Titre: Théorème de Bézout bi-homogene fort, Optimisation algébrique et algorithmes de la géométrie réelle.

Résumé: Soit une famille de polynômes $(f_1, \ldots, f_s) \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ engendrant un idéal radical et $V \subset \mathbb{C}^n$ la variété algébrique, qui est supposée lisse, associée à cet idéal. On s'intéresse au calcul des points critiques d'une application polynomiale $f \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ restreinte à V dans le cas où le lieu critique est supposé zéro-dimensionnel. Ces points critiques sont caractérisés algébriquement par une chute de rang d'une certaine matrice jacobienne. De cette caractérisation, les points critiques peuvent être définis comme solutions du système algébrique constitué de $f_1, \ldots, f_s$ et de certains mineurs de la jacobienne mentionné précédemment, ou bien comme *projections* de solutions du système de Lagrange. La première des formulations n'est valable que dans le cas où V est équi-dimensionnelle, et on montrera qu'elle ne permet pas d'évaluer finement le nombre de points critiques à calculer, la borne de Bézout classique étant trop pessimiste. La seconde formulation (système de Lagrange) est valable dans les cas non-équi-dimensionnels et sa structure bi-homogène permet de donner des bornes optimales (car atteintes dans le pire des cas) sur le nombre de points critiques (une fois démontré un théorème de Bézout bi-homogène fort).

Nous nous intéressons ensuite à l'application de ce résultat dans le cadre de l'étude des solutions réelles des systèmes algébriques de dimension positive. Dans un premier temps, nous généralisons l'algorithme proposé par Safey (LIP6, UPMC) et Schost (STIX, Ecole polytechnique) à ISSAC'03 au cas non-équi-dimensionnel, en montrant que tous les calculs qui y sont effectués sont des calculs de points critiques et en profitant des propriétés du système de Lagrange. Puis en évaluant la sortie de cet algorithme, nous démontrons de nouvelles bornes pour le nombre de composantes connexes du lieu réel d'une variété algébrique lisse. Nous utiliserons aussi ces résultats pour comparer les sorties dans les pires cas de quelques algorithmes récemment proposés pour le calcul d'au moins un point par composante connexe. Nous terminerons en détaillant quelques perspectives de ce travail.