

## 一类极小曲面的控制网格表示

徐 岗 汪国昭

(浙江大学数学系计算机图象图形研究所 杭州 310027)

(xlyn41@hotmail.com)

**摘 要** 给出了平面曲率线极小曲面的拟 Bézier 和拟 B 样条控制网格表示,以悬链面及 Enneper 曲面为特殊形式,实现了由悬链面到 Enneper 曲面的动态变形.该工作为将极小曲面引入 CAGD/CAD 造型系统,并利用拟 de-Casteljau 算法生成极小曲面提供了一个有力的工具.

**关键词** 极小曲面;平面曲率线极小曲面;控制网格;CAGD/CAD  
中图法分类号 TP391

## Control Mesh Representation of a Class of Minimal Surfaces

Xu Gang Wang Guozhao

(Institute of Computer Graphics and Images, Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

**Abstract** This paper presents the control mesh representation of planar lines of curvature minimal surface using the quasi-Bézier basis and quasi-B-spline basis. The planar lines of curvature minimal surface contains the catenoid and Enneper surface as its special examples. We also implement the dynamic deformation from the catenoid to the Enneper surface. This work provides a powerful tool for introducing the minimal surface into the CAGD/CAD modeling systems. Furthermore, the result also provides a powerful tool for modeling the minimal surfaces by de-Casteljau-like algorithm.

**Key words** minimal surface; planar lines of curvature minimal surface; control mesh; CAGD/CAD

极小曲面被广泛应用于建筑设计、航空、造船、材料科学、晶体学等领域,将极小曲面引入 CAGD 有着积极的意义.文献 [1] 对 Enneper 曲面在 CAGD 中的应用进行了研究.文献 [2] 运用有限元方法进行极小曲面造型.文献 [3] 证明了 Enneper 曲面是唯一的一类三次参数多项式极小曲面,并研究了四次参数多项式曲面为极小曲面的充分条件.文献 [4-5] 研究了边界曲线为 Bézier 曲线及 B 样条曲线的极小曲面的近似解.

在 CAGD/CAD 曲面造型系统中,控制网格对交互设计起着非常重要的作用.但对于绝大多数的极小曲面,我们都无法用 NURBS 曲面精确表示.因

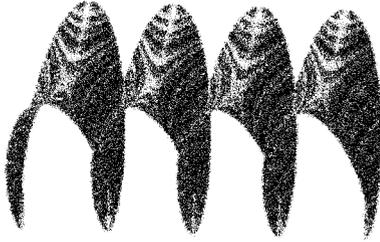
此,如何给出极小曲面的控制网格表示,以便于在 CAGD/CAD 系统中和其他的曲线曲面进行统一处理,是一个非常意义的课题.目前在这方面鲜有科研文献发表,只有文献 [6] 基于 C-Bézier 曲面<sup>[7]</sup>和 H-Bézier 曲面<sup>[8]</sup>给出了正螺面和悬链面的拟 Bézier 控制网格表示.

由微分几何知识可知,悬链面和 Enneper 面上的等参数线便是其曲率线,并且其曲率线均为平面曲线. Bonnet 在 1855 年发现了一类曲率线为平面曲线的非平面极小曲面,称之为平面曲率线极小曲面,悬链面和 Enneper 曲面是其特例.本文验证了该类曲面为极小曲面,并给出了平面曲率线极小曲面

的拟 Bézier 和拟 B 样条控制网格表示,这样就可以利用拟 de-Casteljau 算法及细分算法来生成极小曲面.最后实现了由悬链面到 Enneper 曲面的动态变形,并且中间的过渡曲面都是极小曲面.

### 1 平面曲率线极小曲面

平面曲率线极小曲面是唯一的一类曲率为平

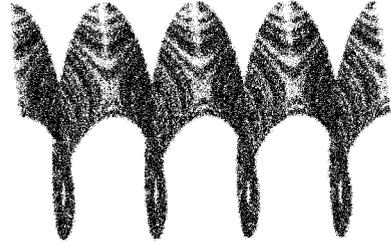


a  $\lambda=0.2$ ,式(1)中取“-”

面曲线的非平面极小曲面,具有如下的参数形式

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \left( \frac{\lambda u \pm \sin u \cosh v}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \frac{v \pm \lambda \cos u \sinh v}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \pm \cos u \cosh v \right) \quad (1)$$

当  $\lambda=0$  时,是悬链面;当  $\lambda \rightarrow 1$  时,近似于 Enneper 曲面.图 1 所示为平面曲率线极小曲面的 2 个例子.



b  $\lambda=0.8$ ,式(1)中取“+”

图 1 平面曲率线极小曲面的 2 个例子

引理 1. 等温参数曲面为极小曲面的充要条件是该曲面为调和曲面.

引理 1 的证明见文献 [3].

定理 1. 具有参数形式 (1) 的曲面  $r(u, v)$  既是等温参数曲面,又是调和曲面.即  $r(u, v)$  为极小曲面.

证明. 由计算可得

$$r_u = \left( \frac{\lambda \pm \cos u \cosh v}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \mp \frac{\lambda \sin u \sinh v}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \mp \sin u \cosh v \right),$$

$$r_v = \left( \frac{\pm \sin u \sinh v}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \frac{\pm \lambda \cos u \cosh v}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \pm \cos u \sinh v \right),$$

$$r_{uu} = \left( \mp \frac{\sin u \cosh v}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \mp \frac{\lambda \cos u \sinh v}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \mp \cos u \cosh v \right),$$

$$r_{vv} = \left( \frac{\pm \sin u \cosh v}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \frac{\pm \lambda \cos u \sinh v}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \pm \cos u \sinh v \right),$$

$$\begin{pmatrix} U_0(t) \\ U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha-s} \begin{pmatrix} \alpha & -1 & c & -s \\ -(\alpha-k)m & m & 1-c-m & m(\alpha-k)m \\ km & -m & m & -km \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

其中  $s = \sin \alpha, c = \cos \alpha, k = (\alpha-s)(1-c), m = s/(\alpha-2k), t \in [0, \alpha], \alpha \in (0, \pi]$

$$\pm \cos u \cosh v),$$

因此  $r(u, v)$  的第一基本形式为

$$E = r_u \cdot r_u = \frac{(\lambda \cos u \pm \cosh v)^2}{1-\lambda^2},$$

$$F = r_u \cdot r_v = 0,$$

$$G = r_v \cdot r_v = \frac{(\lambda \cos u \pm \cosh v)^2}{1-\lambda^2};$$

即  $E = G, F = 0$ ,故  $r(u, v)$  为等温参数曲面.又因为  $r_{uu} + r_{vv} = 0$ ,故  $r(u, v)$  为调和曲面.由引理 1 知,该曲面为极小曲面. 证毕.

### 2 平面曲率线极小曲面的拟 Bézier 控制网格表示

为给出平面曲率线极小曲面的拟 Bézier 控制网格表示,本文将采用混合张量积的形式,即在  $u$  参数方向采用 C-Bézier 基函数, $v$  参数方向采用 H-Bézier 基函数.

根据文献 [7] 中 C-Bézier 基函数的定义可知

同理可以得到 H-Bézier 基函数的定义<sup>[8]</sup>,即

$$\begin{pmatrix} V_0(t) \\ V_1(t) \\ V_2(t) \\ V_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta - s_h} \begin{pmatrix} \beta & -1 & c_h & -s_h \\ -(\beta - k_h)m_h & m_h & 1 - c_h - m_h & (\beta - k_h)m_h \\ k_h m_h & -m_h & m_h & -k_h m_h \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix},$$

其中  $s_h = \sinh \beta, c_h = \cosh \beta, k_h = (\beta - s_h)(1 - c_h), m_h = s_h(\beta - 2k_h), t \in [0, \beta], \beta \in (0, +\infty)$ .

我们求得  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{H}$  的逆矩阵分别为

$$\mathbf{C}^{-1} = (c_{ij})_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & \alpha - k & \alpha \\ 0 & k & \alpha - k & s \\ 1 & 1 & c + ks & c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^{-1} = (h_{ij})_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k_h & \beta - k_h & \beta \\ 0 & k_h & \beta - k_h & s_h \\ 1 & 1 & c_h + k_h s_h & c_h \end{pmatrix}.$$

本文考虑平面曲率线极小曲面  $r(u, v)$  的控制网格表示,即寻找控制顶点  $P_{ij}$ ,使得

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} U_i(u) V_j(v),$$

$$u \in [0, \alpha], v \in [0, \beta], \alpha \in (0, \pi], \beta \in (0, +\infty).$$

根据 C-Bézier 和 H-Bézier 曲线的定义,易得

$$\sin u = \sum_{i=0}^3 c_{3i} U_i(u), \cos u = \sum_{i=0}^3 c_{4i} U_i(u), u = \sum_{i=0}^3 c_{2i} U_i(u),$$

$$\sinh v = \sum_{j=0}^3 h_{3j} V_j(v), \cosh v = \sum_{j=0}^3 h_{4j} V_j(v), v = \sum_{j=0}^3 h_{2j} V_j(v).$$

故

$$x(u, v) = \frac{\lambda u \pm \sin u \cosh v}{\sqrt{1 - \lambda^2}} = \frac{\lambda \sum_{i=0}^3 c_{2i} U_i(u) \pm \sum_{i=0}^3 c_{3i} U_i(u) \sum_{j=0}^3 h_{4j} V_j(v)}{\sqrt{1 - \lambda^2}} =$$

$$\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \left[ \frac{\lambda c_{2i} \pm c_{3i} h_{4j}}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right] U_i(u) V_j(v).$$

同理可得

$$y(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \left[ \frac{h_{2i} \pm \lambda c_{4i} h_{3j}}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right] U_i(u) V_j(v), z(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 (\pm c_{4i} h_{4j}) U_i(u) V_j(v).$$

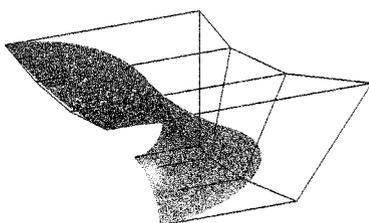
因此,如果取控制顶点为

$$P_{ij} = \left( \frac{\lambda c_{2i} \pm c_{3i} h_{4j}}{\sqrt{1 - \lambda^2}}, \frac{h_{2i} \pm \lambda c_{4i} h_{3j}}{\sqrt{1 - \lambda^2}}, \pm c_{4i} h_{4j} \right),$$

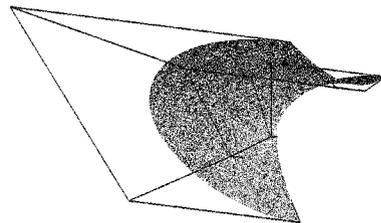
则平面曲率线极小曲面可以表示为

$$r(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} U_i(u) V_j(v), u \in [0, \alpha], v \in [0, \beta], \alpha \in (0, \pi], \beta \in [0, +\infty].$$

图 2 所示为 2 个平面曲率线极小曲面及其拟 Bézier 控制网格.



a  $\alpha = \pi, \beta = 1, \lambda = 0.5$ , 式(1)中取“+”



b  $\alpha = \pi, \beta = 2, \lambda = 0.9$ , 式(1)中取“-”

图 2 拟 Bézier 控制网格表示

### 3 平面曲率线极小曲面的拟 B 样条控制网格表示

本文采用混合张量积的形式,即在  $u$  参数方向

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_0(t) \\ \bar{U}_1(t) \\ \bar{U}_2(t) \\ \bar{U}_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\alpha(1-c)} \begin{pmatrix} \alpha & -1 & c-s \\ -2\alpha c & 1+2c & -(1+2c)2s \\ \alpha & -(1+2c) & 2+c-s \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

其中  $s = \sin \alpha, c = \cos \alpha, t \in [0, \alpha], \alpha \in [0, \pi]$ .

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_0(t) \\ \bar{V}_1(t) \\ \bar{V}_2(t) \\ \bar{V}_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\beta(1-c_h)} \begin{pmatrix} \beta & -1 & c_h-s_h \\ -2\beta c_h & 1+2c_h & -(1+2c_h)2s_h \\ \beta & -(1+2c_h) & 2+c_h-s_h \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{H}} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix},$$

其中  $s_h = \sinh \beta, c_h = \cosh \beta, t \in [0, \beta], \beta \in (0, +\infty)$ .

采用 C-B 样条基函数,  $v$  参数方向采用 H-B 样条基函数. C-B 样条基为定义在空间  $span\{1, t, \sin t, \cos t\}$  上的均匀拟 B 样条基, H-B 样条基为定义在空间  $span\{1, t, \sinh t, \cosh t\}$  上的均匀拟 B 样条基.

根据文献 [9] 中 C-B 样条基函数的定义可知

同理可以得到 H-B 样条基函数的定义<sup>[10]</sup>, 即

我们求得  $\bar{\mathbf{C}}$  和  $\bar{\mathbf{H}}$  的逆矩阵分别为

$$\bar{\mathbf{C}}^{-1} = (\bar{c}_{ij})_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\alpha & 0 & \alpha & 2\alpha \\ -\alpha & 0 & \alpha & 2c\alpha \\ \frac{c\alpha}{s} & \frac{\alpha}{s} & \frac{c\alpha}{s} & \frac{\alpha \cos 2\alpha}{s} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{H}}^{-1} = (\bar{h}_{ij})_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\beta & 0 & \beta & 2\beta \\ -\beta & 0 & \beta & 2c_h\beta \\ \frac{c_h\beta}{s_h} & \frac{\beta}{s_h} & \frac{c_h\beta}{s_h} & \frac{\beta \cosh 2\beta}{s_h} \end{pmatrix}.$$

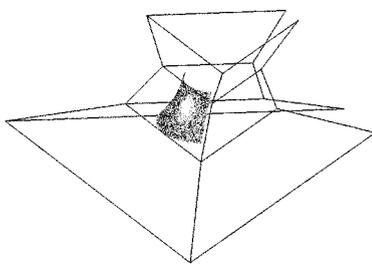
与第 2 节类似, 如果取控制顶点为

$$\bar{\mathbf{P}}_{ij} = \left( \frac{\lambda \bar{c}_{2i} \pm \bar{c}_{3i} \bar{h}_{4j}}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \frac{\bar{h}_{2i} \pm \lambda \bar{c}_{4i} \bar{h}_{3j}}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \pm \bar{c}_{4i} \bar{h}_{4j} \right),$$

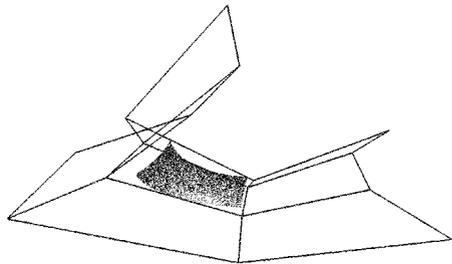
则平面曲率线极小曲面可以表示为

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \bar{\mathbf{P}}_{ij} \bar{U}_i(u) \bar{V}_j(v), \quad u \in [0, \alpha], v \in [0, \beta], \alpha \in (0, \pi], \beta \in (0, +\infty).$$

图 3 所示为 2 个平面曲率线极小曲面及其拟 B 样条控制网格.



a  $\alpha=2, \beta=1, \lambda=0$ , 式(1)中取“-”



b  $\alpha=1, \beta=0.5, \lambda=0.5$ , 式(1)中取“-”

图 3 拟 B 样条控制网格表示

### 4 悬链面到 Enneper 曲面的动态变形

由前面的讨论可知, 当  $\lambda = 0$  时, 平面曲率线极小曲面便是悬链面; 当  $\lambda \rightarrow 1$  时, 它便近似于

Enneper 曲面. 因此, 我们可以实现由悬链面到 Enneper 曲面的动态变形, 而且中间过渡曲面均为极小曲面. 利用这一性质, 可以得到一系列的极小曲面. 图 4 所示为悬链面到 Enneper 曲面的动态变形的例子, 其中  $\alpha = \pi, \beta = 2$ , 式(1)中取“-”.

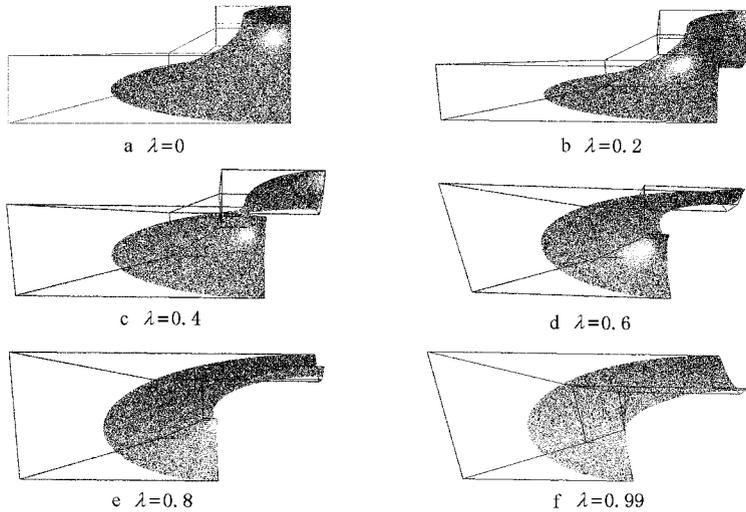


图4 悬链面到 Enneper 曲面的动态变形

## 5 结论及将来工作

本文给出了一类极小曲面的控制网格表示,从而可以利用细分算法生成该极小曲面,并在 CAGD 系统中与其他的曲面进行统一处理。

几何构造方法在 CAGD 系统中占有重要地位,如何给出该类极小曲面的几何构造方法,将是我們下一步需要解决的问题。文献 [11] 提出了一种利用圆锥网格进行几何造型的方法。圆锥网格可以看作把曲面按照曲率线离散化后得到的网格,其良好的等距性质使得它在建筑造型方面有着巨大的应用价值。由于本文中提到的这类极小曲面的曲率线便是其参数线,因此应用此类极小曲面进行建筑造型将大大减少计算量。我们会在今后的研究工作中对这一问题进行详细讨论。

## 参 考 文 献

- [1] Jin Wenbiao, Wang Guozhao. Geometry design of a class of minimal surface with negative Gauss curvature [J]. Chinese Journal of Computers, 1999, 22(12): 1277-1279 (in Chinese) (金文标, 汪国昭. 一类极小曲面的几何设计[J]. 计算机学报, 1999, 22(12): 1277-1279)
- [2] Man Jiaju, Wang Guozhao. Modeling of minimal surface based on the finite element method [J]. Chinese Journal of Computers, 2003, 26(4): 507-510 (in Chinese) (满家巨, 汪国昭. 基于有限元方法的极小曲面造型[J]. 计算机学报, 2003, 26(4): 507-510)
- [3] Man Jiaju, Wang Guozhao. Polynomial minimal surface in isothermal parameter [J]. Chinese Journal of Computers, 2002, 25(2): 197-201 (in Chinese) (满家巨, 汪国昭. 等温参数多项式极小曲面[J]. 计算机学报, 2002, 25(2): 197-201)
- [4] Man Jiaju, Wang Guozhao. Approximating to nonparameterized minimal surface with B-spline surface [J]. Journal of Software, 2003, 14(4): 824-829 (in Chinese) (满家巨, 汪国昭. B-样条函数极小曲面造型[J]. 软件学报, 2003, 14(4): 824-829)
- [5] Monterde J. Bézier surfaces of minimal area: the Dirichlet approach [J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(2), 117-136
- [6] Man Jiaju, Wang Guozhao. Representation and geometric construction of catenoids and helicoids [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2005, 17(3): 431-436 (in Chinese) (满家巨, 汪国昭. 正螺面与悬链面的表示与构造[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(3): 431-436)
- [7] Zhang Jiwen. C-curves: an extension of cubic curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1996, 13(3), 199-217
- [8] Li Yajuan, Wang Guozhao. Two kinds of B-basis of the algebraic hyperbolic space [J]. Journal of Zhejiang University A, 2005, 6(7): 750-759
- [9] Zhang Jiwen. Two different forms of C-B-splines [J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14(1): 31-41
- [10] Lu Yonggang, Wang Guozhao, Yang Xunnian. Uniform hyperbolic polynomial B-spline curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19(6): 379-393
- [11] Liu Y, Pottmann H, Wallner J, et al. Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces [C] // Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Boston, 2006: 681-689