13. Fonctions trigonométriques

1. Quelle est la période des fonctions suivantes : $f(x) = \sin(2x+1), g(x) = \cos(4x-1)$.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos(x)(1-2\cos(x))$.
   - Pourquoi suffit-il de l'étudier sur $[0,p]$?
   - Montrer que $f'(x) = (4\cos(x)-1)\sin(x)$.
   - Soit $a \in [0,p], \cos(a) = \frac{1}{4}$. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle d'étude.
   - Tracer la courbe représentative de f sur R.
   - En déduire le tracé de la courbe représentative de $g(x) = \sin(x)(1-2\sin(x))$.

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin^2(x) + \cos(x)$.
   - Pourquoi suffit-il de l'étudier sur $[0,p]$?
   - Etudier f et tracer sa courbe représentative sur $[-p,p]$.
   - Utiliser cette courbe pour discuter selon les valeurs du réel m du nombre de solutions de $\sin^2(x) + \cos(x) - m = 0$.

4. Inégalité de Huygens : prouver que pour tout x de $\left[0;\frac{p}{2}\right]$,on a $2\sin(x) + \tan(x) \geq 3x$.
   - Il faut comparer sur l'intervalle donné les fonctions $h(x) = 2\sin(x) + \tan(x), g(x) = 3x$. La méthode usuelle consiste à étudier la différence de ces deux fonctions. On considère alors la fonction f = h – g . On remarque que f(0) = 0. Montrer que pour prouver l'inégalité il suffit de montrer que f est croissante sur l'intervalle.
   - Montrer que la dérivée de f est du même signe que $2\cos^3(x) - 3\cos^2(x) + 1$.
   - Etudier le polynôme $P = 2X^3 - 3X^2 + 1$ et montrer qu'il est positif dans l'intervalle [0,1] puis conclure.