

DL et recherche d'asymptotes

22 avril 2002

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que g est une asymptote à f quand $x \rightarrow \infty$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = 0$. g est une fonction simple (affine $y = ax + b$, ou un polynôme du second degré).

exemple : $f(x) = x + \ln(2) + \frac{4}{\exp(x)+1}$.

En $+\infty$:

Soit $g(x) = x + \ln(2)$. $f(x) - g(x) = -\frac{4}{\exp(x)+1}$ qui tend vers 0 en $+\infty$.

En $-\infty$:

Soit $g(x) = x + \ln(2) + 4$. $f(x) - g(x) = 4 - \frac{4}{\exp(x)+1}$ qui tend vers 0 en $+\infty$.

Quand il n'y a rien d'évident On utilise des développements limités généralisés. C'est-à-dire en l' ∞ . Voyons comment cela fonctionne sur un exemple.

Soit $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$.

Ce que l'on connaît, ce sont les développements limités en 0. On va chercher à se ramener à des développements limités en 0.

$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2} = \sqrt{x^2(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1)} = |x| \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1}.$$

On fait le changement de variable suivant : $X = \frac{1}{x}$. Quand $x \rightarrow \infty$, $X \rightarrow 0$.

$f(x) = f(\frac{1}{X}) = \frac{1}{|X|} \sqrt{1+X+X^2}$. Quel est le développement limité de $\sqrt{1+X+X^2}$ au voisinage de 0. On peut le recalculer en utilisant la formule de Taylor. On peut aussi le faire en utilisant le développement limité de $\sqrt{1+u}$ au voisinage de 0. En effet, dans les formules à connaître, il y a le développement de $(1+u)^\alpha$ en 0.

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} u^n + u^n \varepsilon(u) \text{ avec } \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0.$$

Appliquons là à $\alpha = \frac{1}{2}$ au rang 2.

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + u^2 \varepsilon(u).$$

Prenons $u = X + X^2$. Alors $f(x) = f(\frac{1}{X}) = \frac{1}{|X|} \sqrt{1+X+X^2} = \frac{1}{|X|} \sqrt{1+u} = \frac{1}{|X|} (1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + u^2 \varepsilon(u)) = \frac{1}{|X|} (1 + \frac{X+X^2}{2} - \frac{(X+X^2)^2}{8} + (X+X^2)^2 \varepsilon(X+X^2)) = \frac{1}{|X|} (1 + \frac{X}{2} + \frac{X^2}{2} - \frac{X^2}{8} - \frac{X^3}{4} - \frac{X^4}{8} + (X+X^2)^2 \varepsilon(X+X^2))$.

On pose alors $\varepsilon_1(X) = -\frac{X}{4} - \frac{X^2}{8} + (1+X)^2 \varepsilon(X+X^2)$. Cette quantité tend vers 0 quand X tend vers 0 et $f(x) = f(\frac{1}{X}) = \frac{1}{|X|} (1 + \frac{X}{2} + \frac{3X^2}{8} + X^2 \varepsilon_1(X))$.

Revenons maintenant à notre variable initiale : x .

Quand $x \rightarrow +\infty$, $x > 0$ et $X > 0$. Donc $f(x) = f(\frac{1}{X}) = \frac{1}{|X|} (1 + \frac{X}{2} + \frac{3X^2}{8} + X^2 \varepsilon_1(X)) = \frac{1}{X} (1 + \frac{X}{2} + \frac{3X^2}{8} + X^2 \varepsilon_1(X)) = x(1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x} + \frac{\varepsilon_1(\frac{1}{x})}{x^2}) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \frac{\varepsilon_1(\frac{1}{x})}{x}$.

Ce qui donne $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \frac{\varepsilon_1(\frac{1}{x})}{x}$.

avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{8x} + \frac{\varepsilon_1(\frac{1}{x})}{x} = 0$.

Prenons $g(x) = x + \frac{1}{2}$, alors g est asymptote à f en $+\infty$.

Quand $x \rightarrow -\infty$, $x < 0$ et $X < 0$. Donc $f(x) = f(\frac{1}{X}) = \frac{1}{|X|} (1 + \frac{X}{2} + \frac{3X^2}{8} + X^2 \varepsilon_1(X)) = -\frac{1}{X} (1 + \frac{X}{2} + \frac{3X^2}{8} + X^2 \varepsilon_1(X)) = -x(1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x} + \frac{\varepsilon_1(\frac{1}{x})}{x^2}) = -x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \frac{\varepsilon_1(\frac{1}{x})}{x}$.

Ce qui donne $f(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} - \frac{\varepsilon_1(\frac{1}{x})}{x}$.

avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3}{8x} - \frac{\varepsilon_1(\frac{1}{x})}{x} = 0$.

Prenons $h(x) = -x - \frac{1}{2}$, alors h est asymptote à f en $-\infty$.