13. Fonctions Trigonometriques

Exercice 1

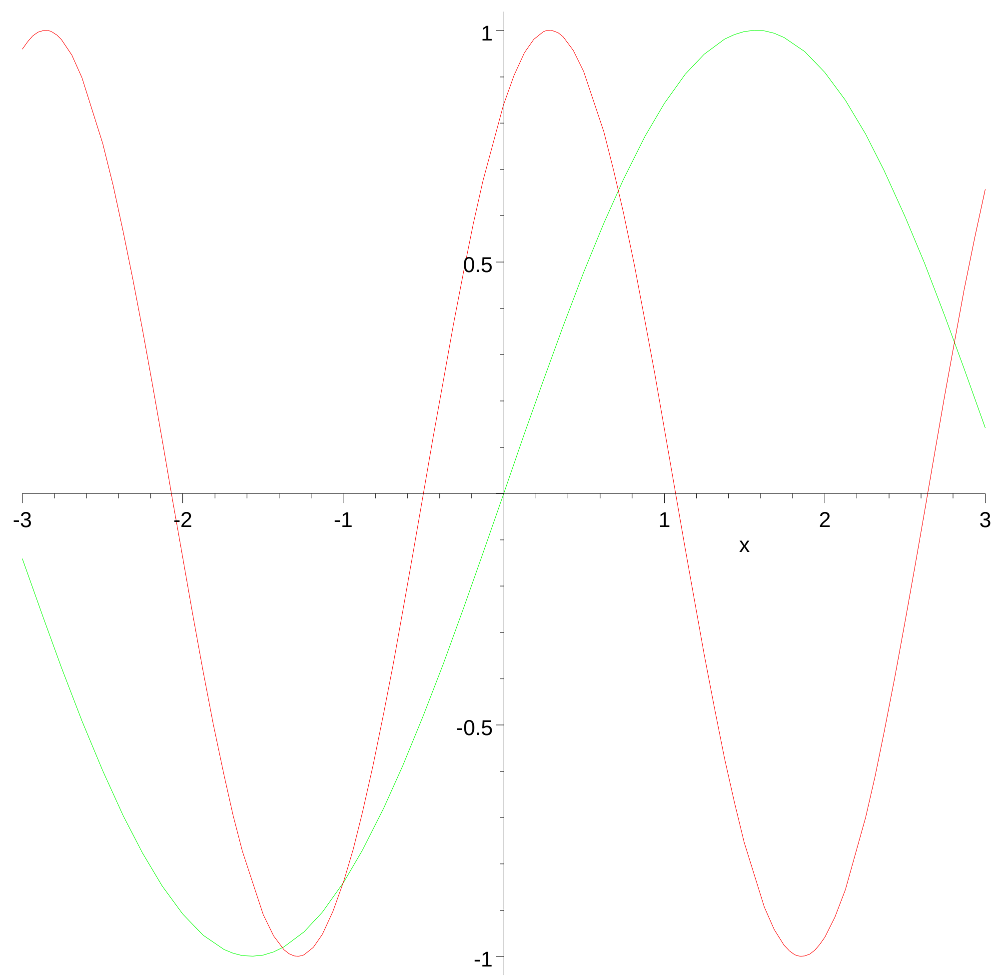
Quelle est la periode des fonctions suivantes ?

f(x)=sin(2x+1)

```
> f:= x -> sin(2*x+1);
```

$$f := x \to \sin(2\,x+1)$$

```
> plot([f(x),sin(x)],x=-3..3);
```



La periode de f est deux fois plus petite que celle de sinus, c’est Pi.

```
> f(x+Pi);
```

$$\sin(2x+1)$$

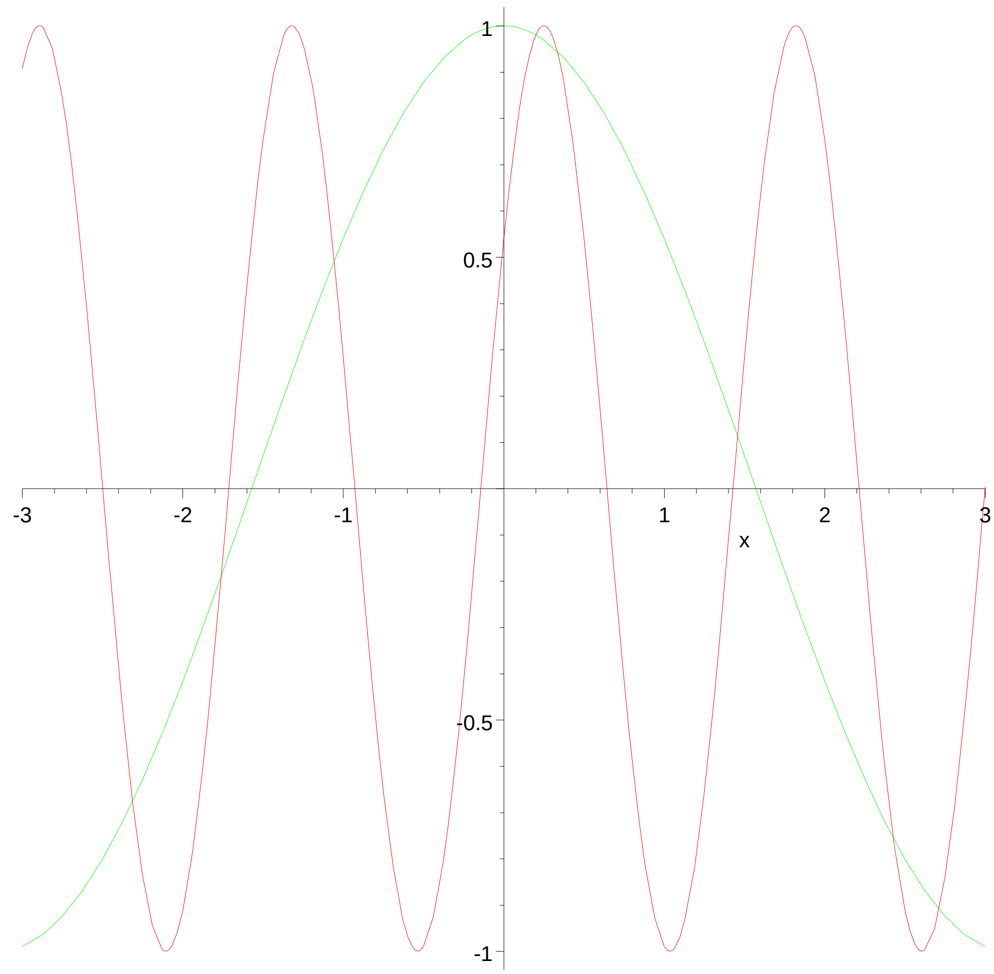
Comme 2Pi; est la plus petite periode de sin, Pi; est la (plus petite) periode de f.

g(x)=cos(4x-1)

```
> g:= x->cos(4*x-1);
```

$$g := x \to \cos(4x-1)$$

```
> plot([g(x),cos(x)],x=-3..3);
```



La periode g est 4 fois plus petite que celle de cosinus, c'est $\frac{\pi}{2}$.

```
> g(x+4*Pi);
```

$$\cos(4x-1)$$

C'est la plus petite car T est une periode de g si et seulement si 4T est une periode de cosinus.

Exercice 2

Soit f(x)=cos(x)(1-2cos(x))

```
> restart:
> f:=x->cos(x)*(1-2*cos(x));
```

$$f := x \to \cos(x)\,(1-2\cos(x))$$

Domaine d'etude

Il suffit de l'etudier sur [0,π], Pourquoi ?

f est 2π - periodique

```
> f(x+2*Pi);
```

$$\cos(x)\,(1-2\cos(x))$$

f est paire :

```
> f(-x);
```

$$\cos(x)\,(1-2\cos(x))$$

Pour reconstruire ensuite f, il faudra
1. la symetriser par rapport a l'axe x=0
2. puis la periodiser.

Calcul de la derivee

```
> derivee:=diff(f(x),x);
```

$$derivee := -\sin(x)\,(1-2\cos(x))+2\cos(x)\sin(x)$$

```
> derivee:=expand(derivee);
```

$$derivee := -\sin(x)+4\cos(x)\sin(x)$$

```
> derivee:=factor(derivee);
```

$$derivee := \sin(x)\,(-1+4\cos(x))$$

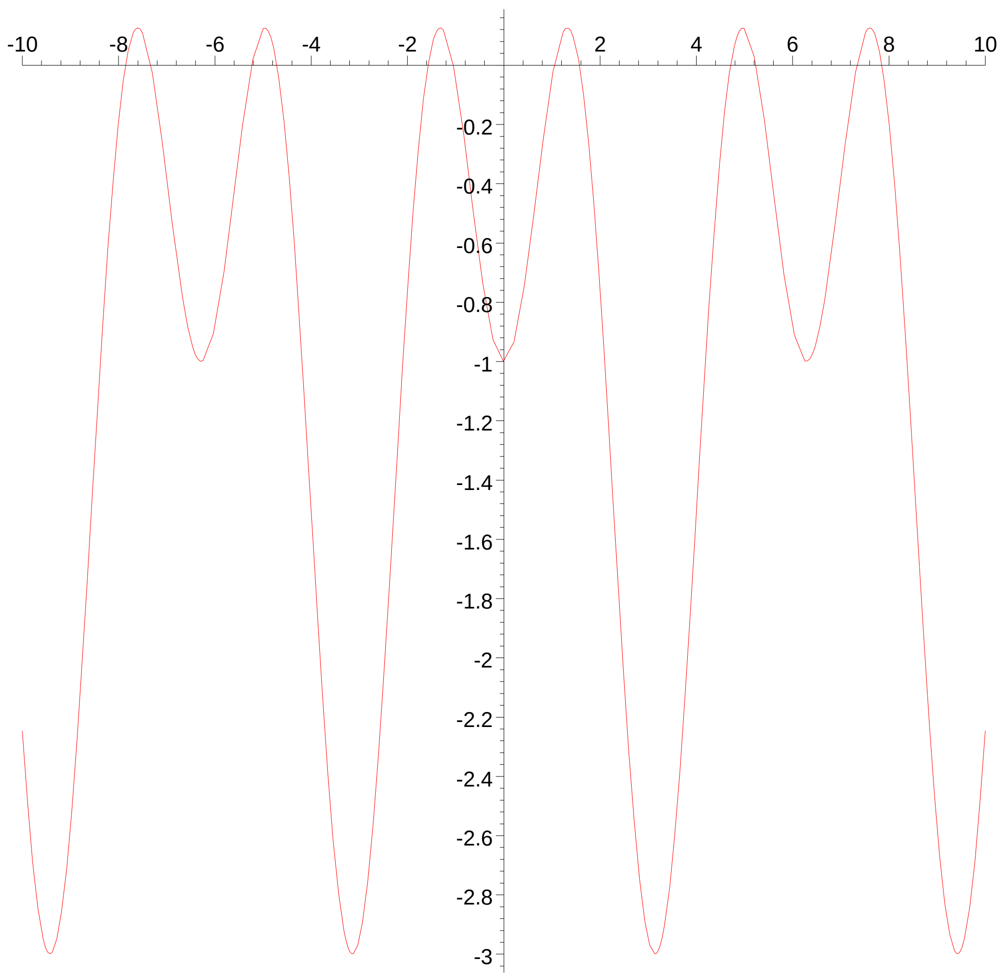
Variations de f

Soit α tel que cos(α)=$\frac{1}{4}$.

f est croissante pour x <α , et decroissante pour x > α.

Trace de f sur R.

```
> plot(f);
```



En deduire la courbe representative de g(x)=sin(x)(1-2sin(x))

f(π/2-x)=g(x)

```
> f(Pi/2-x);
```

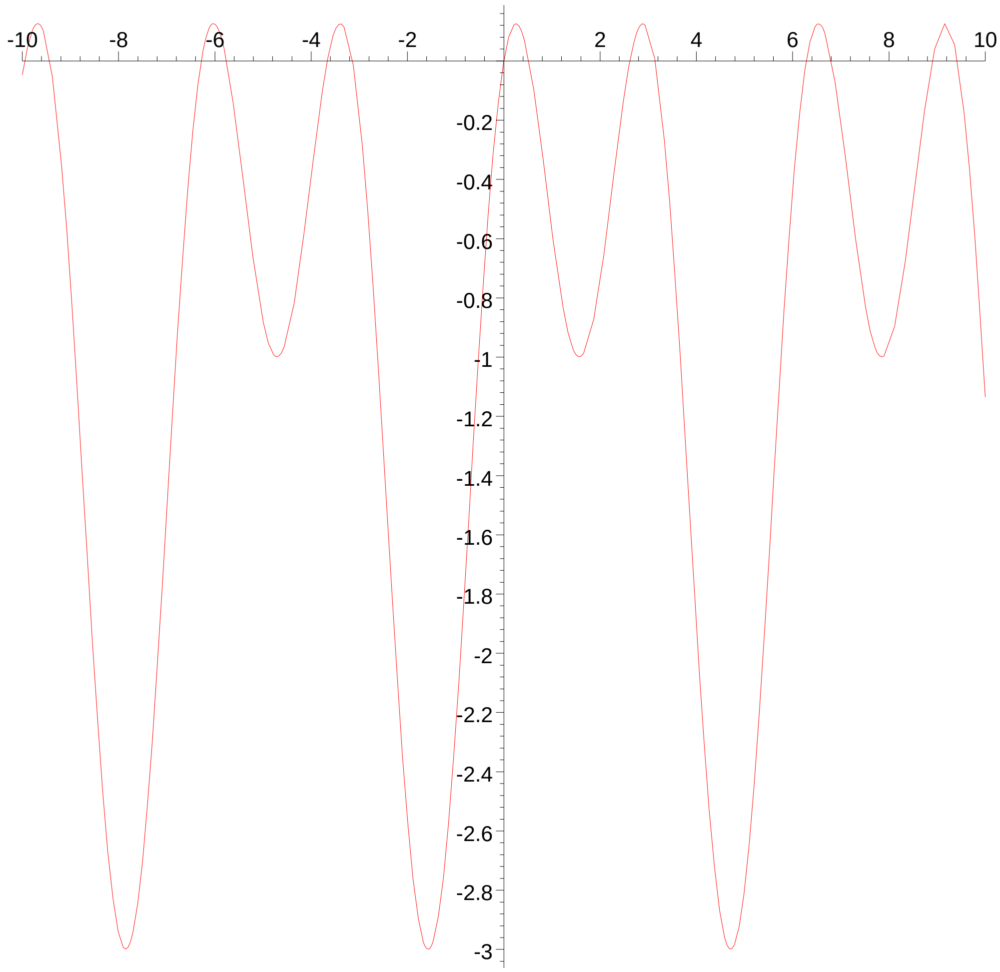
$$\sin(x)\,(1-2\sin(x))$$

Pour tracer g(x) : on symetrise f par rapport a l'axe x=$\frac{\pi}{4}$.

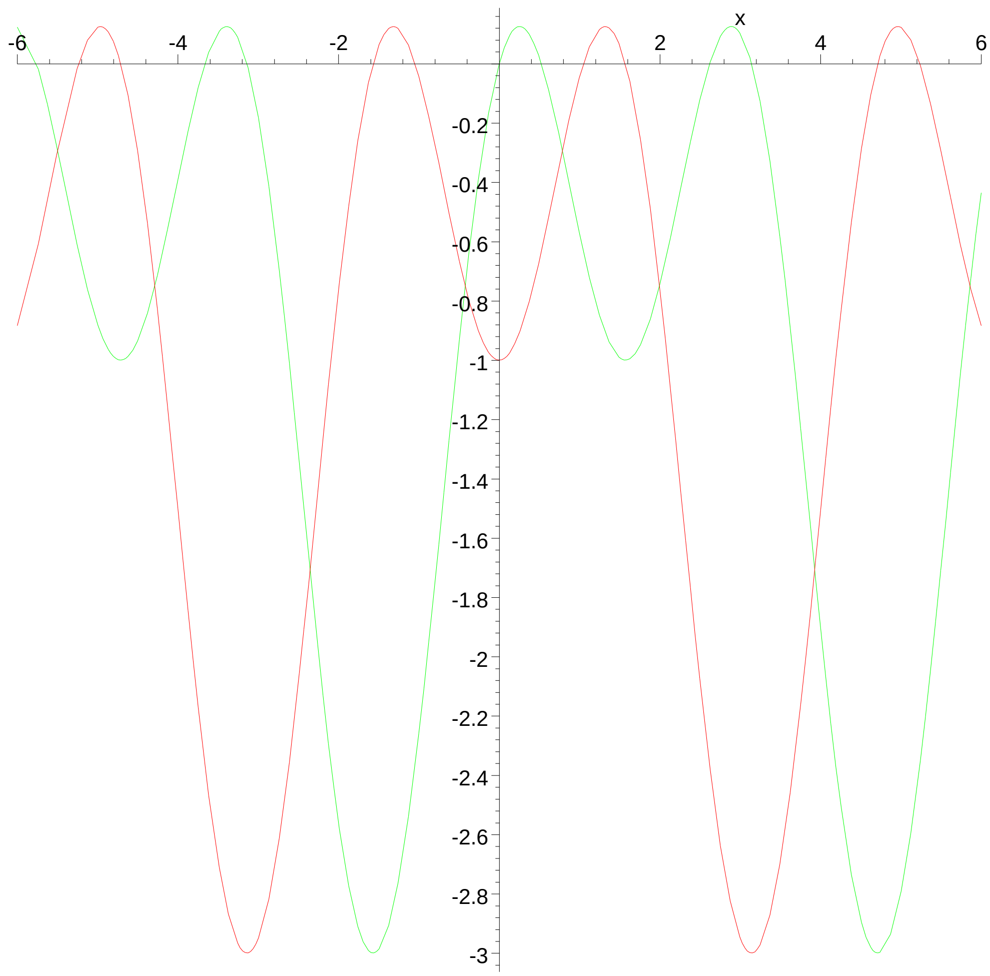
```
> g:= x -> sin(x)*(1-2*sin(x));
```

$$g := x \rightarrow \sin(x)\,(1-2\sin(x))$$

```
> plot(g);
```




```
> plot([f(x),g(x)],x=-6..6);
```




```
>
```

Exercice 3

Etude de $f(x)=\sin^2(x)+\cos(x)$

```
> restart:
> f:= x -> sin(x)^2+cos(x);
```

$$f := x \to \sin(x)^2 + \cos(x)$$

Domaine d etude

f est 2π periodique:

```
> f(x+2*Pi);
```

$$\sin(x)^2+\cos(x)$$

On peut donc restreindre l'etude a [- π; π]

f est paire

```
> f(-x);
```

$$\sin(x)^2+\cos(x)$$

On peut donc restreindre l'etude a [0; π]

Pour tracer ensuite f, on commencera par la symetriser par rapport a l'axe x=0 puis on la periodisera.

Etude et Trace de f

```
> derivee:=diff(f(x),x);
```

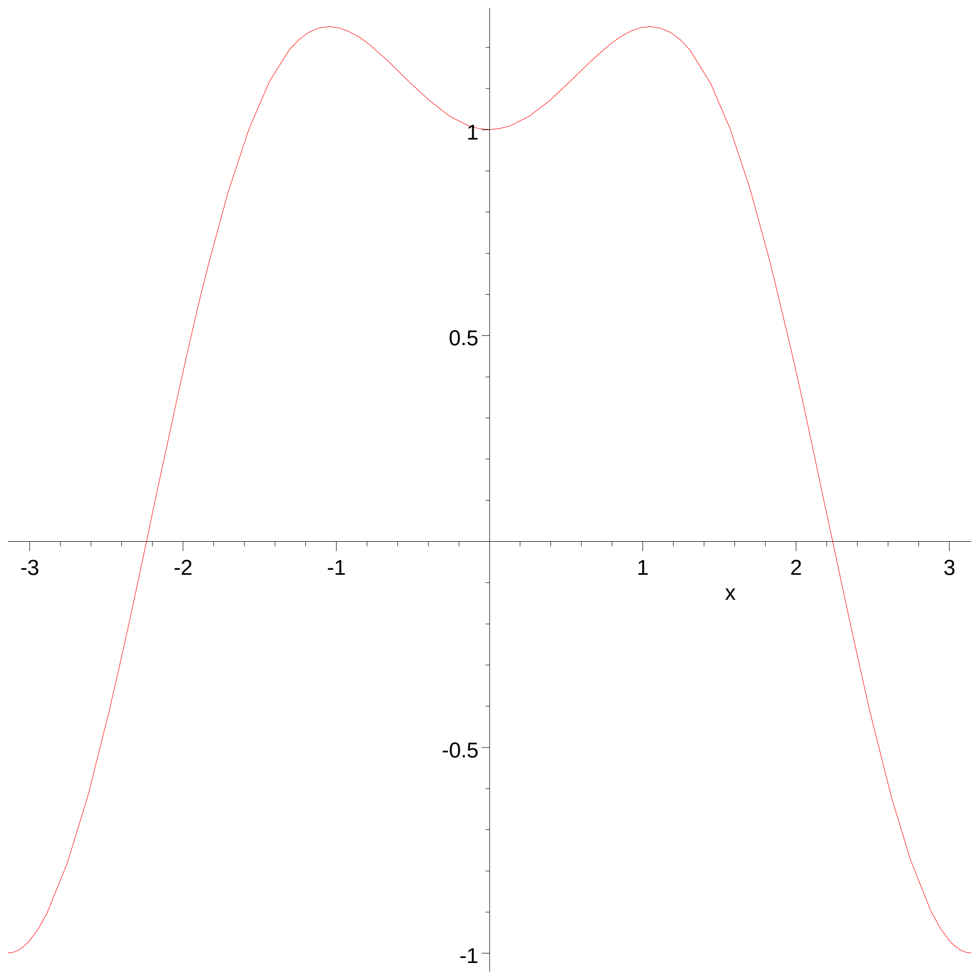
$$derivee := 2\sin(x)\cos(x)-\sin(x)$$

```
> derivee:=factor(derivee);
```

$$derivee := \sin(x)\,(2\cos(x)-1)$$

la derivee est positive si x < $\frac{\pi}{3}$ et negative sinon.

```
> plot(f(x),x=-Pi..Pi);
```



Nombre de solution de $\sin^2(x) + \cos(x) = m$

Si $m > \frac{5}{4}$, pas de solutions

si $1 < m < \frac{5}{4}$, 4 solutions

si m=1, 3 solutions

si $-1 \le m < 1$, 2 solutions

si m < -1 pas de solutions

Exercice 4 : Inegelite de Huygens

Prouver que pour toux de $[0;\frac{\pi}{2}[$, $3\,x \le 2\,\sin(x) + \tan(x)$

```
> restart:
> g:= x -> 3*x;
```

$$g := x \to 3\,x$$

```
> h:= x -> 2*sin(x)+tan(x);
```

$$h := x \to 2\,\sin(x) + \tan(x)$$

```
> f:= x -> 2*sin(x)+sin(x)/cos(x)-3*x;
```

$$f := x \to 2\,\sin(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - 3\,x$$

Remarque : quel est l'ensemble de definition de f ?

Signe de la derivee de f

```
> derivee:=diff(f(x),x);
```

$$derivee := 2\,\cos(x) - 2 + \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2}$$

```
> derivee:=derivee*cos(x)^2;
```

$$derivee := \left(2\,\cos(x) - 2 + \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2}\right)\cos(x)^2$$

```
> derivee:=simplify(derivee);
```

$$derivee := 2\,\cos(x)^3 - 3\,\cos(x)^2 + 1$$

Comme $\cos^2(x)$ est toujours positif la derivee de f et 2*cos(x)^3-3*cos(x)^2+1 ont le meme signe

On pose X=cos(x);

Dans le domaine d'etude X est compris entre 0 et 1.

Etude de P(X)=2X^3-3X^2+1

```
> P:=2*X^3-3*X^2+1;
```

$$P := 2\,X^3 - 3\,X^2 + 1$$

```
> roots(P);
```

$$\left[\left[\frac{-1}{2}, 1\right], [1, 2]\right]$$

Les racines de P sont -0.5 et 1

```
> diff(P,X);
```

$$6\,X^2 - 6\,X$$

La derivee a pour racines 0 et 1.
Elle est donc negative entre 0 et 1.
P est donc decroissant sur [0;1].

```
> subs(X=0,P);
```

$$1$$

```
> subs(X=1,P);
```

$$0$$

Sur [0;1] P est compris entre 0 et 1 et est donc positif.

De cette etude, on conclue que la derivee de f est positive sur l'intervalle considere.

Donc f est croissante sur cet intervalle.

f(0)=0.

f est donc positive su l'intervalle d'etude