

计算机辅助几何设计中 极小曲面造型的研究进展*

徐 岗 汪 国 昭

(浙江大学数学系计算机图形图像研究所, 浙江 310027)

摘要 极小曲面在工程领域有着广泛应用, 因此将其引入计算机辅助几何设计领域具有重要意义. 详细概述了近年来计算机辅助几何设计中极小曲面造型的研究工作, 按照造型方法的不同, 可将现有工作分为精确造型方法和逼近造型方法两类. 精确造型方法主要包括两个部分: 某些特殊极小曲面的控制网格表示与构造; 等温参数多项式极小曲面的挖掘与性质. 逼近造型方法主要包括 3 个部分: 基于数值计算的逼近方法; 基于线性偏微分方程的逼近方法; 基于能量函数最优化的逼近方法. 最后对这些方法进行了分析比较, 并讨论了极小曲面造型中有待进一步解决的问题.

关键词 计算机辅助几何设计, 极小曲面, 调和曲面, 等温参数曲面, 膜结构.

MR(2000) 主题分类号 65D17

1 引言

极小曲面问题, 即研究由给定的空间闭曲线张成的曲面面积极小问题, 是微分几何领域中一个古老而活跃的分支^[1,2]. 这个问题最早由 Lagrange 开始研究, 他利用变分计算方法, 将面积泛函变分问题转换为一个偏微分方程, 即 Euler-Lagrange 方程, 并进一步导出了一个拟线性二阶椭圆偏微分方程, 即极小曲面方程. 早期的数学家致力于寻找极小曲面方程闭形式的解. 19 世纪早期, Scherk 给出了一类极小曲面—Scherk 曲面, 悬链面和正螺面是它的特例. Enneper A 给出了第一个参数多项式极小曲面—Enneper 曲面. 19 世纪 20-30 年代, 比利时物理学家 Plateau 发现极小曲面问题在物理上可以解释为肥皂泡现象, 并做了大量的实验. 由于 Plateau 在极小曲面方面的贡献^[3], 人们开始将注意力转移到所谓的 Plateau 问题上来, 即给定一条闭的可求长的空间 Jordan 曲线, 寻找以这条空间曲线为边界的具有极小面积的曲面.

平均曲率处处为零是极小曲面的重要几何特征. 因此, 除有限点外, 极小曲面的高斯曲率恒为负. 正是由于这些独特的几何特征, 极小曲面具备很多优良的性质, 如对称性, 包含直线等等. 极小曲面的形状优美光滑, 结构稳定, 在建筑设计、飞机轮船制造、分子化学、

* 国家 973 重点基础研究发展规划基金 (2004CB318000) 和国家自然科学基金 (60773179, 60473130, 10371110) 资助课题.

收稿日期: 2007-12-28.

晶体学等各个领域都有很重要的应用. 例如, 在现今非常流行的建筑结构-膜结构中, 极小曲面便是其最理想的初始形状; 用极小曲面作房顶曲面, 结构很稳定, 美观大方, 特别是有不积水的特点; 另外, 人们发现, 某些纳米分子结构和晶体分子结构的形状与一些特殊极小曲面的形状非常类似^[4], 这对于分析它们的物理和几何性质具有重要价值. 正是基于以上原因, 将极小曲面引入计算机辅助几何设计 (CAGD) 领域, 即从 CAGD 的观点来研究极小曲面, 对于实际工程应用具有积极的意义.

自从金文标和汪国昭首次将极小曲面引入 CAGD 领域以来^[5,6], 已有不少文献对极小曲面造型问题进行了研究. 按照造型方法的不同, 可将相关工作分为两大类, 即精确造型方法和逼近造型方法. 本文将从这两个方面对极小曲面造型的研究进展进行综述, 并进行相关比较. 限于篇幅, 本文只对主要工作和结果做概述介绍, 详细的数学推导和理论证明不再赘述, 有兴趣的读者可参考相关文献.

本文余下的部分主要由 3 部分内容组成. 第 2 节介绍极小曲面精确造型方面的工作. 第 3 节介绍极小曲面逼近造型方面的工作. 第 4 节对现有造型方法进行了分析比较, 并对未来工作进行了展望.

2 极小曲面的精确造型方法

所谓精确造型方法, 是指将精确极小曲面应用到计算机辅助造型系统中的处理方法. 目前, CAGD 中极小曲面的精确造型方法主要有两大方面的内容: 一是某些特殊极小曲面的控制网格表示与构造, 二是等温参数多项式极小曲面的挖掘与性质.

2.1 特殊极小曲面的控制网格表示与构造

在 CAGD/CAD 曲面造型系统中, 控制网格对交互设计起着非常重要的作用. 但对于绝大多数的极小曲面, 我们都无法用 NURBS 曲面精确表示. 因此, 如何给出极小曲面的控制网格表示, 是一个非常有意义的课题.

正螺面和悬链面是两类著名的、极其重要的极小曲面, 它们在工程中有许多重要应用. 文献 [7] 以 C-Bézier 曲面和 H-Bézier 曲面作为造型工具, 为简化计算, 在两个参数方向分别使用了两组不同的基函数, 巧妙地给出了正螺面和悬链面的控制网格表示; 最后, 通过对控制多边形网格的几何关系的分析, 给出了定义这两类曲面的控制网格的几何构造规则.

广义螺旋面是由 Scherk 提出的一类重要的极小曲面, 其参数表达式为 $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, 其中

$$\begin{aligned}x(u, v) &= a \sinh u \cos v - b \cosh u \sin v, \\y(u, v) &= a \sinh u \sin v + b \cosh u \cos v, \\z(u, v) &= av + bu,\end{aligned}$$

其中 a 和 b 为任意实数. 当 $a = 0$ 时, 它退化为悬链面; 当 $b = 0$ 时, 它退化为正螺面. 为了给出该类极小曲面的控制网格表示, 文献 [8] 首先构造了空间 $\{\sin t, \cos t, \sinh t, \cosh t, 1, t\}$ 中的拟 Bézier 基, 然后巧妙地给出了拟 Bézier 基与 $\{\sin t, \cos t, \sinh t, \cosh t, 1, t\}$ 的转换矩阵, 进而得到了广义螺旋面的控制网格表示. 由于该类极小曲面可以看作由正螺面和悬链面加权平均得到, 因此, 只要先分别构造出正螺面和悬链面的控制顶点, 则它们相对应控制顶点的中点便是广义螺旋面的控制顶点. 这样便得到了广义螺旋面的几何构造方法. 文献 [9] 还实现了由正螺面到悬链面的动态变形, 并且中间的过渡曲面都是极小曲面.

由微分几何知识可知, 悬链面和 Enneper 曲面上的等参数线便是其曲率线, 并且其曲率线均为平面曲线. Bonnet 在 1855 年发现了一类曲率线为平面曲线的非平面极小曲面, 称之为平面曲率线极小曲面, 悬链面和 Enneper 曲面是其特例. 它的参数形式为

$$\left\{ \frac{\rho u \pm \sin u \cosh v}{\sqrt{1-\rho^2}}, \frac{v \pm \rho \cos u \sinh v}{\sqrt{1-\rho^2}}, \pm \cos u \cosh v \right\}.$$

文献 [10] 分别在 u 参数方向采用 C-Bézier(C-B 样条) 基函数, v 参数方向采用 H-Bézier(H-B 样条) 基函数, 给出了该类极小曲面的拟 Bézier(拟 B 样条) 控制网格表示, 并且实现了由悬链面到 Enneper 曲面的动态变形, 而且中间的过渡曲面都是极小曲面.

上述工作给出了几类特殊极小曲面的控制网格表示与几何构造方法, 从而可以利用细分算法生成极小曲面, 并在 CAGD 造型系统中与其他的曲面统一处理.

2.2 等温参数多项式极小曲面的挖掘与性质

当今 CAGD 系统中曲线曲面常以多项式参数形式表示. 因此, 挖掘参数多项式极小曲面对极小曲面在 CAGD 系统中的应用具有重要意义. 但在微分几何理论中, 多项式参数极小曲面非常少见. 由经典的微分几何知识可知, 除平面外, 不存在其他类型的二次参数多项式极小曲面. 文献 [5] 首次将极小曲面引入 CAGD 领域, 利用包络方法生成了三次参数多项式极小曲面—Enneper 曲面, 并将其表示为三角域上的 B-B 曲面形式. 文献 [11, 12] 利用不同的方法证明了 Enneper 曲面是唯一的一类三次参数多项式极小曲面. 因此, 寻找高次参数多项式极小曲面, 便成为亟需解决的问题.

若曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ 的第一基本形式满足 $E = G, F = 0$, 其中 $E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle, F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle, G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle$, 则称 $\mathbf{r}(u, v)$ 为等温参数曲面. 文献 [11] 基于微分几何中的一个经典结论, 即等温参数曲面为极小曲面的充要条件是该曲面为调和曲面, 给出了 4 次参数多项式曲面为极小曲面的一个充分条件. 由此充分条件, 作者发现了两类新的 4 次参数多项式极小曲面. 这两类极小曲面不仅具有两个形状参数, 增加了造型的自由度, 而且具有对称性等优美性质.

文献 [13] 基于同样的思想研究了 5 次等温参数多项式极小曲面. 首先给出了 5 次参数多项式为极小曲面的充分条件, 然后给出了三类带有 4 个或 8 个形状参数的 5 次等温参数多项式极小曲面, 并深入研究了它们的性质. 下面是其中一类极小曲面的例子,

$$\mathbf{r}(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)),$$

where

$$X(u, v) = a_1(u^5 - 10u^3v^2 + 5uv^4) - a_2(v^5 - 10v^3u^2 + 5vu^4) + e_1u(u^2 - 3v^2) - e_2v(v^2 - 3u^2),$$

$$Y(u, v) = a_2(u^5 - 10u^3v^2 + 5uv^4) + a_1(v^5 - 10v^3u^2 + 5vu^4) + e_2u(u^2 - 3v^2) + e_1v(v^2 - 3u^2),$$

$$Z(u, v) = \frac{\sqrt{30}}{4} \sqrt{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(e_1^2 + e_2^2) - (a_1e_1 + a_2e_2)(u^4 - 6u^2v^2 + v^4)}} \\ - \sqrt{30} \sqrt{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(e_1^2 + e_2^2) + (a_1e_1 + a_2e_2)uv(u^2 - v^2)}}.$$

作者还发现, 这些极小曲面关于 X 平面或 Y 平面对称; 它们包含两条相互正交的直线, 而且一般为自交曲面, 自交点全部位于对称平面上, 除此之外, 不包括其他自交点. 见图 1.

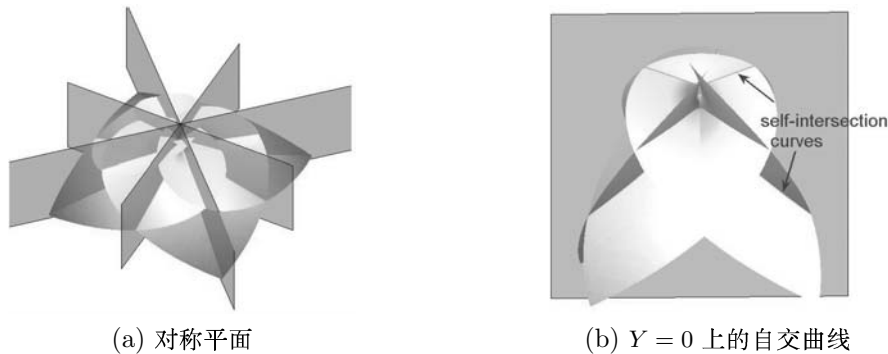


图 1 对称平面及自交直线, $u, v \in [-4, 4]$

众所周知, 正螺面和悬链面是一对共轭极小曲面. 文献 [13] 中通过设定某些形状参数, 得到了一对新的共轭极小曲面. 并由此得到一族新的极小曲面, 该族极小曲面具有相同的第一基本形式. 文中还实现了这对共轭极小曲面之间的动态变形, 并且中间的过渡曲面均为极小曲面.

文献 [14] 对 6 次等温参数多项式极小曲面进行了研究, 得到了与 5 次情况相类似的结果.

上述工作所给出的几类新的参数多项式极小曲面, 均可表示为张量积 Bézier 曲面和三角域上的 B-B 曲面的形式, 可被直接集成到 CAD 系统中.

3 极小曲面的逼近造型方法

由于极小曲面问题是一个高度非线性的优化问题, 它的精确解析解很难直接得到. 因此, 在 CAGD 领域中, 学者们开始研究得到极小曲面逼近解的方法. 目前极小曲面的逼近造型方法大体可以分为三类: 基于数值计算的逼近方法; 基于线性偏微分方程的逼近方法; 基于能量函数最优化的逼近方法. 下面我们将一一进行介绍.

3.1 基于数值计算的逼近方法

极小曲面问题本质上可以看作一个非线性约束优化问题, 因此, 可以采用数值计算中求最值的方法来求解此问题. 文献 [15] 讨论极小曲面方程的求解. 极小曲面方程是一个高度非线性的二阶椭圆偏微分方程, 求解十分困难. 该文基于有限元方法, 使用一个简单而有效的线性化策略, 将问题转化为一系列线性问题, 从而大大简化了求解过程. 数值结果表明该方法简单有效, 能产生合理的结果. 文献 [16] 利用数值方法对矩形域上以给定的 Bézier 曲线或者 B 样条曲线为边界的函数极小曲面问题进行了研究. 对于极小曲面的近似 Bézier 解, 采用基于一维线性搜索的整体收敛的 Newton 迭代方法来求解面积最小化问题. 对于极小曲面的近似 B 样条解, 则归结为求解强非线性极小曲面方程的问题. 采用一个有效的线性化策略, 将极小曲面方程的求解转化为一系列线性问题的求解, 然后在双三次 B-样条函数空间中采用有限元方法进行求解.

文献 [17] 利用有限元方法研究了有理 Bézier 参数曲面的造型问题. 文献 [18] 研究了 NURBS 极小曲面的造型问题, 首先构造出以给定 NURBS 曲线为边界的 NURBS 曲面族,

然后在该曲面族中寻找极小曲面的最佳近似. 使用信赖域方法来求解极小曲面, 该算法具有全局收敛性, 迭代速度快的优点. 文献 [19] 对任意边界的极小曲面的造型问题进行了讨论, 其主要思想是使用加权的 B 样条函数空间作为有限元子空间, 从而得到极小曲面在任意边界上的 B 样条曲面近似解.

3.2 基于线性偏微分方程曲面的逼近方法

极小曲面与调和曲面及双调和曲面有着密切的关系. 调和曲面是指满足以下线性偏微分方程的曲面 $r(u, v)$,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)r(u, v) = 0,$$

而双调和曲面则是指满足以下线性偏微分方程的曲面 $r(u, v)$,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)^2 r(u, v) = 0,$$

如果一张参数曲面满足等温参数条件, 那么它为极小曲面的充要条件是它为调和曲面. 因此, 我们可以把调和曲面当作极小曲面的一种近似. 文献 [12] 首次对 CAGD 中调和曲面的构造进行了研究, 给出了矩形域上的张量积 Bézier 曲面为调和曲面的充要条件, 并且证明了该张量积曲面的控制网格由其相对的两条边界曲线的控制顶点完全决定, 这就给实际设计带来了方便. 文献 [20, 21] 给出了矩形域上的张量积 Bézier 曲面为双调和曲面的充要条件, 并且证明了该张量积曲面的控制网格由 4 条边界曲线的控制顶点完全决定. 作者还通过几个造型实例对调和曲面和双调和曲面进行了比较, 发现这两种方法各有千秋.

在实际应用中, 通常希望曲面边界在 xy 平面上的投影是一条凸的闭曲线, 所以在调和曲面设计中, 通常需要对调和曲面进行裁剪以达到这样的要求. 因此, 将调和曲面表示成三角域上的 B-B 曲面会更加方便. 基于上述理由, 文献 [22] 研究三角域上的调和 B-B 曲面的性质, 给出了三角域上的 B-B 曲面为调和曲面的充要条件, 并且证明了任何一个三角域上的调和 B-B 曲面的控制网格由它的第一层和第二层控制顶点决定. 与文献 [12, 20, 21] 相比, 文献 [22] 需要考虑定义域为非直角三角形的情况, 但在推导充要条件的过程中无需进行升阶, 因此得到的结果相对来说比较简单, 证明过程中也无需将 Bernstein 基化为幂基, 更加简洁易懂, 而且其他层的控制顶点与最底部的两层控制顶点的表示关系可以直接通过迭代的方法求出, 无需求解线性方程组. 实际上, 对三角域上的调和 B-B 曲面沿着参数方向进行延拓, 便得到矩形域上的调和 Bézier 曲面.

可以证明, 调和曲面一定是负高斯曲率曲面. 文献 [23] 对一类三次负高斯曲率 Bézier 曲面进行了研究. 文献 [24] 将其结果推广到 n 次的情形, 得到了类似的结论. 为了解决 PDE 曲面造型技术与现今 CAD 系统的兼容性问题, 文献 [25] 研究了 PDE 曲面的 Bézier 逼近问题.

3.3 基于能量函数最优化的逼近方法

目前基于能量函数最优化的逼近方法主要致力于解决所谓的 Plateau-Bézier 问题, 即给定首尾相接的 4 条边界曲线的控制顶点, 寻求内部的控制顶点, 使所得到的 Bézier 曲面的面积达到最小. 由于面积函数是一个强非线性函数, 文献 [26] 首先将面积能量函数近似为线性

化能量函数 -Dirichlet 能量函数, 即

$$E_{Dir}(\mathbf{r}) = \int_U \|\mathbf{r}_u\|^2 + \|\mathbf{r}_v\|^2 dudv,$$

然后把内部控制顶点作为该近似能量函数的自变量, 利用传统的偏导数为零的思想, 得到了内部控制顶点与边界控制顶点之间的线性关系. 下面是 3 次情况的结果.

$$P_{11} = \frac{1}{48}(-22P_{10} + 15P_{13} + 24P_{20} - 4P_{32} + 24P_{02} + 4P_{33} + 15P_{31} + 48P_{00} - 22P_{01} - 4P_{23}),$$

$$P_{12} = \frac{1}{48}(15P_{10} - 22P_{13} - 4P_{20} + 48P_{03} + 15P_{32} + 4P_{30} - 22P_{02} - 4P_{31} + 24P_{01} + 24P_{23}),$$

$$P_{21} = \frac{1}{48}(24P_{10} - 4P_{13} - 22P_{20} + 4P_{03} + 24P_{32} + 48P_{30} - 4P_{02} - 22P_{31} + 15P_{01} + 15P_{23}),$$

$$P_{22} = \frac{1}{48}(-4P_{10} + 24P_{13} + 15P_{20} - 22P_{32} + 15P_{02} + 48P_{33} + 24P_{31} + 4P_{00} - 4P_{01} - 22P_{23}).$$

基于同样的思想方法, 文献 [27] 对三角域上的 B-B 极小曲面造型进行了探讨.

文献 [28] 首先基于 Coons 曲面定义了一种新的可以插值任意边界的 Coons B 样条曲面, 然后利用 Dirichlet 能量函数, 研究了此类曲面的 Plateau 问题.

极小曲面以面积最小和平均曲率为零为几何特征, 因此, 除了面积最小, 我们还可以从平均曲率为零出发来研究 Plateau-Bézier 问题. 由于对于近似极小曲面来说, 平均曲率可正可负, 因此, 文献 [29] 将平均曲率 H 为零转化为下列优化问题

$$\bar{E}_{\text{mean}}(\mathbf{r}) = \int_U \|H\|^2 dudv,$$

由于这也是一个高度非线性问题, 作者进一步将其线性化为

$$E_{\text{mean}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4} \int_U (\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv})^2 dudv,$$

基于这一新的能量函数, 便得到了内部控制顶点与边界控制顶点之间新的线性关系. 下面是 3 次情况的结果.

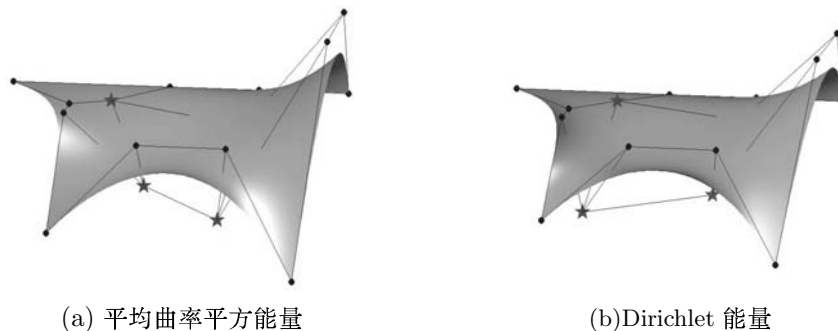


图 2 双 3 次 Bézier 曲面的例子

$$\begin{aligned}
P_{11} &= \frac{1}{16269}(-6288P_{10} + 3381P_{13} + 5812P_{20} + 58P_{03} - 1426P_{32} + 58P_{30} + 5812P_{02} \\
&\quad + 1455P_{33} + 3381P_{31} + 11740P_{00} - 6288P_{01} - 1426P_{23}), \\
P_{12} &= \frac{1}{16269}(3381P_{10} - 6288P_{13} - 1426P_{20} + 11740P_{03} + 3381P_{32} + 1455P_{30} - 6288P_{02} \\
&\quad + 58P_{33} - 1426P_{31} + 58P_{00} + 5812P_{01} + 5812P_{23}), \\
P_{21} &= \frac{1}{16269}(5812P_{10} - 1426P_{13} - 6288P_{20} + 1455P_{03} + 5812P_{32} + 11740P_{30} - 1426P_{02} \\
&\quad + 58P_{33} - 6288P_{31} + 58P_{00} + 3381P_{01} + 3381P_{23}), \\
P_{22} &= \frac{1}{16269}(-1426P_{10} + 5812P_{13} + 3381P_{20} + 58P_{03} - 6288P_{32} + 58P_{30} + 3381P_{02} \\
&\quad + 11740P_{33} + 5812P_{31} + 1455P_{00} - 1426P_{01} - 6288P_{23}).
\end{aligned}$$

由于该能量函数与曲面的二阶偏导有关, 因此, 与基于 Dirichlet 能量函数最小化相比, 新的线性关系相对来说系数比较复杂. 从效果上看, 由于两者都是对面积或平均曲率的逼近函数, 因此两者各有优势, 对于某些边界情况, 利用平均曲率能量函数所得到的曲面面积比较小; 而对某些边界情况, 利用 Dirichlet 能量函数所得到的曲面面积比较小. 图 2 中分别给出了具有极小平均曲率平方能量和 Dirichlet 能量的例子. 圆形的控制顶点为给定的控制顶点, 星形的控制顶点为待求的控制顶点. 图 2(a) 与图 2(b) 中的边界约束条件相同, 图 2(a) 曲面的面积为 180.8689, 图 2(b) 中曲面的面积为 180.9090, 因此, 在这个例子中, 平均曲率平方能量比 Dirichlet 能量要好.

4 分析比较及将来工作

极小曲面是微分几何领域中的一类重要的特殊曲面. 由于其在工程技术领域的广泛应用, 将极小曲面引入 CAGD 领域具有重要意义. 目前的工作主要分为精确造型和逼近造型两大类. 精确造型虽然能得到严格符合定义的极小曲面, 但也相对降低了造型的自由度, 无法满足大多数曲面造型的需求. 逼近造型可以满足大多数用户的需求, 但所得到的曲面只能是近似极小曲面. 在逼近造型方法中, 基于数值计算的方法虽然可以得到相对精确的结果, 但却很难直接集成到 CAGD 造型系统中; 基于线性偏微分方程的方法和基于能量函数优化的方法结果简单, 方法易行, 几何意义明显, 很容易与现行 CAGD 造型系统兼容, 是值得推荐的极小曲面造型方法.

极小曲面在 CAGD 领域中的研究目前仍处于初级阶段. 需要进一步解决的问题主要有

- 1) CAGD 中参数多项式极小曲面的挖掘仍需继续深入探讨, 特别是任意次参数多项式极小曲面的存在性证明及其一般形式和一般性质;
- 2) CAGD 中的 Plateau 问题还没有完全得到解决. 得到极小曲面的最佳线性近似, 是问题的核心所在. 如何找到与边界条件自适应的能量函数, 是解决问题的关键;
- 3) 在极小曲面的应用大户——膜结构设计中, 如何通过二维材料的裁剪, 张拉形成所需要的三维空间曲面, 是整个膜结构工程中最关键的一个问题. 因此, 研究极小曲面的裁剪和展开算法, 是我们下一步需要解决的重要课题;
- 4) 在满足一定的几何约束条件下, 如何得到网格极小曲面和细分极小曲面, 也是值得研究的课题;

5) 如何将 CAGD 中的极小曲面造型方法, 应用到实际问题中, 如飞机设计, 轮船制造等等, 对于实际工程有重要意义.

参 考 文 献

- [1] Nitsche J C. Lectures on Minimal Surfaces. Vol. 1. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
- [2] Osserman R. A Survey of Minimal Surfaces. Dover Publ. 2nd ed., New York, 1986.
- [3] Rado. On Plateau's problem. *Ann. of Math.*, 1930, **31**(2): 457-469.
- [4] Wang Y. Periodic surface modeling for computer aided nano design. *Computer Aided Design*, 2007, **39**(3): 179-189.
- [5] 金文标, 汪国昭. 一类极小曲面的几何设计. 计算机学报. 1999, **23**(12): 1277-1279.
- [6] 金文标. 若干特殊曲面的造型和应用. 杭州, 浙江大学, 博士学位论文, 1999.
- [7] 满家巨, 汪国昭. 正螺面与悬链面的表示与构造. 计算机辅助设计与图形学学报. 2005, **17**(3): 431-436.
- [8] Xu G and Wang G Z. AHT Bézier surfaces and NUAHT B-spline curves. *Journal of Computer Science and Technology*, 2007, **22**(4): 597-607.
- [9] Xu G, Wang G Z. Control mesh representation of a class of minimal surfaces. *Journal of Zhejiang University Science A*, 2006, **7**(9): 1544-1549.
- [10] 徐岗, 汪国昭. 一类极小曲面的控制网格表示. 计算机辅助设计与图形学学报. 2007, **19**(2): 240-244.
- [11] 满家巨, 汪国昭. 等温参数多项式极小曲面. 计算机学报, 2002, **25**(2): 197-201.
- [12] Montverde J. The Plateau-Bézier Problem. The Proceedings of the X Conf. on Mathematics of Surfaces, 2003, Leeds, UK. Lecture Notes in Comput. Sci., Vol. 2768. Springer-Verlag, Berlin/New York, 262-273.
- [13] Xu G, Wang G Z. Quintic Polynomial Minimal Surfaces with Isothermal Parameter. 2007, Submitted to Computer Aided Design.
- [14] Xu G, Wang G Z. Parametric polynomial minimal surfaces of degree six with isothermal parameter. The Proceedings of Geometric Modeling and Processing, 2008, Hangzhou, China. Lecture Notes in Comput. Sci., Vol. 4975. Springer-Verlag, Berlin/New York, 329-343.
- [15] 满家巨, 汪国昭. 基于有限元方法的极小曲面造型. 计算机学报, 2003, **26**(4): 507-510.
- [16] 满家巨, 汪国昭. B 样条函数极小曲面造型. 软件学报, 2003, **14**(4): 824-829.
- [17] 陈笑. 有理 Bézier 极小曲面设计: Dirichlet 方法的推广. 杭州, 浙江大学, 硕士学位论文, 2006.
- [18] 覃廉, 关履泰. 基于 NURBS 的极小曲面造型. 高等学校计算数学学报, 2005, **16**(S1): 175-181.
- [19] 季洁, 满家巨. 任意边界下的极小曲面造型问题. 计算机与现代化, 2007, **4**: 7-9.
- [20] Montverde J, Ugail H. On harmonic and biharmonic Bézier surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 2004, **21**(7): 697-715.
- [21] Montverde J, Ugail H. A general 4th-order PDE method to generate Bézier surfaces from boundary. *Computer Aided Geometric Design*, 2006, **23**(2): 208-225.
- [22] 徐岗, 汪国昭. 三角域上的调和 B-B 曲面. 计算机学报, 2006, **29**(12): 2180-2185.
- [23] 金文标, 杨勋年. 一种负高斯曲率的双三次 Bézier 曲面. 高校应用数学学报, 2000, **15**(2): 206-210.
- [24] Xu G, Wang G Z. Harmonic-type Bézier surfaces over rectangular and triangular domain. *Journal of Information and Computational Science*, 2006, **3**(2): 325-332.
- [25] 徐岗, 汪国昭. PDE 曲面的 Bézier 逼近. 软件学报, 2007, **18**(11): 2974-2920.

- [26] Monterde J. Bézier surfaces of minimal area: The Dirichlet approach. *Computer Aided Geometric Design*, 2004, **21**: 117–136.
- [27] Arnal A, Lluch A and Monterde J. Triangular Bezier Surfaces of Minimal Area. Proceedings of the Int. Workshop on Computer Graphics and Geometric Modeling, CG GM'2003, Montreal. Lecture Notes in Comput. Sci, 2003, Vol. 2669. Springer-Verlag, Berlin/New York, 366–375.
- [28] 刘计善. 一类极小曲面造型设计的新方法. 复旦学报 (自然科学版), 2007, **46**(2): 192–197.
- [29] Xu G and Wang G Z. The Plateau-Bézier Problem: Squared Mean Curvature Method. 2007, submitted to *Computer Aided Geometric Design*.

RESEARCH DEVELOPMENT OF MINIMAL SURFACE MODELING IN COMPUTER AIDED GEOMETRIC DESIGN

XU Gang WANG Guozhao

(*Institute of Computer Graphics and Image Processing, Department of Mathematics,
Zhejiang University, Zhejiang 310027*)

Abstract Minimal surfaces have been employed in many areas. It is valuable to introduce minimal surfaces into the field of computer aided geometric design. In this paper, the research on modeling of minimal surfaces in CAGD is made a comprehensive survey. According to the modeling methods, the existing work can be clarified into two parts: exact modeling of minimal surfaces and approximating modeling of minimal surface. The exact modeling methods include: representation and construction of control mesh of some special minimal surface; exploration and properties of polynomial parametric minimal surfaces with isothermal parameter. The approximating modeling methods include: approximating methods based on numerical calculations; approximating methods based on linear PDE; approximating methods based on optimization of linear energy function. At last, we analyze and compare the modeling methods, and introduce the research directions in the future.

Key words Computer aided geometric design, minimal surface, harmonic surface, isothermal parametric surface, membrane structure.