyenne de $\beta(x)$.

-c- Quelle est la valeur moyenne de $\gamma(x)$.

-d- Quelle est la valeur moyenne de $\delta(x)$.

2.4

On suppose maintenant que $\mathcal{K}$ est un échantillon aléatoire de la moitié des points de $\mathcal{S}$, et abc un triangle de $\mathcal{DT}(\mathcal{K})$.

-a- Si x est un point aléatoire de $\mathcal{S} \setminus \mathcal{K}$, quelle est la probabilité que x soit voisin de a dans $\mathcal{DT}(\mathcal{K} \cup \{x\})$?

-b- Majorer la probabilité que x appartiennent à $C(abc)$.

-c- Borner l'espérance du nombre de points de $\mathcal{S}$ dans $C(abc)$.

-d- Borner l'espérance du nombre d'intersections entre les arêtes de $\mathcal{DT}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{ACM}(\mathcal{S})$.

-e- Borner l'espérance du nombre d'intersections entre les arêtes de $\mathcal{DT}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$.