Examen Correction : Master STIC Spécialité IGMMV ISI ESSI3
2005-2006 : géométrie algorithmique
2h — 9 décembre 2005

Les trois exercices sont indépendants

1 Quadrangulation

Étant donné un ensemble $\mathcal{S}$ de n points, on va regarder des quadrangulations de l'enveloppe convexe de ces n points, c'est à dire un découpage en quadrilatère (polygones à 4 cotés) ayant leur sommets dans $\mathcal{S}$. On appellera k la taille de l'enveloppe convexe.

1.1 Taille

Déterminer le nombre exact de quadrilatères dans une telle quadrangulation, et en déduire une condition nécessaire sur n et k pour qu'une telle quadrangulation puisse exister.

Correction : Si q est le nombre de quadrilatères et e le nombres d'arêtes, on a $q - e + n = 1$ par la relation d'Euler, d'autre part chaque face ayant 4 arêtes et chaque arête étant dans deux faces sauf celles de l'enveloppe convexe on a $4q = 2e - k$. D'où on a $2q + k = 2e - 2q = 2n - 2$, qui donne $q = n - 1 - \frac{k}{2}$. Il faut donc que k soit pair (et $n \geq 4$). On a $e = 2n - 2 - \frac{k}{2}$.

1.2 Quadrangulation d'un polygone

Quandranguler l'intérieur du polygone de la figure **??** sans ajouter de points (figure reprise sur la feuille jointe). Trouver un exemple de polygone à 8 cotés qu'on ne puisse quandranguler (en le justifiant).

Correction :

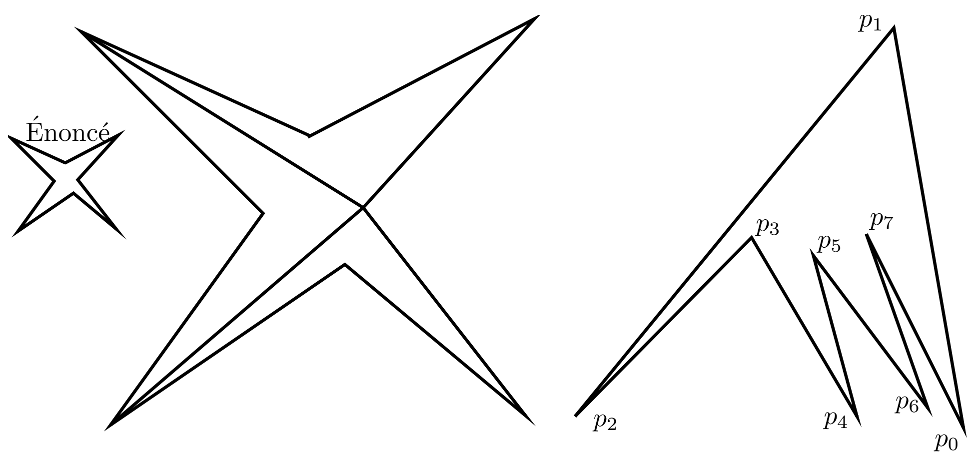

FIG. 1 –

Dans la figure 1, les seules arêtes possibles sans créer d'intersections sont p_3p_5, p_5p_7 et p_7p_3, toutes ces arêtes découpent le polygone en deux polygones avec un nombre impair de cotés, donc non quadrangulable.

2 Robustesse

On utilise l'arithmétique des `double`. Pour les propositions suivantes, dire si la proposition est juste ou fausse et justifier en moins d'une ligne.

$$\mathsf{a} > \mathsf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{a} - \mathsf{b} > 0 \tag{1}$$

$$(\mathsf{a} * \mathsf{b}) * \mathsf{c} \quad = \quad \mathsf{a} * (\mathsf{b} * \mathsf{c}) \tag{2}$$

$$\mathsf{a} + \mathsf{b} \quad = \quad \mathsf{b} + \mathsf{a} \tag{3}$$

$$\mathsf{a} * (\mathsf{b} + \mathsf{c}) \quad = \quad \mathsf{a} * \mathsf{b} + \mathsf{a} * \mathsf{c} \tag{4}$$

$$\mathsf{x} > \mathsf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathtt{sqrt}(\mathsf{x}) > \mathtt{sqrt}(\mathsf{y}) \tag{5}$$

`x` et `y` supposés positifs. $$\mathsf{x} * \mathsf{x} \geq \mathsf{y} * \mathsf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{x} \geq \mathsf{y} \tag{6}$$

`a,b,c` contiennent des entiers entre -2^{20} et 2^{20} stockés dans des `double`. $$\Rightarrow \quad (\mathsf{a} - \mathsf{b}) * (\mathsf{a} + \mathsf{c}) = \mathsf{a} * \mathsf{a} + \mathsf{a} * (\mathsf{c} - \mathsf{b}) - \mathsf{b} * \mathsf{c} \tag{7}$$

Correction :
(1) vrai, c'est exprès pour ça qu'il y a les nombres dénormalisés.
(2) faux, multiplication machine non associative.
(3) vrai, le résultat exact est le même, il est arrondi de la même façon.
(4) faux, pas de distributivité.
(5) faux, on peut avoir `sqrt(x) = sqrt(y)` et `x` $\neq$ `y`
(6) vrai, la fonction d'arrondi preserve l'ordre (au sens large seulement)
(7) vrai, les valeurs manipulées ne sont entières et toujours inférieure à 2^{54} et donc calculées exactement avec l'arithmétique des `double` qui a 53 bits significatifs.

Quel est l'effet de la fonction suivante si on l'appelle sur un nombre `double` compris strictement entre -2^{50} et 2^{50} ?

```
double QuiSuisJe(double x) {
    double a = 3377699720527872.0;      // 2^50 + 2^51
    double s=x+a;
    double r=s-a;
    return r;
}
```

Correction : Arrondi au demi-entier le plus proche.

On a $2^{51} = 2^{51} + 2^{50} - 2^{50} <$`x+a` $< 2^{51} + 2^{50} + 2^{50} = 2^{52}$ Le 1er bit significatif de `s` vaut donc 2^{51}, 53-ème bit significatif de `s` vaut donc $2^{52-53} = 0.5$; comme on est en mode d'arrondi au plus proche on va donc obtenir pour `s` le demi-entier le plus proche de `x+a`. Enfin `r` sera l'arrondi de `x` au demi-entier le plus proche.

3 Delaunay et plus proches voisins

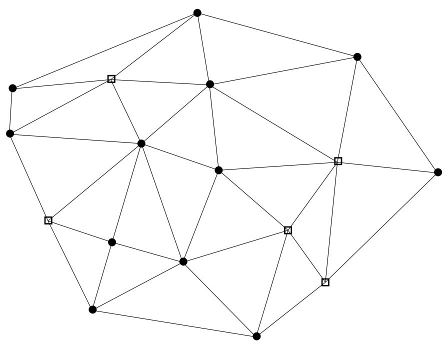

FIG. 2 –

3.1 Exemple

Étant donné une ensemble $\mathcal{S}$ de n points, le graphe des plus proches voisins $\mathcal{NN}(\mathcal{S})$ relie chaque point de $\mathcal{S}$ à son plus proche voisin dans $\mathcal{S}$ (en cas d'égalité, on choisit arbitrairement un seul des plus proches voisins).

Sur la feuille jointe, dessiner le graphe des plus proche voisins des points de la figure 2 (figure supplémentaire à rendre à la fin du sujet).

Correction : Figure 3.

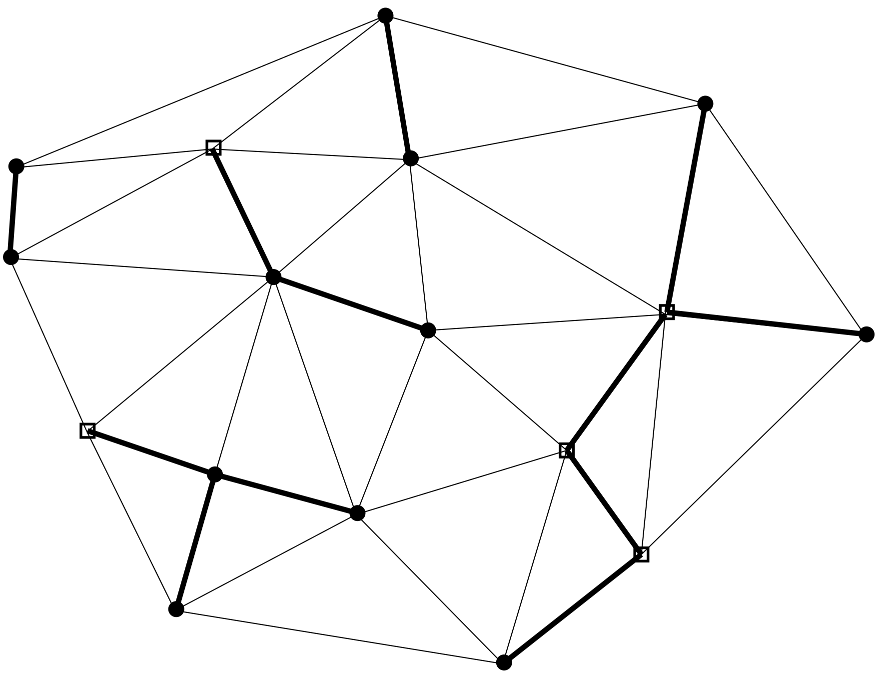

FIG. 3 – Graphe des plus proches voisins.

3.2 Degré

Démontrez que le degré $deg_{\mathcal{NN}(\mathcal{S})}$ d'un point dans le graphe des plus proches voisins est borné supérieurement par 6.

Correction : Soit p un point, q et r deux points ayant p comme plus proche voisin. On suppose que $pq \geq pr$ (sinon échanger p et q). Fixons p et q et dessinons le cercle C_q de centre q passant par p et C_p celui de centre p passant par q. Le point r doit être dans C_p (hypothèse $pq \geq pr$) et en dehors de C_q (car p est le plus proche voisin de q), l'angle qpr est donc supérieur à $\frac{\pi}{3}$ et on peut mettre un maximum de 6 voisins à p.

3.3 Plus proche voisins et Delaunay

Montrez qu'une arête de $\mathcal{NN}(\mathcal{S})$ est aussi une arête de $\mathcal{DEL}(\mathcal{S})$ la triangulation de Delaunay de $\mathcal{S}$.

Correction : Si p est le plus proche voisin de q, le cercle de centre p passant par q ne contient que q. Le cercle de diamètre pq est inclus dans le précédent et est donc vide, ce qui est une condition suffisante pour que pq soit une arête de Delaunay.

3.4 Colorions les points

Maintenant nous supposons que $\mathcal{S}$ est partitionné en deux sous ensembles $\mathcal{S}_{red}$ et $\mathcal{S}_{blue}$ de points rouges et bleus (par exemple les carrés et les ronds sur la figure 2).

Soit $p \in \mathcal{S}_{red}$ un point rouge, appelons q son plus proche voisin dans $\mathcal{S}_{red}$ et C_p le cercle de centre p passant par q. Montrer qu'il y a un chemin de p à q utilisant des arêtes de $\mathcal{DEL}(\mathcal{S})$ et restant à l'intérieur de C_p.

Correction : Supposons que q soit le k-ième voisins de p dans $\mathcal{S}$, c'est à dire que les $k-1$ premiers sont bleus, on va montrer par récurrence sur j qu'il y a un chemin de p à son j-ième voisin p_j ne passant que par des voisins plus proche de p et le cas $j = k$ nous donnera notre résultat.

Pour $j = 1$, cela vient du fait qu'une arête de $\mathcal{NN}(\mathcal{S})$ est de Delaunay. Si $j > 1$ on considère C_j le cercle de centre p passant par p_j, maintenant on regarde le plus grand cercle vide passant par p_j tangent à l'intérieur de C_j, ce cercle passe par un point r qui est soit p soit p_k pour $k < j$, par hypothèse de récurrence on a un chemin de p à p_k qui reste dans $C_k \subset C_j$ et comme on a trouvé un cercle vide l'arête rp_j est de Delaunay, elle nous permet de compléter ce chemin jusqu'à p_j.

3.5 Si le coloriage est aléatoire

Dans cette question (et seulement celle ci) on va supposer que le coloriage a été fait en tirant à pile ou face pour chaque point de $\mathcal{S}$ si il serait bleu ou rouge.

Pouvez vous borner la longueur maximale du chemin obtenu à la question précédente entre p et q ? Et pour sa longueur moyenne ? (Ici, la longueur du chemin est le nombre d'arêtes sur le chemin).

Correction : La longueur maximale peut être n, avec vraiment pas de chance on aura même pas deux points rouges, sinon p et q peuvent être les seuls points rouges et on peut s'arranger pour que les points bleus soient presque tous dans le cercle et soient tous sur le chemin.

Pour le cas moyen, on va borner la longueur du chemin par le nombre de points dans le cercle. p étant donné, avec probabilité $\frac{1}{2}$ le plus proche voisin sera rouge et la longueur du chemin sera 1, avec probabilité $\frac{1}{2^k}$ le k-ième voisin sera rouge et tous les voisins de 1 à $k-1$ seront bleus et la longueur du chemin sera bornée par k. On obtient une borne de

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} &= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \dots \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots\right) \dots
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$
$$= 2$$

3.6

Soient p et q comme aux questions précédentes et r un point bleu à l'intérieur du cercle C_p. On regarde $\mathcal{NN}(\mathcal{S}_{red} \cup \{r\})$. pq, pr et qr sont elles des arêtes de ce graphe ? Pour chacune de ces trois arêtes, le démontrer ou exhiber un exemple de points où ce ne serait pas le cas.

Correction : pr est une arête de $\mathcal{NN}(\mathcal{S}_{red} \cup \{r\})$ puisque q est le plus proche de p dans $\mathcal{S}_{red}$ et on a ajouté le seul point r qui est encore plus près, donc r est le plus proche voisin de p. Pour les deux autres c'est évidemment faux, on peut mettre des autres points en dehors de C_p pour qu'il soit les plus proches voisins de q et r.

3.7 Encore l'exemple

Sur le deuxième dessin dessiner pour chaque point carré le cercle centré en ce point et passant par le plus proche carré. Si on choisit un carré au hasard parmi les 5 carres, quel est le nombre moyen de ronds que l'on trouvera dans son cercle.

Correction : Voir figure 4.
Il y a 5 carrés, 3 ronds dans deux cercles et 6 dans un seul. Soit une moyenne de $\frac{12}{5}$.

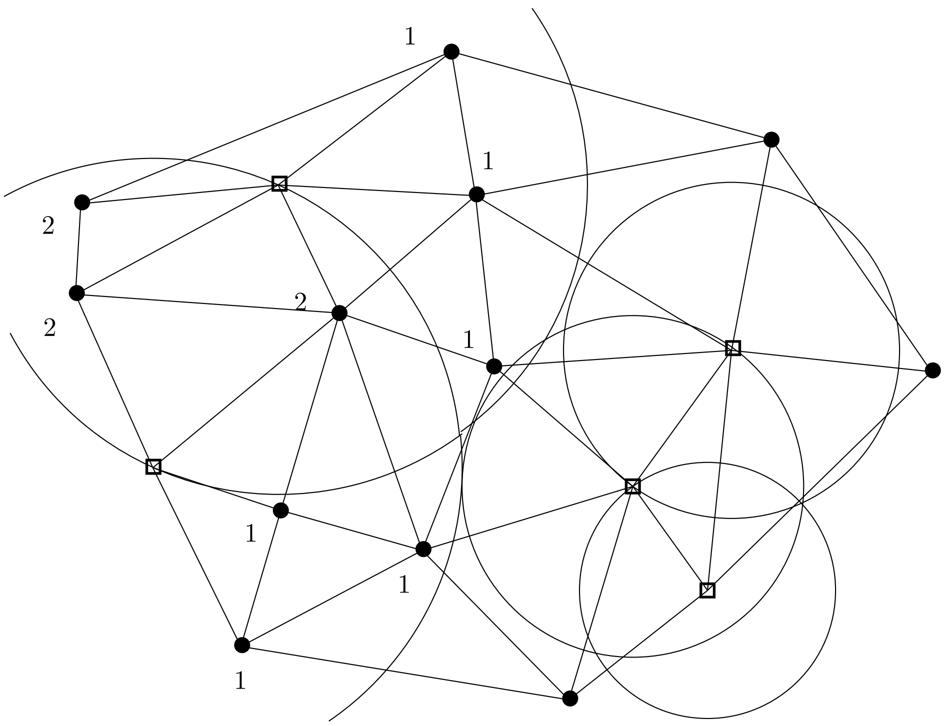

FIG. 4 – Cercles par les plus proches carrés.

3.8 En moyenne sur p

Dans cette question, le coloriage a été donné, et p est choisi aléatoirement dans $\mathcal{S}$. Est il possible de borner la taille du chemin (comme dans les question précédentes) entre p et q en moyenne sur le choix de p (p peut être rouge ou bleu et q est son plus proche voisin de la même couleur).

Correction :

$$\begin{aligned}
|\text{chemin}| &\leq \text{nombre moyen de points de l'autre couleur dans } C_p \\
&\leq \frac{1}{n}\left(\sum_{p\in\mathcal{S}_{red}}\sum_{r\in\mathcal{S}_{blue}} 1_{r\in C_p} + \sum_{p\in\mathcal{S}_{blue}}\sum_{r\in\mathcal{S}_{red}} 1_{r\in C_p}\right)
\end{aligned}$$

où $1_{r\in C_p}$ vaut 1 si $r\in C_p$ et 0 sinon.

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in\mathcal{S}_{red}}\sum_{r\in\mathcal{S}_{blue}} 1_{r\in C_p} &\leq \sum_{r\in\mathcal{S}_{blue}}\sum_{p\in\mathcal{S}_{red}} 1_{r\in C_p} \\
&\leq \sum_{r\in\mathcal{S}_{blue}}\sum_{p\in\mathcal{S}_{red}} 1_{r\text{voisin de } p \text{ dans } \mathcal{NN}(\mathcal{S}_{red}\cup\{r\})} \\
&\leq \sum_{r\in\mathcal{S}_{blue}} deg_{\mathcal{NN}(\mathcal{S}_{red}\cup\{r\})}(r) \\
&\leq \sum_{r\in\mathcal{S}_{blue}} 6
\end{aligned}$$

on a un résultat symétrique pour l'autre somme et en recombinant on a

$$\begin{aligned}
|\text{chemin}| &\leq \frac{1}{n}\left(\sum_{r\in\mathcal{S}_{blue}} 6 + \sum_{r\in\mathcal{S}_{red}} 6\right) \\
&\leq \frac{1}{n}\left(6\sum_{r\in\mathcal{S}}\right) \\
&\leq \frac{1}{n}(6\cdot 6n) \\
&\leq 36
\end{aligned}$$