Journées GECKO

Solutions formelles locales en un point singulier d'une classe de systèmes d'EDP linéaires d'ordre 1

Nicolas Le Roux
projet ALGO, INRIA.

Problématique de l'exposé

Comment calculer les solutions locales formelles en $(0,0)$ d'un système d'EDP linéaires de la forme suivante?

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial Y}{\partial x} & = & \begin{bmatrix} \frac{x^3+y}{x^4} & \frac{y^2}{x^4} \\ \frac{-1}{x^4} & \frac{-y+x^3}{x^4} \end{bmatrix} Y \qquad (1) \\ \\ \dfrac{\partial Y}{\partial y} & = & \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & 1 \\ \frac{-2}{y^2} & \frac{-3}{y} \end{bmatrix} Y \qquad (2) \end{array} \right.$$

Propriété de commutation : dériver (1) / y = dériver (2) / x

on dit que (S) est complètement intégrable.

Démarche pour y parvenir

1. réduction de rang du système ;
   $\longrightarrow$ [Barkatou & LR, ISSAC 2006] algorithme à la Levelt :
   retourne un système équivalent à (S) de rang minimal ;
   le rang minimal $\stackrel{\text{déf}}{=}$ rang de Poincaré de (S) ;
   le rang de (S) est $(3,1)$; son rang de Poincaré est $(0,0)$.

2. cas d'un système de rang $(0,0)$;
   $\longrightarrow$ théorème de Gérard et Levelt :
   un système de rang $(0,0)$ est équivalent à

$$(\text{reg}) \quad \begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{M}{x} Z \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{N}{y} Z \end{cases} \qquad \text{avec } M, N \text{ constantes et } [M,N] = 0.$$

[LR 2006] Construction de la transformation et du système (reg).

1. Réduction de rang de (S)

$$Y = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} W \text{ conduit à } \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{x^3+y}{x^4} & \frac{y}{x^4} \\ \frac{-y}{x^4} & \frac{-y+x^3}{x^4} \end{bmatrix} W \\ \\ \dfrac{\partial W}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{y} \\ \frac{-2}{y} & \frac{-3}{y} \end{bmatrix} W \end{cases}$$

$$\text{Ensuite } W = \begin{bmatrix} x^4 & -x \\ 0 & x \end{bmatrix} Z \text{ donne } \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{x} & 0 \\ \frac{y}{x} & 0 \end{bmatrix} Z \\ \\ \dfrac{\partial Z}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{y} & 0 \\ \frac{x^3}{y} & \frac{-2}{y} \end{bmatrix} Z \end{cases}$$

2. cas d'un système de rang $(0,0)$

système complètement intégrable de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial Y}{\partial x} & = & \frac{A(x,y)}{x} Y \\ \frac{\partial Y}{\partial y} & = & \frac{B(x,y)}{y} Y \end{array}\right.$$

- [Deligne 1970, Gérard & Levelt 1976, Takano & Yoshida 1976]
  il existe une matrice fondamentale de solutions en $(0,0)$
  $T(x,y)x^{\alpha}y^{\beta}x^{M}y^{N}$,
  $T(x,y)$ unimodulaire , α, β matrices diagonales d'entiers ≥ 0;

- [LR 2006] le nombre de termes de A et B dont dépendent M et N se lit sur $A_{0,0}$ et $B_{0,0}$.

Approche de Gérard et Levelt

Idée de base : $\frac{dY}{dx} = \frac{A}{x} Y$, avec A constant
$x^A \overset{not.}{=} \exp(A \log(x))$ est solution.

Comment calculer x^A ? On décompose A : $A = D + N$ avec
D diagonalisable, N nilpotent et $[D, N] = 0$.
D'où $x^A = \exp(D \log(x)) \exp(N \log(x))$.

Opérateur diff. associé :
$\Delta := x\frac{d}{dx} - A = \left(x\frac{d}{dx} - D\right) + (-N)\,, \quad \left[\left(x\frac{d}{dx} - D\right), -N\right] = 0.$

$\longrightarrow$ Décomposition de Δ :
- partie semi-simple : $\left(x\frac{d}{dx} - D\right)$;
- partie nilpotente : $-N$.

Cas où $A = (A_0 + A_1 x + \cdots)$

$\Delta : \mathbb{C}[[x]]^m \to \mathbb{C}[[x]]^m \; ; \; Y \mapsto x\frac{dY}{dx} - A(x)Y$.
Δ est $\mathbb{C}$-linéaire ; mais dim. infinie!

On se ramène à la dim. finie :
$Y \in \mathbb{C}[[x]]^m \Leftrightarrow \left(Y \mod x^k\right)_{k\geq 1}$. $\quad \begin{array}{rcl} f_k : (\mathbb{C}[x]_{<k})^m & \to & (\mathbb{C}[x]_{<k})^m \\ Y \mod x^k & \mapsto & \Delta(Y) \mod x^k \end{array}$

$f_k = s_k + n_k$ où $\quad s_k =$ partie semi-simple ;
$\quad n_k =$ partie nilpotente de f_k.

${}^s\Delta(Y) \overset{\text{déf}}{=}$ unique série formelle définie par $\left(s_k(Y \mod x^k)\right)_{k\geq 1}$.
${}^n\Delta(Y)$ définie de la même façon.

Cas où ... suite

Propriétés.

- on a $\Delta = {}^s\Delta + {}^n\Delta$ avec $[{}^s\Delta, {}^n\Delta] = 0$;
- ${}^s\Delta$ est un opérateur différentiel : ${}^s\Delta(a(x)Y) = x\frac{da(x)}{dx}Y + a(x){}^s\Delta(Y)$;
et de plus semi-simple ;
- ${}^n\Delta$ est $\mathbb{C}[[x]]$-linéaire et nilpotent ;
- une telle écriture est unique.

Construction identique pour le système de rang $(0,0)$ équivalent à (S) :

- Δ_1 opérateur diff. associé au système en $\frac{\partial}{\partial x}$: $\Delta_1 = {}^s\Delta_1 + {}^n\Delta_1$;
- Δ_2 opérateur diff. associé au système en $\frac{\partial}{\partial y}$: $\Delta_2 = {}^s\Delta_2 + {}^n\Delta_2$.

complète intégrabilité $\Leftrightarrow [\Delta_1, \Delta_2] = 0$.

matrice fondamentale de solutions de $\frac{dY}{dx} = \frac{A(x)}{x} Y$

matrice fondamentale de solutions de la forme $P(x)x^{\beta}x^{B}$,

- P matrice $m \times m$ unimodulaire constituée
  de vecteurs propres de ${}^{s}\Delta$ (ceci peut être assoupli);
- β matrice diagonale d'entiers égaux
  aux différence entières de valeurs propres de A_0 ;
- B matrice $m \times m$ à coeff $\mathbb{C}$.

remarque. $Y = P\,W$ donne $x\frac{dW}{dx} = C\,W$ avec C polynomiale
$W = x^{\beta} Z$ donne $x\frac{dZ}{dx} = B\,Z$.

Exemple

Calculer en utilisant l'approche de Gérard et Levelt
les solutions locales en $x = 0$ du système différentiel $x\frac{dY}{dx} = AY$.

$$A := \begin{bmatrix} (1+x)^{-1} & \left(1-x^2\right)^{-1} & 0 \\ \frac{1+x}{1+x^2} & 0 & 1+x^3 \\ 0 & 1 & \left(1-x^3\right)^{-1} \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\chi(A_0) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$, plus grande différence entière : 3.

On doit donc calculer $P \mod x^{3+1}$.

Calcul de $P \mod x^4$

$J :=$ matrice de l'application $Y \mod x^4 \mapsto (x\frac{d}{dx} - A)(Y) \mod x^4$
dans la base “canonique” :

$$\left((1,0,0)\,,\,(0,1,0)\,,\,(0,0,1)\,,\,(x,0,0)\,,\,\cdots\,,\,(0,0,x^3)\right).$$

- Déterminer S la partie semi-simple de J ;
- Calculer une base “convenable” d'un supplémentaire (invariant par S) du s.e.v engendré par les 9 derniers élts de la base canonique ;
- Réécrire la base “convenable” dans la base canonique de $\mathbb{C}[[x]]^3$.
  On trouve $P \mod x^4$.

Calcul de la partie semi-simple d'une matrice

L'idée présentée est due à A. Levelt.
La partie semi-simple S est un polynôme en J : $S = g(J)$.

$\tilde{\chi} =$ partie sans facteur du polynôme caractéristique de J ;
$d \in \mathbb{N}$ t.q. $\tilde{\chi}^d(J) = 0$. On détermine $g \in \mathbb{C}[\lambda]$ qui vérifie

$$g(\lambda) = \lambda \mod \tilde{\chi} \text{ et } \tilde{\chi}(g(\lambda)) = 0 \mod \tilde{\chi}^d.$$

g se calcule par Newton.

$g(J)$ est égal à S.

$$J = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{13}{12} & -5/6 & -1/12 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/12 & -1/6 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{145}{144} & -\frac{23}{144} & \frac{13}{144} & -\frac{13}{12} & -5/6 & -1/12 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ \frac{37}{36} & -1/18 & -\frac{35}{36} & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ \frac{19}{144} & -\frac{17}{144} & -\frac{137}{144} & 1/12 & -1/6 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcul d'une base convenable

Par un argument d'algèbre linéaire, les vecteurs suivants conviennent.

v_1 ; $Sv_1 = -2v_1$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -120/7 \\ -120/7 \\ -120/7 \\ 45/7 \\ -30/7 \\ -15/7 \\ -88/7 \\ 3 \\ 1 \\ 1195/168 \\ -143/42 \\ -863/168 \end{bmatrix}$$

v_2 ; $Sv_2 = -v_2$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \\ -5/2 \\ 5/2 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

v_3 ; $Sv_3 = v_3$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \\ -5/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obtention de la matrice $\tilde{P} = P \mod x^4$

En réécrivant v_1, v_2, v_3 dans la base $(1, x, x^2, x^3)$, on trouve

$$\tilde{P} = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{120}{7} + \frac{45}{7}\,x - \frac{88}{7}\,x^2 + \frac{1195}{168}\,x^3 & 5/2 + 5/2\,x + x^3 & 2 - 3\,x^2 \\ -\frac{120}{7} - \frac{30}{7}\,x + 3\,x^2 - \frac{143}{42}\,x^3 & 5\,x - 2\,x^3 & -4 + 2\,x + x^2 - 5/3\,x^3 \\ -\frac{120}{7} - \frac{15}{7}\,x + x^2 - \frac{863}{168}\,x^3 & -5/2 + 5\,x - 3/2\,x^3 & 2 - 2\,x + 6\,x^2 \end{array}\right]$$

Calcul de la monodromie

On connaît $P \mod x^4$ et $\beta = (1-(-2), 1-(-1), 1-1) = (3,2,0)$.
Pour calculer B dans $Px^\beta x^B$.

- appliquer le changement de var. $Y = \tilde{P}\tilde{W}$.

  On trouve un système $x\frac{d\tilde{W}}{dx} = \tilde{C}\tilde{W}$.
  Par construction $\tilde{C} \mod x^4 = C$.

- appliquer $\tilde{W} =$ diag$(x^3, x^2, 1)\tilde{Z}$.

  On trouve un système $x\frac{d\tilde{Z}}{dx} = \tilde{B}\tilde{Z}$.
  On a $B = \tilde{B} \mod x$.

Calcul de la monodromie

- $Y = \tilde{T}\tilde{W}$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} (2 + O(x^4)) & (0 + O(x^4)) & (-\frac{49}{360}x^3 + O(x^4)) \\ (0 + O(x^4)) & (1 + O(x^4)) & (-\frac{2}{5}x^2 + O(x^4)) \\ (0 + O(x^4)) & (0 + O(x^4)) & (-1 + O(x^4)) \end{bmatrix}$$

- $\tilde{W} = x^{\beta}\tilde{Z}$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} (-1 + O(x^4)) & (0 + O(x^3)) & (-\frac{49}{360} + O(x)) \\ (0 + O(x^5)) & (-1 + O(x^4)) & (-\frac{2}{5} + O(x^2)) \\ (0 + O(x^7)) & (0 + O(x^6)) & (-1 + O(x^4)) \end{bmatrix}$$

calcul de $P \mod x^\ell,\ \ell \geq 4$

P est l'unique solution de $\begin{array}{c} x\frac{dQ}{dx} = A\,Q - Q\,C \\ Q \equiv \tilde{P} \mod x^4. \end{array}$

Les coefficients P_μ de P vérifient donc

$$P_\mu\,(C_0 + \mu) - A_0 P_\mu = \sum_{i=0}^{\mu-1} A_{\mu-i} P_i - P_i C_{\mu-i}.$$

P_0, P_1, P_2, P_3 calculés précédemment. Pour $\mu \geq 4$, l'application linéaire

$M \mapsto M\,(C_0 + \mu) - A_0 M$ est inversible.

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{120}{7} & 5/2 & 2 \\ -\frac{120}{7} & 0 & -4 \\ -\frac{120}{7} & -5/2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{45}{7} & 5/2 & 0 \\ -\frac{30}{7} & 5 & 2 \\ -\frac{15}{7} & 5 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -\frac{88}{7} & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} x^2 +$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1195}{168} & 1 & 0 \\ -\frac{143}{42} & -2 & -5/3 \\ -\frac{863}{168} & -3/2 & 0 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} -\frac{5939}{490} & \frac{5}{36} & -\frac{157}{96} \\ -\frac{3767}{1176} & \frac{14}{9} & -\frac{7}{48} \\ -\frac{6287}{5880} & \frac{59}{36} & -\frac{39}{32} \end{bmatrix} x^4 + \begin{bmatrix} \frac{312121}{40320} & \frac{199}{210} & \frac{2281}{1350} \\ -\frac{58297}{47040} & \frac{221}{252} & \frac{2729}{800} \\ -\frac{11257}{282240} & \frac{221}{1260} & \frac{64421}{21600} \end{bmatrix} x^5 +$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{12693433}{1111320} & -\frac{883}{8640} & -\frac{6077}{3456} \\ \frac{1295351}{2540160} & -\frac{3629}{10080} & -\frac{25333}{43200} \\ -\frac{55298809}{17781120} & -\frac{43949}{60480} & \frac{29591}{86400} \end{bmatrix} x^6 + \begin{bmatrix} \frac{1307398759}{158054400} & \frac{189079}{238140} & \frac{241313}{165375} \\ \frac{100464281}{177811200} & -\frac{125213}{544320} & -\frac{5340317}{4233600} \\ -\frac{470678599}{1422489600} & \frac{3488467}{3810240} & -\frac{6428773}{7056000} \end{bmatrix} x^7 + O(x^8).$$

Conclusion

- calcul des solutions locales d'un système singulier-régulier :
  réduction de rang + approche de Gérard et Levelt effective ;

- cas des systèmes singuliers-irréguliers : nombre de termes nécessaire au calcul des parties exponentielles?

- les résultats théoriques exposés valables en dimension supérieure :
  l'algorithme à la Levelt n'est plus valable, l'approche de Gérard-Levelt si.
  Comment calculer les solutions locales dans ce contexte?