

1 Existence de pentagone vide

Étant donné un ensemble \mathcal{S} de n points du plan en position générale (pas trois points alignés), on va chercher à montrer que si n est suffisamment grand, il existe un pentagone convexe formé par 5 points de \mathcal{S} et ne contenant pas d'autres points de \mathcal{S} .

On admet le résultat suivant : pour $n \geq 37$ il existe toujours un hexagone convexe formé par des points de \mathcal{S} (pas forcément vide de points de \mathcal{S}). On considère un tel hexagone $H = h_1h_2h_3h_4h_5h_6$, et I l'ensemble des points de \mathcal{S} contenu dans H .

— Montrer que si $I = \emptyset$ il existe un pentagone convexe vide.

Évident, n'importe quel 5 sommets de H forment un pentagone convexe vide

— Montrer que si $I = \{x\}$ (un seul point) il existe un pentagone convexe vide.

On considère la diagonale h_1h_4 , si x est du côté de h_5h_6 alors $h_1h_2h_3h_4x$ est un pentagone convexe vide, sinon $h_4h_5h_6h_1x$ est un pentagone convexe vide.

— Montrer que si $I = \{x, y\}$ (deux points) il existe un pentagone convexe vide.

On considère la droite xy , elle partage H en deux morceaux, on peut distinguer selon la taille de ces morceaux (à un renommage près).

h_1 séparé de $h_2h_3h_4h_5h_6$ alors $xyh_2h_3h_4h_5h_6$ est un heptagone convexe vide.

h_1h_2 séparé de $h_3h_4h_5h_6$ alors $xyh_3h_4h_5h_6$ est un hexagone convexe vide

$h_1h_2h_3$ séparé de $h_4h_5h_6$ alors $xyh_4h_5h_6$ et $xyh_1h_2h_3$ sont des pentagones convexes vides.

— Montrer que si $|I| = k \geq 3$ soit il existe un pentagone convexe vide, soit il existe un hexagone convexe contenant au plus $k - 2$ points.

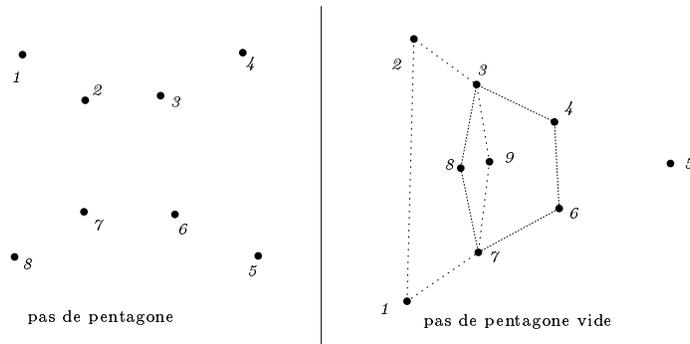
On considère une arête xy de l'enveloppe convexe de I , si la droite xy sépare I de 3 points de H ou plus, ces points et x et y forment un convexe vide (au moins un pentagone). Si la droite xy ne sépare que deux points, par exemple h_1h_2 , alors $xyh_3h_4h_5h_6$ est un hexagone convexe ne contenant que des points de $I \setminus \{x, y\}$ donc de taille au plus $k - 2$.

— Conclure.

À partir d'un hexagone convexe, on peut donc toujours trouver un pentagone convexe vide, soit directement, soit en itérant sur un hexagone contenant moins de points. Si $n \geq 37$ un hexagone existe donc il existe aussi un pentagone vide.

Rq: En fait le résultat sur le pentagone est vrai pour $n \geq 10$

— Dessiner un exemple de n points en position générale tels qu'il n'existe pas de pentagone convexe vide pour $n = 5, 6, 7, 8$ et 9 .



2 Marche dans une Triangulation

Étant donné un ensemble \mathcal{S} de n points du plan et une triangulation \mathcal{T} de \mathcal{S} , $q \in \mathcal{S}$ et p un point du plan, on appelle marche rectiligne la traversée de tous les triangles traversés par le segment qp . Le pseudo-code est le suivant :

```

Algorithm 2D Straight Walk( $q, p$ )
// traverses the triangulation  $\mathcal{T}$ , following the line segment  $qp$ .
//  $t = qrl$  is a triangle of  $\mathcal{T}$ .
if orientation( $rqp$ ) < 0 while orientation( $lqp$ ) < 0 {
     $r = l$ ;
     $t = \text{neighbor}(t \text{ through } ql)$ ;
     $l = \text{vertex of } t, l \neq q, l \neq r$ ; }
else do {
     $l = r$ ;
     $t = \text{neighbor}(t \text{ through } qr)$ ;
     $r = \text{vertex of } t, r \neq q, r \neq l$ ;
    } while orientation( $rqp$ ) < 0;
// end of initialization step
// now  $qp$  has  $r$  on its right and  $l$  on its left.
while orientation( $prl$ ) < 0 {
     $t = \text{neighbor}(t \text{ through } rl)$ ;
     $s = \text{vertex of } t, s \neq r, s \neq l$ ;
    if orientation( $sqp$ ) < 0  $r = s$ ; else  $l = s$ ; }
//  $t$  contains  $p$ .

```

Lors de cette marche on visite au pire une fois chaque triangle de la triangulation.

On définit la marche orthogonale comme une marche qui au lieu d'aller de q à p en ligne droite va utiliser un chemin parallèle aux axes (d'abord x puis y).

— Combien de fois un triangle peut-il être visité par une telle marche?

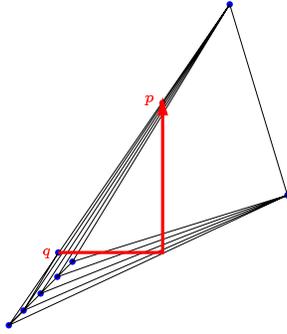
C'est la composé de deux marches rectilignes. Donc deux fois, une fois pour chaque marche rectiligne.

— Combien y a-t-il de triangles dans \mathcal{T} ?

À peu près $2n$ d'après la relation d'Euler.

— Combien de triangles peuvent-ils être visités au total (en comptant un triangle autant de fois qu'il est visité)?

Il y a $2n + O(1)$ triangles dans la triangulation et tous peuvent être visités deux fois.



— Donner une description en pseudo code de la marche orthogonale.

Algorithm *2D Orthogonal Walk*(q, p)

*// traverses the triangulation T , using the orthogonal walk from q to p ,
 // $t = qrl$ is a triangle of T . wlog, we assume p is above and to the right
 of q .*

```

 $\alpha$  = point( $x_p, y_q$ );
if  $r$  below  $q$  while  $l$  below  $q$  {
     $r = l$ ;  $t = \text{neighbor}(t \text{ through } ql)$ ;  $l = \text{vertex of } t \neq qr$ ;}
else do {
     $l = r$ ;  $t = \text{neighbor}(t \text{ through } qr)$ ;  $r = \text{vertex of } t \neq ql$ ;
} while  $r$  above  $q$ ;
//  $q$  has  $r$  below and  $l$  above.
while (( $r$  and  $l$  at left of  $\alpha$ ) or orientation( $\alpha rl$ ) < 0) {
     $t = \text{neighbor}(t \text{ through } rl)$ ;
     $s = \text{vertex of } t \neq rl$ ;
    if  $s$  above  $q$   $l = s$ ; else  $r = s$ ; }
//  $\alpha$  inside  $t$ 
 $l = \text{vertex of } t \neq rl$ ;
 $r = \text{vertex of } t \neq rl$ ;
//  $p$  has  $r$  at right and  $l$  at left.
while (( $r$  and  $l$  below  $p$ ) or orientation( $p rl$ ) < 0) {
     $t = \text{neighbor}(t \text{ through } rl)$ ;
     $s = \text{vertex of } t \neq rl$ ;
    if  $s$  at left of  $p$   $l = s$ ; else  $r = s$ ;}
//  $t$  contains  $p$ .

```

— Décrire les avantages et inconvénients des deux méthodes.

Avantage: Dans la marche orthogonale on remplace certains tests d'orientation par des comparaisons en x ou y , tests plus robuste et plus rapide.

Inconvénient: Dans la marche orthogonale, dans le cas le pire comme en moyenne on visite plus de triangles.

Une telle méthode ne pourra être intéressante que si l'arithmétique utilisée est très coûteuse.

3 Chemin dans la Triangulation de Delaunay

Étant donné un ensemble \mathcal{S} de n points du plan contenant les points $p = (0,0)$ et $q = (1,0)$. On appelle $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$ la triangulation de Delaunay de \mathcal{S} . On considère $u_0 = p, u_1, u_2, u_3, u_4 \dots u_k = q$ les plus proches voisins successifs dans \mathcal{S} d'un point se déplaçant en ligne droite de p à q .

— Montrer que les abscisses des u_i sont croissantes.

Le bissecteur de u_i et u_{i+1} est coupé par le segment pq , la normale à ce bissecteur est $u_i u_{i+1}$ et q est du même coté que u_{i+1} .

— Montrer que tous les u_i sont à l'intérieur du cercle de diamètre pq .

u_i est le plus proche voisin d'un point v du segment pq , le cercle de centre v passant par u_i est donc vide (il ne contient ni p ni q) et donc son diamètre supporté par pq est plus petit que pq . Donc ce cercle tout entier (et en particulier u_i) est inclus dans le cercle de diamètre pq .

— Montrer que tous les $u_i u_{i+1}$ est une arête de $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$.

Il existe un point v_i sur le segment pq ou le plus proche voisin change passant de u_i à u_{i+1} . Le cercle C_i de centre v_i passant par u_i et u_{i+1} est donc vide, montrant que $u_i u_{i+1}$ est une arête de $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$.

— On regarde le chemin dans Delaunay formé par la suite des u_i , montrer que la longueur de ce chemin peut être aussi proche qu'on veut de $\frac{\pi}{2}$.

Cette borne est presque atteinte en prenant des points u_i régulièrement espacés sur la partie supérieure d'une ellipse presque circulaire de grand axe pq .

— Supposons que tous les u_i soient au dessus de pq , On va montrer que dans ce cas $\frac{\pi}{2}$ est également une borne supérieure sur la longueur du chemin $u_0 = p, u_1, u_2, \dots, u_k = q$.

- le montrer pour $k \leq 2$.

Si $k = 1$ le chemin est réduit au segment pq de longueur 1. Si $k = 2$ le chemin pu_1q est clairement plus court que le demi-cercle de diamètre pq qui a une longueur $\frac{\pi}{2}$.

- On regarde le chemin qui va de u_i à u_{i+1} en suivant un cercle centré sur pq ,

montrer que ce nouveau chemin entre p et q est plus long que le précédent.

Sur chaque partie $u_i u_{i+1}$ on a remplacé un segment par un arc de cercle.

- Montrer que ce chemin est inclus dans le cercle de diamètre pq .

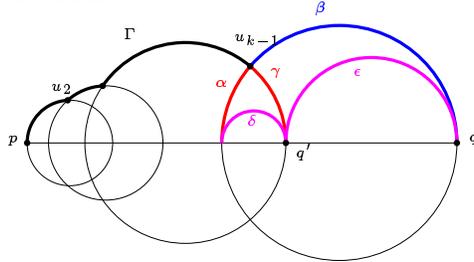
Ce chemin est l'enveloppe supérieure des C_i définis plus haut.

- On introduit q' le point du segment pq obtenu en prolongeant l'arc de cercle de $u_{k-1} u_{k-1}$ jusqu'au segment pq . Montrer que la longueur du chemin formé par k arcs de cercles comme défini ci dessus a une longueur inférieure à $\frac{\pi}{2}$ par récurrence sur k .

Hypothèse de récurrence: La longueur d'une enveloppe supérieure de $k - 1$ demi-cercles centrés sur un segment pq est inférieure à $\frac{\pi}{2}$ fois la longueur du segment pq .

Initialisation: pour $k = 1$ c'est le demi-cercle de diamètre pq de longueur $\frac{\pi}{2}$ fois la longueur du segment pq .

Récurrence:



Le chemin de p à q' est $\Gamma\gamma$.

Le chemin de p à q est $\Gamma\beta$.

D'après l'hypothèse de récurrence $|\Gamma + \gamma| = |\Gamma| + |\gamma| < \frac{\pi}{2}(x_{q'} - x_p)$.

Il est clair que $|\delta| < |\alpha| + |\gamma|$ (convexité), $|\epsilon| = \frac{\pi}{2}(x_q - x_{q'})$ et $|\delta| + |\epsilon| = |\alpha| + |\beta|$.

On a donc $|\beta| = |\delta| + |\epsilon| - |\alpha| < |\gamma| + \frac{\pi}{2}(x_q - x_{q'})$ soit $|\beta| - |\gamma| < \frac{\pi}{2}(x_q - x_{q'})$ ce qui permet de conclure en ajoutant cette inégalité à l'hypothèse de récurrence.