Révisions.Corrigés.

Vendredi 7 juin 2002

1 Dérivées.

1.1 DEFINITION D'UNE DERIVEE.

EXERCICES:

1. La fonction $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ est -elle dérivable en 0?

Voir le corrigé de l'interro 2.

2. La fonction $f(x) = x^2\sin(\frac{1}{x})$ est -elle dérivable en 0?

La fonction est bien dérivable en 0. En effet $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin(\frac{1}{h}) = 0$. Comme on l'a déjà vu dans le TD sur les limites et la continuité.

3. Soit $f(x) = x^2$ si $x \leq 0$ et $= 0$ sinon. f est-elle continue en 0?, dérivable en 0?, continument dérivable en 0? deux fois dérivable?

Voir le corrigé dans la feuille sur les dérivées.

1.2 THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS.

EXERCICES:

1. Montrer que $\forall x \in I\!R$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

Corrigé dans la feuille de TD sur la dérivée.

2. Montrer que $\forall x \in I\!R$, $\exp(x) \geq x + 1$.

Corrigé dans la feuille de TD sur la dérivée.

3.Montrer que $\forall n > 0$, $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$. En déduire la nature de la série $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$.

Appliquons le théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln(x)$ *entre* n *et* $n+1$. *Alors* $\exists c \in]n; n+1[$ *tel que* $f(n+1) - f(n) = f'(c)(n+1-n)$, *soit* $\ln(n+1) - \ln(n) = \frac{1}{c}$. *Mais comme* $n < c < n+1$, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$. *Donc* $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$. *Donc* $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} > \sum_{i=1}^{n}\ln(i+1) - \ln(i) = \sum_{i=1}^{n}\ln(i+1) - \sum_{i=1}^{n}\ln(i) = \sum_{i=2}^{n+1}\ln(i) - \sum_{i=1}^{n}\ln(i) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$. *Or la suite* $\ln(n+1)$ *a pour limite* $+\infty$. *Comme* $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} > \ln(n+1)$, *la série diverge.*

1.3 SAVOIR DERIVER.

EXERCICES :

1. Calculer la dérivée de $f(x) = Arctan(x)$.

Il faut savoir que $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Si on ne s'en souvient plus, il faut aussi savoir la retrouver en utilisant la formule de la dérivation des fonctions inverses. $Arctan(c)$ est la réciproque de $g(x) = \tan(x)$. $g'(x) = 1 + tan^2(x)$ et $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(Arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$.

2. Calculer la dérivée de $f(x) = \ln(\cos(x))$.

On pose $u = \cos(x)$, $f(x) = \ln(u)$ et donc $f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.

3. Calculer la dérivée de $f(x) = \cos(\sin(x))$.

On pose $u = \sin(x)$, $f(x) = cos(u)$ et donc $f'(x) = -u'\sin(u) = \cos(x)\sin(\sin(x))$.

2 Formule de Taylor et applications.

EXERCICES :

1. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre n pour $f(x) = ln(1+x)$ en 0.

Voir le premier exercice du TD 6 d'analyse.

2. Calculer le développements de Taylor en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = tan(x)$.
Voir le TP 15 de base de maths.
3. Calculer le développements de Taylor en π à l'ordre 3 de $f(x) = cos(sin(x))$.
Voir le TP 15 de base de maths.

2.1 APPLICATIONS.

C. Calcul de limites.
EXERCICES.
1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{1-\exp(2x)}$.
Voir le TP 15bis de base de maths.
2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^x-4}{x-2}$.
Voir le TP 15bis de base de maths.
D. Applications aux études graphiques de fonctions.
RECHERCHE D'ASYMPTOTE.

EXERCICE: Rechercher grâce aux développements limités les asympotes de $f(x) = x^2\ln(1+\frac{1}{x})$.

Posons $U = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{U^2}(\ln(1+U))$. Quand x tend vers $+\infty$, U tend vers 0. Mais on connaît le développement limité de $\ln(1+U)$ en 0. $\ln(1+U) = U - \frac{U^2}{2} + \frac{U^3}{3} + U^3\varepsilon(U)$ où $\lim_{U\to 0}\varepsilon(U) = 0$. Alors $f(x) = \frac{U-\frac{U^2}{2}+\frac{U^3}{3}+U^3\varepsilon(U)}{U^2} = \frac{1}{U} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}U + U\varepsilon(U) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$. Donc $g(x) = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à f en ∞. En $+\infty$, la courbe est au dessus de l'asymptote et en $-\infty$, la courbe est en dessous.

ETUDE DE POINTS CRITIQUES.
EXERCICE : Etude de $\cos(x)\cosh(x)$ en 0.
Les développements limités en 0 sont :
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$.
$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$.
Donc $\cos(x)\cosh(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$
$= 1 + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$. Donc la première dérivé non nulle de f est celle d'ordre 4 c'est-à-dire d'ordre pair. Donc f admet soit un minimum soit un maximum en 0. Comme ce terme d'ordre 4 est positif, f est en fait un minimum.

3 Fonctions inverses.

3.1 Fonctions trigonométriques inverses

3.2 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

3.3 Exercices

1. $cosh(x) + sinh(x)$ est-elle inversible? Si oui quelle est son inverse?
voir TP 16 de Base de Maths.
2. Etude complète de $Arcsin(2x^2-1)$.
voir Feuille 7 d'analyse.
3. Etude complète de $\log(\cosh(x))$.
voir TP 16 de Base de Maths.
4. Etude complète de $argsh(\cosh(x))$.
voir TP 16 de Base de Maths.
5. Donner une expression logarithmique de argsh(x), argch(x) et argth(x).
voir Feuille 7 d'analyse.

4 Séries.

EXERCICES:
1. Etude de la série de terme général U_n

$U_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Donc $\sum_{i=1} nU_i = \sum_{i=1} n\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \sum_{i=1} n\frac{1}{i} - \sum_{i=1} n\frac{1}{i+1} = \sum_{i=1} n\frac{1}{i} - \sum_{i=2} n+1\frac{1}{i} = 1 - \frac{1}{n+1}$ qui tend vers 1 en $+\infty$. La série converge et a pour somme 1.

2.Etudier la série de terme général : $U_n = log(1 - \frac{1}{n^2})$.

voir Feuille 8 d'analyse.

3.Etudier la série de terme général : $U_n = \frac{3n+1}{n(n+1)(n+2)}$.

voir Feuille 8 d'analyse.

EXERCICES

2. Nature de la série de terme général $\frac{\cos(n\Pi)}{n^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{n^\alpha}{\sqrt{(n-1)!}}$ avec $\alpha \geq 0$, $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$.

a) $\cos(n\Pi) = (-1)^n$ on se retrouve avec une série alternée. On vérifie les hypothèses du théorème concerné. Et on en déduit que la série converge.

b) On utilise le critère de d'Alembert. On trouve que $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0 < 1$. Donc la série converge.

c) On multiplie par l'expression conjuguée. On s'aperçoit que la limite de la suite est 1. Or si une série converge, son terme général tend nécessairement vers 0. Donc la série diverge.

5 Intégrales.

5.1 DEFINITION(pour une fonction positive).

EXERCICES

1.Retrouver grâce à la définition $\int_a^b xdx$.

voir la feuille 9 d'analyse.

2.

5.2 PROPRIETES

5.3 PRIMITIVES

5.4 CALCUL

EXERCICES :

1. exercice 3 feuille 9 de TD d'analyse.

2.