Corrigé de la Feuille 7. Fonctions trigonométriques et trigonométriques hyperboliques inverses.

1 Simplifier des expressions

$\sin(\arcsin(x))$: arcsin est la fonction réciproque de la fonction sin de l'intervalle $[-1;1]$ dans $[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}]$. Donc $\forall x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$ et $\forall x \in [-1;1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$. C'est la définition d'une fonction réciproque. Donc $\forall x \in [-1;1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$.

$\cos(\arcsin(x))$: On va utiliser le résultat précédent. Pour relier le cosinus et le sinus, on utilise la relation bien connue : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ à $\arcsin(x)$. Donc $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2\arcsin(x) = 1 - x^2$. Et donc $\cos(\arcsin(x)) \in \{\sqrt{1-x^2}; -\sqrt{1-x^2}\}$.

Mais on peut découvrir une indication sur le signe de $\cos(\arcsin(x))$. En effet, si on regarde attentivement la définition de arcsin, $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. C'est un angle entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Son cosinus est donc positif. Il n'y a donc qu'une solution possible :

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

2 Etude de $f(x) = \arcsin(2x^2 - 1)$

L'étude d'une fonction se déroule de la manière suivante :

1. Domaine de définition.
2. Domaine d'étude (recherche de parité ou périodicité selon les cas).
3. Calcul de la dérivée. Signe.
4. Variations de la fonction.
5. Limites, tangentes en des points particuliers, valeurs particulières.
6. Représentation graphique.

Allons-y :

Domaine de définition : arcsin, l'objet de toute notre attention depuis le début de la feuille, est une fonction définie sur l'intervalle $[-1;1]$. Donc l'ensemble de définition $Df = \{x$ tels que $-1 \leq 2x^2 - 1 \leq 1$.

$$-1 \leq 2x^2 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq 2x^2 \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq x \leq 1.$$

Donc $Df = [-1; 1]$.

Domaine d'étude $2x^2 - 1$ est une fonction paire.

Donc $f(-x) = \arcsin(2(-x)^2 - 1) = \arcsin(2x^2 - 1) = f(x)$. Donc f est paire. Donc la représentation de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On peut donc restreindre notre étude à l'intervalle $[0; 1]$ et on complètera notre étude par symétrie.

Calcul et signe de la dérivée : $f(x) = g(u)$ avec $g = \arcsin$ et $u = 2x^2 - 1$. Pour dériver, on utilise la formule qui permet de dériver les fonctions composées : $f'(x) = u'g'(u)$. $u'(x) = 4x$, celui-là, on le connaît bien. Par contre la dérivée d'arcsin(x), c'est nouveau. C'est à apprendre, c'est dans le cours. On peut la retrouver en utilisant la formule qui donne la dérivée d'une fonction réciproque : ${h^{-1}}'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))}$. Ici $h = \sin(x)$ et donc $g' = \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ grâce à l'exercice 1. On revient maintenant à $f'(x) = u'g'(u) = \frac{4x}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} = \frac{4x}{\sqrt{1-(4x^4-4x^2+1)}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2-4x^4}}$. Deux choses apparaissent alors: le signe de f est égal au signe de x. Mais attention $\sqrt{4x^2 - 4x^4}$, le dénominateur s'annule en 0 et en 1. Et donc $f'(x)$ n'est pas définie en 0 ni en 1.

Variations de f :

x	0		1
f'	$\Vert 2$	$+$	$\infty \Vert$
f	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

limites, tangentes et compagnie : $f(0) = \arcsin(2 \times 0 - 1) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $f(1) = \arcsin(2 \times 1 - 1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. La dérivée n'est pas définie en 0 et en 1. On a donc besoin des limites :

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 4x^4}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{16x^2}}{\sqrt{4x^2 - 4x^4}}$$

(car $x \geq 0$)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2.$$

Représentation On commence par la représenter sur $[0; 1]$. Puis on symétrise.

Cela donne la figure 1.

3 Etude de $f(x) = \operatorname{argth}(x)$.

On reprend le schéma de l'exercice 2.

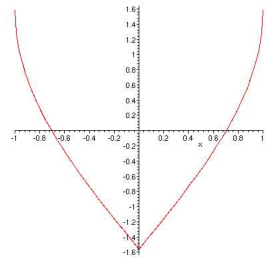


FIG. 1 – $f(x) = \arcsin(2x^2 - 1)$

Domaine de définition : Pour cela, on doit savoir sur quel intervalle $\text{th}(x)$ est bijective. Petit rappel $\text{th}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$ (un petit tour dans le cours devrait vous en convaincre). Donc $\text{th}(x)$ est définie sur tout $\mathbb{R}$ car exp est toujours positive. Encore une petite visite dans le cours (ou dans un livre) vous montrera que $\text{th}(x)$ a pour limite -1 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, elle aussi strictement croissante et le tour est joué : $\text{th}(x)$ est bijective de $]-\infty; +\infty[$ dans $]-1; 1[$. Elle admet donc une fonction réciproque $\text{argth}(x)$ définie de $]-1; 1[$ dans $]-\infty; +\infty[$.

Domaine d'étude : On va montrer ici que $\text{argth}(x)$ est impaire. Ce n'est pas beaucoup plus fatiguant de faire l'étude en entier si vous n'êtes pas à l'aise avec cette preuve.

Soit $y = \text{argth}(x)$, on veut montrer que $-y = \text{argth}(-x)$.

$y = \text{argth}(x) \Leftrightarrow x = \text{th}(y) \Leftrightarrow -x = -\text{th}(y)$. Mais th est une fonction impaire donc $-x = -\text{th}(y) = \text{th}(-y)$. $-x = \text{th}(-y) \Leftrightarrow -y = \text{argth}(-x)$. C'est bien ce qu'on voulait prouver. $\text{argth}(x)$ est impaire, on va l'étudier sur $[0; 1]$ seulement. On déduit le reste par symétrie centrale autour de l'origine.

Calcul de la dérivée : C'est la même méthode que pour arcsin. On utilise la formule qui donne la dérivée d'une fonction réciproque. ${h^{-1}}'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))}$ avec $h(x) = \text{th}(x)$. Mais quelle est donc la dérivée de th. C'est une fraction avec des exponentielles, on peut la recalculer avec la formule qui donne la dérivée d'un quotient. On peut aussi retenir les dérivées de sh et ch. C'est encore plus facile que pour sin et cos : $\text{sh}' = \text{ch}$ et $\text{ch}' = \text{sh}$. On utilise la dérivée d'un quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ et on obtient après simplification $\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x)$. Donc $\text{argth}'(x) = \frac{1}{1-\text{th}^2(\text{argth}x)} = \frac{1}{1-x^2}$. $f'(x) \geq 0$ pour $x \in]-1; 1[$.

Variations : f est croissante strictement sur $]-1; 1[$ et donc sur $[0; 1[$.

x	0 1
f'	$+$
f	$0 \nearrow +\infty$

Limite et compagnie : Par définition, $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$, $f(0) = 0$ car $\text{th}(0) = 0$.

Et voilà argth : Figure 3.

4 Exprimer explicitement argsh, argch et argth

$y = \text{argsh}(x)$: Nous cherchons à exprimer y explicitement en fonction de x.

$y = \text{argsh}(x) \Leftrightarrow \text{sh}(y) = x$, or $\text{sh}(y) = \frac{\exp(y)-\exp(-y)}{2}$. On a donc $x = \frac{\exp(y)-\exp(-y)}{2}$, il faut maintenant exprimer y en fonction de x. $x = \frac{\exp(y)-\exp(-y)}{2} \Leftrightarrow 2x = \exp(y) - \exp(-y)$. Posons $Y = \exp(y)$. Alors $\exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{Y}$. Ce qui donne $2x = Y - \frac{1}{Y} \Leftrightarrow 2xY = Y^2 - 1$. C'est un polynôme en Y : $Y^2 - 2xY - 1 = 0$. Ce polynôme a des solutions réelles si et seulement si le discriminant $\Delta = (2x)^2 + 4$ est positif. $\Delta = 4x^2 + 4 > 0$. Donc $Y \in \{\frac{2x+\sqrt{4x^2+4}}{2}, \frac{2x-\sqrt{4x^2+4}}{2}\} = \{x + \sqrt{x^2+1}, x - \sqrt{x^2+1}\}$. Mais $Y = \exp(y) > 0$. Or la solution $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ car $x^2 < x^2 + 1$ et donc $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$. Donc la seule possible est $Y = \exp(y) = x + \sqrt{x^2+1}$.

Donc $y = \text{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

$y = \text{argch}(x)$: Nous cherchons à exprimer y explicitement en fonction de x.

$y = \text{argch}(x) \Leftrightarrow \text{ch}(y) = x$, or $\text{ch}(y) = \frac{\exp(y)+\exp(-y)}{2}$. On a donc $x = \frac{\exp(y)+\exp(-y)}{2}$, il faut maintenant exprimer y en fonction de x. $x = \frac{\exp(y)+\exp(-y)}{2} \Leftrightarrow 2x = \exp(y) + \exp(-y)$. Posons $Y = \exp(y)$. Alors $\exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{Y}$. Ce qui donne $2x = Y + \frac{1}{Y} \Leftrightarrow 2xY = Y^2 + 1$. C'est un polynôme en Y : $Y^2 - 2xY + 1 = 0$. Ce polynôme a des solutions réelles si et seulement si le discriminant $\Delta = (2x)^2 - 4$ est positif. Mais $x = \text{ch}(y) > 1$ (voir le cours) donc $\Delta = 4x^2 - 4 > 0\ \forall x$ tel qu'il existe y, $x = \text{ch}(y)$. Donc $Y \in \{\frac{2x+\sqrt{4x^2-4}}{2}, \frac{2x-\sqrt{4x^2-4}}{2}\} = \{x + \sqrt{x^2-1}, x - \sqrt{x^2-1}\}$. On a toujours $Y = \exp(y) > 0$, mais cette fois, cela ne suffit pas car les deux solutions sont positives. Il faut regarder plus précisément. L'idéal serait d'utiliser une valeur en un point, mais la seule valeur particulière de argch que l'on connaisse est $\text{argch}(1) = 0$. Mais les 2 racines donnent la même réponse. Par contre, on connaît la limite en l'infini (voir cours). $\lim_{x \to +\infty} \text{argch}(x) = +\infty$. Donc $\lim_{x \to +\infty} Y = \lim_{x \to +\infty} \exp(\text{argch}(x)) = +\infty$. Voyons ce qu'il en est pour les deux racines :

$\lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{x^2 - 1} = +\infty + (+\infty) = +\infty$.

Il ne reste plus qu'à espérer que l'autre limite soit différente :

On utilise une technique classique, on multiplie par l'expression conjuguée :

$\lim_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

$= \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0.$

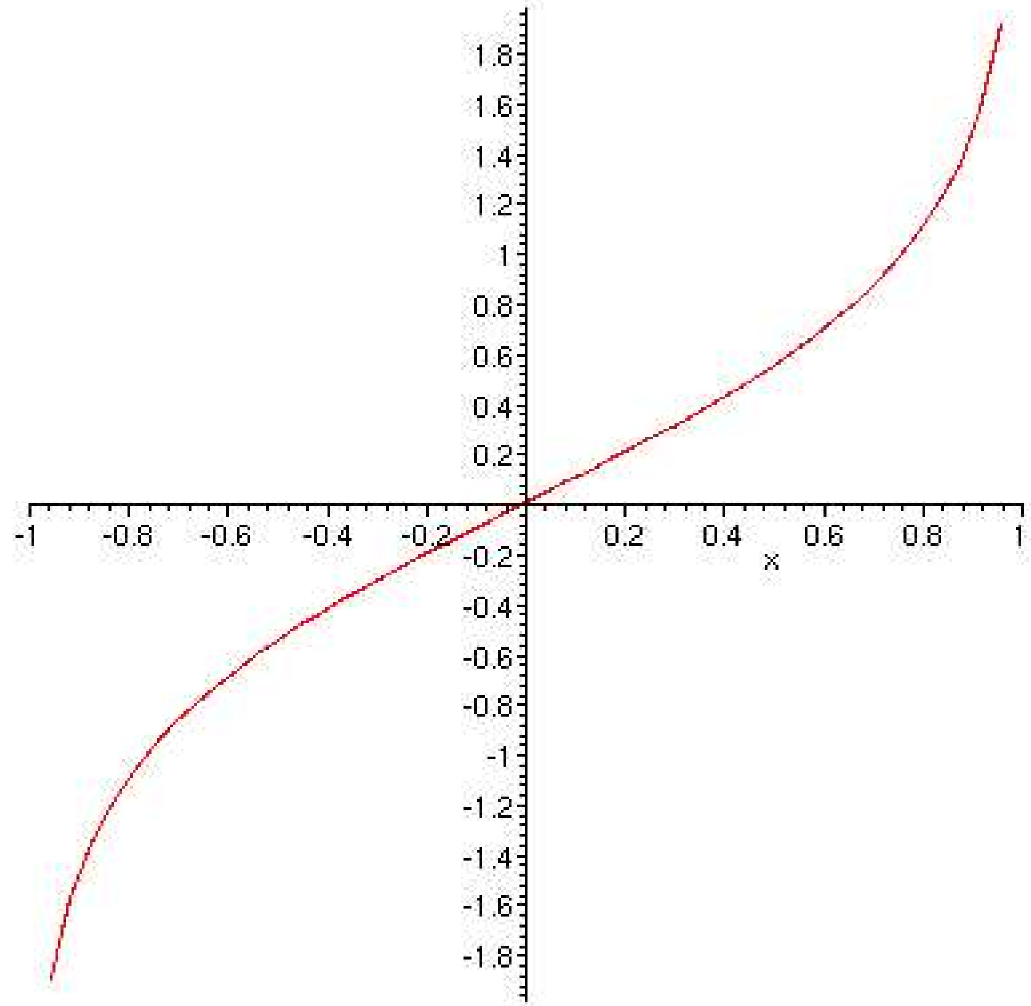
Ouf, une seule des deux racines à la bonne limite en $+\infty$: $Y = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

Donc $y = \text{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

$y = \text{argth}(x)$: Nous cherchons à exprimer y explicitement en fonction de x. Celle-ci est plus simple.

$y = \text{argth}(x) \Leftrightarrow \text{th}(y) = x$, or $\text{th}(y) = \frac{\exp(y) - \exp(-y)}{\exp(y) + \exp(-y)}$. On a donc $x = \frac{\exp(y) - \exp(-y)}{exp(y) + \exp(-y)}$, il faut maintenant exprimer y en fonction de x. $x = \frac{\exp(y) - \exp(-y)}{exp(y) + \exp(-y)} \Leftrightarrow (exp(y) + \exp(-y))x = \exp(y) - \exp(-y)$. Posons $Y = \exp(y)$. Alors $\exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{Y}$. Ce qui donne $(Y + \frac{1}{Y})x = Y - \frac{1}{Y} \Leftrightarrow x(Y^2 + 1) = Y^2 - 1$. C'est un polynôme en Y : $Y^2(1 - x) = 1 + x \Leftrightarrow Y^2 = \frac{1+x}{1-x}$. Bon, maintenant, c'est très simple, le polynôme a 2 solutions car $x = \text{th}(y) \Rightarrow -1 < x < 1$ (cf le cours et l'exercice 3) : $Y \in \{\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}; -\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}\}$. Comme on l'a vu dans le cas de argsh, $Y = \exp(y) > 0$, donc la seule solution possible est la solution positive $Y = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$.

Donc $y = \text{argth}(x) = \ln(\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}) = \dfrac{1}{2} \ln(\dfrac{1 + x}{1 - x})$. (c'est souvent sous cette forme qu'on le trouve écrit)



1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
-1.4
-1.6
-1.8