

Travail commun avec M. Safey el Din, Lip6 Calfor

Théorème de Bézout bi-homogène, Optimisation algébrique et Algorithmes de la Géométrie Réelle

Philippe Trébuchet, INRIA, Spaces/Lip6 Calfor

Équipe CALFOR/INRIA Projet SPACES
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05

10 février 2004

Le problème

On se donne :

- \mathbb{Q} le corps des rationnels, \mathbb{R} celui des réels et \mathbb{C} sa clôture algébrique
- $R = \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ anneau de polynômes.
- (f_1, \dots, f_s, f) une famille de polynômes dans R .
- $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^n$ la variété algébrique de dimension d définie par

$$f_1 = \dots = f_s = 0.$$

On s'intéresse aux points critiques de f restreinte à \mathcal{V} .

Nos motivations

Optimisation globale : Applications en Chimie, électronique, mathématiques financières, etc.
handbook of test problems in local and global optimisation [Floudas, et al.]

Géométrie réelle : Calcul d'un point par composante connexe d'une variété réelle par la méthode des points critiques :

- fonction distance
[Heintz/Roy/Solerno, Aubry/Rouillier/Safey, Bank/Giusti/Heintz/Pardo]
- fonction de projection [Grigoriev/Vorobjov, Heintz/Roy/Solerno, Perderson, Basu/Pollack/Roy],
[Bank/Giusti/Heintz/M'Bakop], [Safey/Schost (2002 & 2003)]

Nos contributions

▶ Contributions fondamentales :

- Bornes sur le nombre de points critiques
- Théorème de Bézout bi-homogène fort

▶ Contribution algorithmique :

- Généralisation de l'algorithme de Safey/Schost aux cas non équi-dimensionnels lisses.

▶ Application en géométrie réelle :

- Nouvelles bornes sur le nombre de composantes connexes d'une variété réelle.

Plan de l'exposé

Partie I : Définition et caractérisations algébriques des points critiques.

- Caractérisation par annulation des mineurs d'une jacobienne.
- Caractérisation par le système de Lagrange.
- Du système de Lagrange à la bi-homogénéité.

Partie II : Théorème de Bézout bi-homogène fort.

- Énoncé et éléments de preuve.
- Bornes sur les points critiques.

Partie III : Applications en géométrie réelle.

- Calcul d'un point par composante connexe
- Bornes sur le nombre de composantes connexes.

Définition et caractérisations algébriques des points critiques

Définition des points critiques

$\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^n$ une variété algébrique

$p \in \mathcal{V}$ un point régulier.

$f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ une application polynomiale.

Le point p est un point critique de f restreinte à \mathcal{V}



$\mathbf{grad}_p(f)$ est orthogonal à tout vecteur de $T_p(\mathcal{V})$.

Conséquences

(f_1, \dots, f_s) une famille dans R .

$\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^n$ définie par :

$$f_1 = \dots = f_s = 0$$

Hypothèse 1 : \mathcal{V} est **lisse**, i.e.

$$\forall p \in \mathcal{V}, \quad \dim_p(\mathcal{V}) = \dim(T_p(\mathcal{V}))$$

Hypothèse 2 : $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ est **radical**

$$\text{Span}(\text{grad}_p(f_1), \dots, \text{grad}_p(f_s)) = T_p(\mathcal{V})^\perp$$

Les points critiques de f restreinte à \mathcal{V} sont caractérisés par :

$$\text{grad}_p(f) \in \text{Span}(\text{grad}_p(f_1), \dots, \text{grad}_p(f_s))$$

Première caractérisation algébrique : Calcul de déterminants

$$\text{grad}_p(f) \in \text{Span}(\text{grad}_p(f_1), \dots, \text{grad}_p(f_s))$$

Hypothèse d'équidimensionnalité :

$$\forall p \in \mathcal{V} : n - \dim(\mathcal{V}) = \dim(\text{Span}(\text{grad}_p(f_1), \dots, \text{grad}_p(f_s)))$$

Annulation de tous les mineurs $(n - d + 1, n - d + 1)$ de la matrice :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial X_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f}{\partial X_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f}{\partial X_n} \end{bmatrix}$$

Première caractérisation algébrique : Propriétés

► Caractérisation valable dans les cas :

- \mathcal{V} lisse.
- \mathcal{V} équi-dimensionnelle.
- \mathcal{V} définie par une famille de générateurs de son idéal associé.

► Famille de polynômes pas générique du tout.

- Déterminants calculés à partir de f_1, \dots, f_s et f .
- En général, le lieu critique est zéro-dimensionnel, mais on calcule $\binom{s}{n-d} \cdot \binom{n}{n-d}$ déterminants.

Deuxième caractérisation algébrique : Le système de Lagrange

$$\text{grad}_p(f) \in \text{Span}(\text{grad}_p(f_1), \dots, \text{grad}_p(f_s))$$

\Leftrightarrow

$$\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \mid \text{grad}_p(f) = \lambda_1 \cdot \text{grad}_p(f_1) + \dots + \lambda_s \cdot \text{grad}_p(f_s)$$

Système de Lagrange dans $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n, \ell_1, \dots, \ell_s]$:

$$\begin{array}{ccccccc} f_1 & = & \dots & = & f_s = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial X_1} & = & \ell_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial X_1} + & \dots + & \ell_s \cdot \frac{\partial f_s}{\partial X_1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial X_n} & = & \ell_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial X_n} + & \dots + & \ell_s \cdot \frac{\partial f_s}{\partial X_n} \end{array}$$

où ℓ_1, \dots, ℓ_s sont les multiplicateurs de Lagrange.

Propriétés du système de Lagrange

- ▶ Caractérisation valable dans les cas :
 - \mathcal{V} lisse.
 - \mathcal{V} définie par une famille de générateurs de son idéal associé.

- ▶ Les points critiques sont définis comme *projections* des solutions du système de Lagrange (élimination de ℓ_1, \dots, ℓ_s).

Bilan et comparaison des deux caractérisations

► Hypothèse d'équi-dimensionnalité requise pour une caractérisation à base de déterminants, mais pas pour le système de Lagrange.

► Borne de Bézout pour le système calculant des déterminants (si $s = n - d$) :

$$D^{n-d} \cdot ((n - d)(D - 1))^d$$

► Borne de Bézout pour le système de Lagrange (si $s = n - d$) :

$$D^{2n-d}$$

Bilan et comparaison des deux caractérisations

n	d	D	Bézout-Det	Bézout-Lag	# Pts crit	Formule
5	1	2	64	512	64	$D^{n-s}(D-1)^s \binom{n-1}{s}$
5	2	2	72	256	48	$D^{n-s}(D-1)^s \binom{n-1}{s}$
5	3	2	32	128	16	$D^{n-s}(D-1)^s \binom{n-1}{s}$
5	4	2	2	64	2	$D^{n-s}(D-1)^s \binom{n-1}{s}$
5	1	3	648	19683	648	$D^{n-s}(D-1)^s \binom{n-1}{d}$
5	2	3	972	6561	648	$D^{n-s}(D-1)^s \binom{n-1}{s}$
5	3	3	576	2187	288	$D^{n-s}(D-1)^s \binom{n-1}{s}$
5	4	3	48	729	48	$D^{n-s}(D-1)^s \binom{n-1}{s}$

Structure bi-homogène du système de Lagrange

Hypothèse non restrictive : f est la projection sur X_1

Homogénéisation : f_1, \dots, f_s dans $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow f_1^h, \dots, f_s^h$ dans $\mathbb{Q}[X_0, X_1, \dots, X_n]$.

Remarque : $\frac{\partial f_i^h}{\partial X_j} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)^h$

$$\begin{array}{lcl}
 1 = & \ell_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial X_1} + \dots + \ell_s \cdot \frac{\partial f_s}{\partial X_1} & \ell_0 = \ell_1 \cdot \frac{\partial f_1^h}{\partial X_1} + \dots + \ell_s \cdot \frac{\partial f_s^h}{\partial X_1} \\
 0 = & \ell_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial X_2} + \dots + \ell_s \cdot \frac{\partial f_s}{\partial X_2} & \rightarrow \quad 0 = \ell_1 \cdot \frac{\partial f_1^h}{\partial X_2} + \dots + \ell_s \cdot \frac{\partial f_s^h}{\partial X_2} \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 = & \ell_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial X_n} + \dots + \ell_s \cdot \frac{\partial f_s}{\partial X_n} & 0 = \ell_1 \cdot \frac{\partial f_1^h}{\partial X_n} + \dots + \ell_s \cdot \frac{\partial f_s^h}{\partial X_n}
 \end{array}$$

$p = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_s)$ solution du système bi-homogénéisé, avec

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \quad (\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{P}^s(\mathbb{C})$$

Structure bi-homogène du système de Lagrange Cas des suites régulières

Si (f_1, \dots, f_s) est **suite régulière** et si le lieu critique de f est **zéro-dimensionnel**, le système de Lagrange est équivalent à :

$$\begin{array}{ccc}
 0 = \ell_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial X_2} + \dots + \ell_s \cdot \frac{\partial f_s}{\partial X_2} & \rightarrow & 0 = \ell_1 \cdot \frac{\partial f_1^h}{\partial X_2} + \dots + \ell_s \cdot \frac{\partial f_s^h}{\partial X_2} \\
 \vdots & & \vdots \\
 0 = \ell_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial X_n} + \dots + \ell_s \cdot \frac{\partial f_s}{\partial X_n} & & 0 = \ell_1 \cdot \frac{\partial f_1^h}{\partial X_n} + \dots + \ell_s \cdot \frac{\partial f_s^h}{\partial X_n}
 \end{array}$$

$p = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \lambda_1, \dots, \lambda_s)$ solution du système bi-homogénéisé, avec

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{P}^{s-1}(\mathbb{C})$$

Théorème de Bézout bi-homogène fort

Théorème de Bézout bi-homogène fort

Estimer le degré du lieu critique est réduit à estimer la somme des *degrés* des composantes primaires admissibles d'un idéal engendré par un système bi-homogène (*degré fort*).

Besoin d'un théorème de Bézout bi-homogène fort.

- ▶ Dans le cas où la variété bi-projective est *zéro-dimensionnelle*, [**Shafarevitch**].
- ▶ Cas de la dimension positive : borne démontrée sur la somme des degrés des composantes de plus grande dimension. [**Heintz, Jeronimo, Sabia, San Martin, Solerno**]

Variétés et bi-homogénéité

Soient $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n, l_1, \dots, l_k]$ des polynômes bi-homogènes engendrant un idéal I .

En examinant la variété dans $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^k$ défini par I on se rend compte des phénomènes suivants :

- Toutes les composantes primaires de I ne sont pas significatives dans le contexte bi-projectif.
- Une même composante primaire de I définit plusieurs composantes bi-projectives de bi-dimension différentes.
- La notion classique de degré n'a plus de sens.

La bi-série de Hilbert

Définition: *Un idéal bi-homogène est un idéal engendré par des polynômes bi-homogènes.*

Définition: *Si I est un idéal bi-homogène, la bi-série de Hilbert de I est la série :*

$$\sum_{i,j} \dim(R_{i,j}/I_{i,j}) t_1^i t_2^j$$

Proposition 1. *Soit I un idéal bi-homogène, de bi-dimension $(0,0)$, alors le terme $\dim(R_{i,j}/I_{i,j})$ devient constant pour i **et** j assez grands*

La bi-dimension

Soit I un idéal bi-homogène.

Définition: Une composante primaire de I est dite admissible si elle ne contient ni une puissance de $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ ni une puissance de $\langle \ell_1, \dots, \ell_k \rangle$.

Définition: Soit I un idéal bi-homogène, une bi-dimension admissible de I est un couple (d, e) d'entier tel que :

$$d + e + 2 = D$$

où D est le maximum des dimensions des composantes primaire admissible de I (ne contenant ni $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ ni $\langle \ell_1, \dots, \ell_k \rangle$).

Le bi-degré

Définition: *Le bi-degré de I est la quantité :*

$$\text{bideg}(I) = \sum_{(d,e) \text{ admissible}} \text{deg}(I, u_{i_1}, \dots, u_{i_d}, v_{j_1}, \dots, v_{j_e}, X - 1, L - 1)$$

Où $u_{i_1}, \dots, u_{i_d}, X$ (resp $v_{j_1}, \dots, v_{j_e}, L$) sont des formes linéaires homogènes en X_1, \dots, X_n (resp en ℓ_1, \dots, ℓ_k).

Remarque 1. *Une même composante primaire a plusieurs bi-dimensions admissibles.*

Théorème de Bézout bi-homogène fort

f_1, \dots, f_s dans $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n, \ell_1, \dots, \ell_k]$ des polynômes bi-homogènes de bi-degrés respectifs $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_s, \beta_s)$.

Pour tout i dans $\{2, \dots, s\}$:

- ▶ $s \leq n + k - 2$
- ▶ soit α_i et β_i sont **non nuls**.
- ▶ soit $\alpha_i = 0$ et la **dimension maximale** des composantes primaires admissibles isolées de $\langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle$ est **plus grande que n** .
- ▶ soit $\beta_i = 0$ et la **dimension maximale** des composantes primaires admissibles de $\langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle$ est **plus grande que k** .

La somme des degrés des composantes primaires admissibles de $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ est bornée par :

$$\mathcal{B}(f_1, \dots, f_s) = \sum_{\mathcal{I}, \mathcal{J}} \left(\prod_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i \right) \left(\prod_{j \in \mathcal{J}} \beta_j \right)$$

où \mathcal{I} et \mathcal{J} sont des ensembles disjoints dont l'union est $\{1, \dots, \min(s, n + k - 2)\}$.

Remarques et explications

- ▶ $\mathcal{B}(f_1, \dots, f_s)$ est la borne de Bézout bi-homogène si les f_i sont génériques et $s = n + k - 2$
- ▶ $\mathcal{B}(f_1, \dots, f_s)$ est la borne de Bézout si $s \leq \min(n - 1, k - 1)$.
- ▶ D'où vient la divergence ?

Lemme : $I \subset R$ un idéal de dimension 3 et $f \in R$ un élément bi-homogène générique de bi-degré (α, β) .

$$\text{bideg}(I + \langle f \rangle) = \alpha \cdot \text{deg}(I + \langle u \rangle + \langle X - 1 \rangle + \langle L - 1 \rangle) + \beta \cdot \text{deg}(I + \langle v \rangle + \langle X - 1 \rangle + \langle L - 1 \rangle)$$

où u et X sont des formes dans $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ et v et L sont des formes dans $\mathbb{Q}[\ell_1, \dots, \ell_k]$.

Plan de la preuve

Preuve inspirée de celle D. Lazard dans le cadre homogène.

- ▶ Définition de **Bi-série de Hilbert**.
- ▶ Preuve dans le cas **zéro-dimensionnel**.
- ▶ Processus d'**intersection avec des formes génériques**, adapté à la bi-homogénéité, pour se ramener au cas zéro-dimensionnel.
- ▶ Preuve dans le cas **suite régulière**.
- ▶ **Montrer que ce cas borne les autres**.

Bornes sur les points critiques

f_1, \dots, f_s des polynômes dans $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ (avec $s \leq n - 1$) de degrés bornés par D engendrant un **idéal radical**.

$\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^n$ définie par $f_1 = \dots = f_s = 0$, supposée **lisse**.

$\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ la projection sur X_1 .

L'ensemble des points critiques de π restreinte à \mathcal{V} est de degré borné par :

$$D^s \cdot (D - 1)^{n-s} \cdot \binom{n}{s}$$

Bornes sur les points critiques (cas suite régulière)

f_1, \dots, f_s des polynômes dans $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ (avec $s \leq n - 1$) de degré bornés par D engendrant un **idéal radical**.

$\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^n$ définie par $f_1 = \dots = f_s = 0$, supposée **lisse**.

$\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ la projection sur X_1 .

L'ensemble des points critiques de π restreinte à \mathcal{V} est de degré borné par :

$$D^s \cdot (D - 1)^{n-s} \cdot \binom{n-1}{s}$$

Fonction Distance et Fonction de projection

Extension des résultats précédents au cas de la fonction distance.

► Cas suite régulière :

Distance	Projection
$D^s (D - 1)^{n-s} \binom{n}{s}$	$D^s (D - 1)^{n-s} \binom{n-1}{s}$

► Cas général :

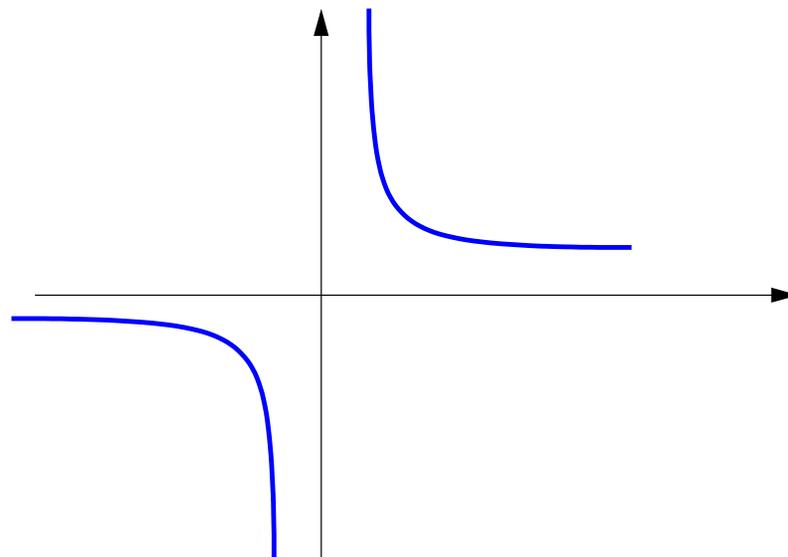
Distance	Projection
$D^s (D - 1)^{n-s} \binom{n}{s}$	$D^s (D - 1)^{n-s} \binom{n}{s}$

Applications en géométrie réelle

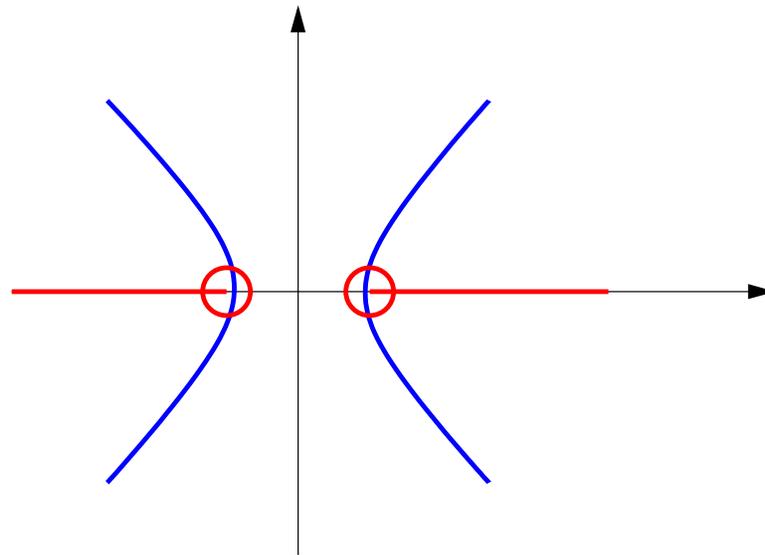
Applications en géométrie réelle

- ▶ [Safey/Schost 2003] : Calculs des points critiques de fonctions de projection.
- Cela améliore-t-il les bornes sur le nombre de composantes connexes d'une variété algébrique réelle ?

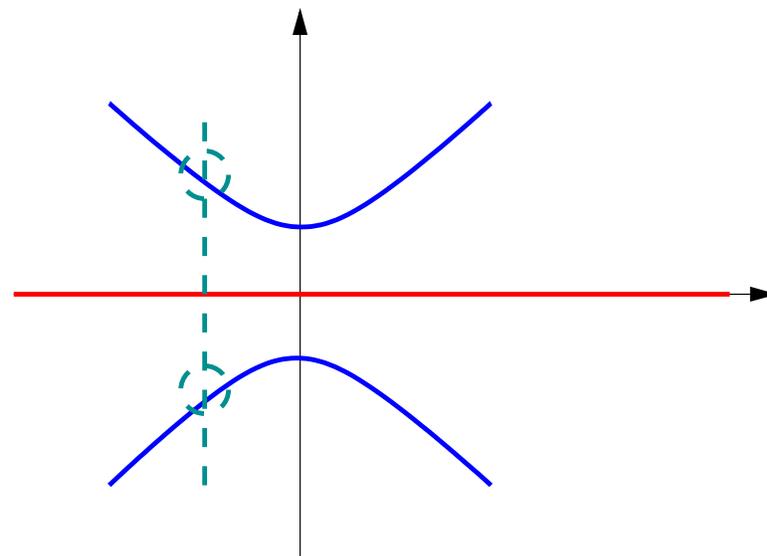
Rappels sur l'algorithme de Safey et Schost : Dessin



Rappels sur l'algorithme de Safey et Schost : Dessin



Rappels sur l'algorithme de Safey et Schost : Dessin



Rappels sur l'algorithme de Safey et Schost : Notations

f_1, \dots, f_s dans $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ engendrant un idéal **radical et équi-dimensionnel**.

$\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^n$ définie par $f_1 = \dots = f_s = 0$ de **dimension d** et **lisse**.

$$\mathbf{A} \in GL_n(\mathbb{Q}), f_1, \dots, f_s \rightarrow f_1^{\mathbf{A}}, \dots, f_s^{\mathbf{A}}$$

$$\mathcal{V}^{\mathbf{A}} \text{ définie par } f_1^{\mathbf{A}} = \dots = f_s^{\mathbf{A}} = 0$$

Pour i dans $\{d, \dots, 1\}$:

$$\begin{array}{ccc} \pi_i : & \mathbb{C}^n & \rightarrow & \mathbb{C}^i \\ & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & (x_1, \dots, x_i) \end{array}$$

$W_{n-(i-1)}$: lieu critique de π_i restreinte à \mathcal{V} .

$W_{n-(i-1)}^{\mathbf{A}}$: lieu critique de π_i restreinte à $\mathcal{V}^{\mathbf{A}}$.

Algorithme de Safey/Schost : le Résultat

Théorème :

Soit $p_d = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Q}^d$ un point choisi arbitrairement, $p_i = (x_1, \dots, x_i)$.

Pour un choix **générique** de \mathbf{A} , l'ensemble des points réels de :

$$\left(\pi_i^{-1}(p_i) \cap W_{n-i}^{\mathbf{A}}, \quad i = 1, \dots, d \right), W_n^{\mathbf{A}}$$

intersecte chaque composante connexe de $\mathcal{V} \cap \mathbb{R}^n$.

Borner la sortie de l'algorithme Constats et problèmes

Problème : Dans la formulation précédente, l'algorithme de Safey/Schost calcule des **fibres** de lieux critiques non-zéro-dimensionnels.

Les résultats précédents ne sont pas directement applicables

Rappel : le système de Lagrange permet de calculer les points critiques sans recourir aux algorithmes de décomposition d'idéaux en composantes équi-dimensionnels.

Généralisation aux cas non équi-dimensionnels

Exprimer pour i dans $\{1, \dots, d\}$ $\pi_i^{-1}(p_i) \cap W_{n-i}$ sous la forme de points critiques d'une application polynomiale de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C} .

$$\begin{array}{lcl} \Pi_i : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow \mathbb{C} \\ & (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto x_i \end{array}$$

Théorème : Pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, $\pi_i^{-1}(p_i) \cap W_{n-i}$ est l'ensemble des points critiques de Π_{i+1} restreinte à $\mathcal{V} \cap \pi_i^{-1}(p_i)$.

Algorithme

Entrée : f_1, \dots, f_s dans $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ engendrant un idéal **radical** et définissant $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^n$ **lisse**, de dimension d .

Sortie : au moins un point par composante connexe de $\mathcal{V} \cap \mathbb{R}^n$.

- ▶ Choisir $\mathbf{A} \in GL_n(\mathbb{Q})$ générique et $p = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Q}^d$ arbitraire.
- ▶ Pour chaque $i \in \{1, \dots, d-1\}$, éliminer les multiplicateurs de Lagrange dans les systèmes :

$$\begin{aligned} f_1^{\mathbf{A}} &= \dots = f_s^{\mathbf{A}} = 0 \\ \sum_{j=1}^s \ell_j \text{grad}(f_j^{\mathbf{A}}) &= \text{grad}(X_{i+1}) \\ X_1 &= x_1, \dots, X_i = x_i \end{aligned}$$

ainsi que dans le système de Lagrange caractérisant les points critiques de Π_1 restreinte à $\mathcal{V}^{\mathbf{A}}$.

- ▶ Résoudre les systèmes zéro-dimensionnels ainsi obtenus ainsi que le système :

$$\begin{aligned} f_1^{\mathbf{A}} &= \dots = f_s^{\mathbf{A}} = 0 \\ X_1 &= x_1, \dots, X_d = x_d \end{aligned}$$

Borner la sortie de l'algorithme

Borner la somme des degrés retournés par le précédent algorithme permet de borner le nombre de composantes connexes.

► Borne obtenue :

$$\sum_{i=0}^d D^s (D-1)^{n-s-i} \binom{n-i}{s}$$

► Meilleure borne précédente [Coste, Benedetti/Risler, Basu] :

$$D(2D-1)^{n-1}$$

► Pas de preuve mais une vérification expérimentale :

Notre borne est la plus basse pour

$$D \in \{2, \dots, 20\}, \quad \text{et} \quad n \in \{2, \dots, 100\}$$

Borner la sortie de l'algorithme : Cas suite régulière

$$D^{n-d} \sum_{i=0}^d (D-1)^{d-i} \binom{n-1-i}{d-i} \leq D \cdot (2D-1)^{n-1}$$

Conclusion : Perspectives et questions ouvertes

Perspectives : Formes normales généralisées [T.]

- ▶ Caractériser dans des cadres génériques des bases monomiales de l'algèbre quotient.
- ▶ Fonctions de choix adaptées à la bi-homogénéité (tenant compte de la bi-graduation).
- ▶ Structure particulière des matrices apparaissant dans MacRev à exploiter ?

Perspectives : Kronecker et la bi-homogénéité

Algorithme incrémental : complexité polynômiale en δ
degré des variétés algébriques intermédiaires

Codage des variétés intermédiaires sous la forme fibres génériques.

- ▶ Changement de variables linéaire générique [Mise en position de Noëther].
- ▶ Destruction de la bi-homogénéité du (nouveau) système considéré.
 - Modification de Kronecker pour qu'il ait une bonne complexité dans un cadre bi-homogène ?
 - Les multiplicateurs de Lagrange apparaissent avec un degré 1.

Perspectives plus générales

- ▶ Généralisation de Théorème de Bézout bi-homogène fort au cas *multi-homogène*. [Safey, T.]
- ▶ Extension des bornes obtenues sur le nombre de composantes connexes aux cas non lisses (déformations infinitésimales). [Safey, T.]
- ▶ Application des résultats et méthodes partout où les idéaux déterminantiels apparaissent.