Feuille 4 exercice III.

Montrer au sens de la définition que la fonction $f(x) = \frac{5x+3}{x+1}$ est continue au point $x_0 = 1$.

On remarque tout d'abord qu'il n'y a a pas d'indétermination en $x_0 = 1$.
Il faut montrer au sens de la définition de la limite que $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

Définition 1 : $f(1)$ est la limite de $f(x)$ en 1 si
$\forall \varepsilon > 0$, il exite $\eta > 0$ tel que $|x-1| \le \eta \Rightarrow |f(x) - f(1)| \le \varepsilon$.

On peut aussi utiliser la définition suivante :

Définition 2 : $f(1)$ est la limite de $f(x)$ en 1 si
$\forall \varepsilon > 0$, il exite $\eta > 0$ tel que $|h| \le \eta \Rightarrow |f(1+h) - f(1)| \le \varepsilon$.

1 Avec la définition 1.

On doit étudier la quantité $|f(x) - f(1)|$.
$f(x) - f(1) = \frac{5x+3}{x+1} - 4 = \frac{5x+3}{x+1} - \frac{4x+4}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$.
Donc $|f(x) - f(1)| = |\frac{x-1}{x+1}|$.
Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\eta > 0$ tel que $|x-1| \le \eta \Rightarrow |f(x) - f(1)| \le \varepsilon$.

On peut essayer de deviner η mais dans ce cas ce n'est pas très facile.
On peut trouver η de la manière suivante :

Si $|x-1| \le \eta$, $-\eta \le x-1 \le \eta$ et donc $2-\eta \le x+1 \le 2+\eta$.
Remarque : On peut supposer $\eta < 1$ sans restriction de généralité. En effet si η convient, tout $\eta' < \eta$ convient aussi.
alors $0 < 2-\eta \le x+1$ et donc $|x+1| \ge 2-\eta$.
De $|x+1| \ge 2-\eta$ et $|x-1| \le \eta$, on déduit que $|f(x) - f(1)| = |\frac{x-1}{x+1}| \le \frac{\eta}{2-\eta}$.
Pour que $|f(x) - f(1)| = |\frac{x-1}{x+1}| \le \varepsilon$, il suffit de choisir $\frac{\eta}{2-\eta} \le \varepsilon$. On peut prendre par exemple η tel que $\varepsilon = \frac{\eta}{2-\eta}$.
C'est possible. En effet, exprimons η en fonction de ε.
$\varepsilon = \frac{\eta}{2-\eta} \Leftrightarrow \eta = (2-\eta)\varepsilon \Leftrightarrow \eta = 2\varepsilon - \eta\varepsilon \Leftrightarrow \eta + \eta\varepsilon = 2\varepsilon \Leftrightarrow \eta(1+\varepsilon) = 2\varepsilon \Leftrightarrow \eta = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$.
Vérifions que le η trouvé convient :
Si $|x-1| \le \eta$, $|f(x) - f(1)| = |\frac{x-1}{x+1}| \le \frac{\eta}{2-\eta} = \varepsilon$.

CONCLUSION : $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\eta = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$ tel que $|x-1| \le \eta \Rightarrow |f(x) - f(1)| \le \varepsilon$.

2 Avec la définition 2.

On doit étudier la quantité $|f(1+h) - f(1)|$.
$f(1+h) - f(1) = \frac{8+5h}{h+2} - 4 = \frac{8+5h}{h+2} - \frac{8+4h}{h+2} = \frac{h}{h+2}$.
Donc $|f(1+h) - f(1)| = |\frac{h}{h+2}|$.
Soit $\varepsilon > 0$.
De la même manière que pour la méthode précédente, on cherche $\eta > 0$ tel que $|h| \le \eta \Rightarrow |f(1+h) - f(1)| \le \varepsilon$.
si $|h| \le \eta$, $-\eta \le h \le \eta$ et donc $2-\eta \le 2+h \le 2+\eta$
Comme pour la méthode précédente, on peut supposer $\eta < 1$ et donc $|2+h| \ge 2-\eta$.
De $|h+2| \ge 2-\eta$ et $|h| \le \eta$, on déduit que $|f(1+h) - f(1)| = |\frac{h}{h+2}| \le \frac{\eta}{2-\eta}$.
On se retrouve alors face au même problème que dans la méthode précédente.