

PROBABILITES

TD n° 1

1. Quel est l'univers Ω pour l'expérience : on lance 2 fois de suite un dé (non truqué).
A quelles parties de Ω correspondent les événements suivants :
 - a) A : on n'obtient pas d'as au cours des 2 lancers ;
 - b) B : on obtient un as au deuxième lancer ;
 - c) C : on obtient un as exactement ;
 - d) D : on obtient au moins un as.
2. On demande à un couple composé d'un homme et d'une femme, l'âge de ses deux composants.
 - a) Décrire l'espace des résultats possibles sachant que tous les âges sont supposés compris entre 20 et 100 ans.
 - b) Décrire l'événement : l'homme a plus de 40 ans.
 - c) Décrire l'événement : l'homme est plus jeune que la femme.
3. Soit $\Omega = \{a, b, c, d\}$ et soit P une probabilité définie sur Ω .
 - a) Calculer $P(a)$ en supposant que $P(b) = 1/3, P(c) = 1/6, P(d) = 1/9$;
 - b) Calculer $P(a)$ et $P(b)$ en supposant que $P(c) = P(d) = 1/4, P(a) = 2P(b)$;
 - c) Calculer $P(a)$ en supposant que $P(\{b, c\}) = 2/3, P(\{b, d\}) = 2/3, P(b) = 1/3$.
4. Si P est une probabilité, calculer $P(\bar{A})$ et $P(A \cap B)$ sachant que $P(A) = 0,3, P(B) = 0,2$ et $P(A \cup B) = 0,4$.
5. Dans un organisme qui contient N cellules, on compte le nombre de cellules vivantes.
 - a) Proposer un espace Ω .
 - b) θ étant un nombre compris strictement entre 0 et 1, que doit valoir K pour que la fonction suivante puisse définir une probabilité sur Ω :
$$p(n) = K\theta^n \quad \text{si } n < N$$
$$= \theta^N \quad \text{si } n = N$$
 - c) En utilisant cette fonction, calculer la probabilité pour qu'un organisme contienne au moins une cellule morte et au moins une cellule vivante dans le cas $\theta = 0,1$.
6. Au pays des Schtroumpfs, on attribue le bac dès la naissance. Pour cela, on tire un entier au hasard entre 1 et 10 et on applique la règle suivante :
 - si c'est un multiple de 5, le bébé est recalé ;
 - si c'est un 7, il obtient la mention « très bien » ;
 - si c'est un multiple de 4, il obtient la mention « bien » ;
 - si c'est un multiple de 3, il obtient la mention « assez bien » ;
 - sinon, il obtient la mention passable.Quelle est la probabilité pour un nouveau-né d'obtenir le bac avec la mention passable ?

PROBABILITES

7. Les 3 mousquetaires (donc 4 personnes) ont mélangé leurs bottes dans le couloir de l'auberge. D'Artagnan se lève le premier et prend 2 bottes au hasard. Calculer la probabilité pour que :
- les 2 bottes soient les siennes ;
 - les 2 bottes forment une paire ;
 - les 2 bottes soient 2 pieds droits ;
 - les 2 bottes appartiennent à 2 personnes différentes.
- On raisonnera dans le cas non ordonné.
8. 10 livres sont rangés sur le rayon d'une bibliothèque. On les enlève pour épousseter l'étagère, puis on les replace au hasard. Quelle est la probabilité
- que le $i^{\text{ème}}$ retrouve sa place ?
 - que le $i^{\text{ème}}$ et le $j^{\text{ème}}$ retrouvent leur place ?
 - que chacun retrouve sa place ?
9. A quelle condition sur λ la fonction $p(\omega) = \lambda \sin(\omega)$ définit-elle une densité de probabilité sur l'intervalle $[0, \pi]$? Que vaut alors $P\left(\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]\right)$?

PROBABILITES

TD n° 2

1. On fait une enquête sur 100 clients dans un supermarché. Cette enquête montre que 60 clients interrogés sont venus à la suite d'une campagne publicitaire, alors que les 40 autres clients ignoraient cette publicité. Parmi ces 100 clients, 30 ont achetés au moins un article en ayant vu sa publicité, alors que 10 autres ont acheté au moins un article sans avoir connaissance de la publicité. Calculer la probabilité qu'une personne effectue au moins un achat sachant qu'elle n'a pas vu la publicité.
2. Dans une université, 10% des hommes inscrits et 15 % des femmes inscrites étudient les mathématiques. De plus 45 % des inscrits sont des femmes. On interroge une personne étudiant les mathématiques au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
3. Montrer que :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C)$$

4. Montrez que si A et B sont 2 événements indépendants, il en est de même pour \bar{A} et B , A et \bar{B} , \bar{A} et \bar{B} .

5. Simplifier $\frac{(n+2)!}{n!}$; $\frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^1 C_{2n}^2}{C_{3n}^3}$.

6. Calculer $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ et C_n^3 .

7. Démontrer que pour tous entiers naturels n et p tels que $1 \leq p \leq n$, on a : $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$.

8. Résoudre l'équation suivante dans \mathbb{N} : $C_n^5 = 17C_n^4$.

9. Démontrer que $A = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier (n est un entier naturel non nul). (Développer en utilisant la formule du binôme).

10. Calculer $\sum_{p=0}^n C_n^p$.

11. La police recherche un criminel que l'on a vu entrer dans un immeuble. L'immeuble a 2 cages d'escaliers (A et B), 5 étages et, pour chaque cage d'escaliers, 3 appartements par étage et aucun au rez-de-chaussée.

PROBABILITES

La police va d'abord visiter la cage d'escaliers A et constate que le criminel ne se trouve pas dans les appartements des 4 premiers étages. Quelle est la probabilité pour qu'il se trouve au dernier étage de cette cage d'escaliers ?

12. Calculer le nombre d'anagrammes des prénoms CLAUDE, CHRISTOPHE, GABRIELLE.
13. Dans un jeu de 52 cartes, on extrait 13 cartes de façon ordonnée et avec remise. Calculer la probabilité des événements suivants :
 - On extrait la dame de cœur 5 fois ;
 - On extrait 10 rois ;
 - On extrait k cartes de trèfle avec $k \leq 13$;
 - On n'extrait aucune carte de trèfle.
14. Dans un jeu de 52 cartes, on extrait 13 cartes de façon non ordonnée et sans remise. Calculer la probabilité des événements suivants :
 - On extrait k as avec $k \leq 4$;
 - On extrait k cartes de cœur avec $k \leq 13$;
 - On extrait 5 cartes de pique.
15. Une urne contient 100 billes colorées, parmi lesquelles 20% sont bleues. On extrait de façon ordonnée et avec remise 20 billes. Quelle est la probabilité que 10 des billes extraites soient bleues ?

PROBABILITES

TD n° 3

- 1) Soit P une probabilité définie sur $\Omega = \{1,2,3\}$ par $P(1) = \frac{1}{2}, P(2) = \frac{1}{3}, P(3) = \frac{1}{6}$. Dessiner la fonction de répartition. Calculer l'espérance et l'écart type.

$$x > 0, F(x) = 0$$

$$x \in [0,1[, F(x) = \frac{1}{5}$$

- 2) Soit F la fonction de répartition définie par : $x \in [1,3[, F(x) = \frac{3}{10}$. Tracer son graphe,

$$x \in [3,4[, F(x) = \frac{3}{5}$$

$$x \in [4,+\infty[, F(x) = 1$$

retrouver la probabilité P associée et calculer l'espérance.

- 3) Sachant que l'univers est $\Omega = \{-1,0,1,2\}$ et que la fonction de répartition est définie par :

$$F(1) = \frac{3}{4}, F(2) = 1, F(2) - F(0) = \frac{7}{12}, \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} F(x) = \frac{1}{6},$$

trouver la probabilité et tracer le graphe de la fonction de répartition.

- 4) Déterminer la moyenne de la somme des points obtenus lors du lancer d'une paire de dé non truqués.
- 5) Pour la probabilité uniforme sur $\Omega = \{1,2,3,4\}$, calculer les moments d'ordre k pour k = 1, 2, 3, 4.

- 6) Exercice du cours : Calculer la variance pour une loi binomiale.

- 7) Un tireur touche la cible avec probabilité $\frac{1}{4}$. On suppose qu'il doit tirer 7 fois.

Soit A l'événement « il touche la cible au moins 2 fois ». Calculer la probabilité de A.

Combien de fois doit-il tirer pour avoir une probabilité supérieure à $\frac{2}{3}$ de toucher la cible au moins une fois ?

- 8) Dans une usine, on produit une pièce qui dans 2% des cas présente des défauts qui la rende invendable. Dans un chargement de 1000 pièces, calculer le nombre moyen de pièces défectueuses ainsi que l'écart type.

- 9) A l'épreuve orale d'un examen il y a 20 sujets possibles. Un candidat tire au sort 3 sujets, parmi lesquels il choisit celui qu'il préfère traiter. Si un candidat s'est préparé seulement sur 12 des 20 thèmes et si k est le nombre des sujets préparés parmi ceux tirés au sort, dire

PROBABILITES

de quelle loi de probabilité il s'agit. Quelle est la probabilité que parmi les 3 il y en ait un qu'il a préparé ?

- 10) Une page imprimée contient 50 lignes de texte de 70 caractères chacune (l'espace entre deux mots est considéré comme un caractère). En supposant que le typographe commette une erreur tous les 3500 caractères, quelle est la probabilité qu'une page au hasard soit sans aucune faute d'impression ?
- 11) Un certain type de missile touche sa cible avec probabilité 0,3. Combien faut-il lancer de missiles pour avoir une probabilité supérieure à 80% de toucher la cible ?
- 12) Des études statistiques montrent que lors d'une naissance, la probabilité d'avoir un garçon est d'environ 51%. Considérons une famille de 4 enfants sans jumeaux. On suppose que les fécondations sont indépendantes. Quelle est la probabilité pour que dans cette famille il y ait exactement 3 garçons ?

PROBABILITES

TD n° 4

- 1) Calculer la constante c telle que la fonction $f(x) = \begin{cases} ce^{-3x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ soit une densité de probabilité sur \mathbb{R} , puis calculer et dessinez la fonction de répartition.
- 2) Calculer la constante c telle que la fonction $f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ cx & \text{si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ soit une densité de probabilité sur \mathbb{R} et calculer la moyenne et la variance.
- 3) Soit P une probabilité sur \mathbb{R} , dont la fonction de répartition est $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$;
 - a) calculer la densité de probabilité ;
 - b) calculer $P(]-\infty, 3])$ et $P([3, 4])$;
 - c) calculer l'espérance.
- 4) Soit P une probabilité suivant une loi normale centrée réduite, calculer à l'aide du tableau :
 - a) $P([-0,73 ; 0])$
 - b) $P([0,65 ; 1,26])$
 - c) $P([1,13 ; \infty[)$
- 5) La longueur moyenne de 500 épis de froment, lors d'un test biologique, est de 151 cm avec un écart type de 15 cm. En supposant que les longueurs suivent une loi normale, calculer le nombre d'épis ayant une longueur :
 - a) entre 120 et 155 cm ;
 - b) supérieure à 185 cm.
 - c) Quel intervalle de longueur faut-il prendre pour avoir 95% des épis ?
- 6) Pour une probabilité suivant une loi normale centrée réduite trouver t en sachant que :
 - a) $P([0, t]) = 0,4236$
 - b) $P([t, 2]) = 0,1000$
- 7) On considère deux moteurs qui ont une durée de vie qui suivent respectivement une loi exponentielle $e(\alpha)$ et de Erlang $E(2, \beta)$. Pour quelles valeurs des paramètres α et β le premier moteur est-il plus performant ?
- 8) Calculer $\Gamma(1), \Gamma(2), \Gamma(3)$. Prouver que pour tout entier n , $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$; en déduire la valeur de $\Gamma(n)$ quand n est un nombre entier.
- 9) Déterminer les paramètres d'une probabilité suivant une loi Gamma en sachant que son espérance est 5 et sa variance est 10.

PROBABILITES

TD n° 5

- On lance une pièce 3 fois. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de faces obtenues.
 - Faire le tableau de la loi de probabilité de X
 - Faire le graphique.
- Dans une population de 5 individus, on considère que chaque individu a une probabilité 0,1 d'être atteint d'une maladie M . Soit X la variable aléatoire qui a pour valeur le nombre de malades. Calculer la probabilité d'obtenir $X = k$ pour k variant de 0 à 5.
- La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est :
$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$
Déterminer la densité, la probabilité que $X > 2$ et la probabilité que $-3 < X < 4$.
- Dans un groupe de 15 personnes (8 F et 7 H), on veut constituer une équipe de 5 personnes. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'hommes dans cette équipe.
 - Calculer la loi de probabilité de X .
 - Calculer la probabilité que l'équipe ait au plus 3 hommes.
 - Calculer la probabilité l'équipe ait au plus 3 femmes.
- Une coopérative vinicole vend des bouteilles contenant en moyenne 5 l. de vin avec une variance de 0.01. On considère que le contenu de chaque bouteille peut être représenté par une variable aléatoire suivant une loi normale. Calculer la probabilité qu'une bouteille contienne au moins 4.95 l de vin.
- Supposons que le couple (X, Y) de variables aléatoires ait la loi de probabilité suivante :

$X \backslash Y$	-3	2	4
1	0,1	0,2	0,2
3	0,3	0,1	0,1

 - Calculer les lois de probabilité de X et de Y .
 - Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.
 - Calculer la corrélation de X et Y .
 - Est-ce que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes ?
- Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]0, \pi[$. Calculer $E(\sin(X))$.

PROBABILITES

TD n° 6

1. Déterminer l'espérance et l'écart type de la loi d'une variable aléatoire normale X sachant que $P(X \leq 2) = 0,5793$ et $P(X > 5) = 0,2119$.
2. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes ayant les lois de probabilité :

K	1	2
$P(X=k)$	0,6	0,4

K	5	10	15
$P(Y=k)$	0,2	0,5	0,3

Calculer la loi de probabilité du couple (X, Y) .

3. Un homme ivre sort d'un bar qui se trouve le long d'une allée bordée d'arbres, avec un arbre tous les 10 mètres. Pour ne pas tomber, cet homme s'appuie sur chaque arbre pour se reposer avant de continuer la route. Comme il a l'esprit confus, certaines fois il se trompe de direction : à chaque arbre il continue dans la bonne direction (sa maison) avec probabilité $3/5$ alors qu'il va dans le mauvais sens avec probabilité $2/5$. A quelle distance du bar se trouvera-t-il, en moyenne, après 100 déplacements ?
4. Un avion long courrier pèse 120 t. à vide. Les consignes de sécurité lui interdisent de décoller s'il pèse plus de 130,5 t. Il emporte 100 passagers. Le poids d'un passager et de ses bagages suit une loi normale d'espérance 100 kg et d'écart-type 20 kg. Quelle est la probabilité de décollage ?
5. Les fourmis du haut plateau du Katanga ont les yeux bleus, exceptées les albinos qui ont les yeux jaunes. Chaque fourmi a une chance sur 10 d'être albinos. Un éléphant vient s'abreuver au bord du lac. Il écrase 453 fourmis rouges. Soit X le nombre de fourmis aux yeux jaunes victimes du pachyderme.
 - a) Quelle est la loi de probabilité de X ? Calculer $E(X), Var(X)$.
 - b) Par quelle loi peut on approcher $\tilde{X} = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$?
 - c) Calculer $P(20 > X > 50)$.