TD d'analyse 3.

1 Corrigé

1. Exercice 1. $U_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$

   (a) Monotonie de U_n.
   On étudie $U_{n+1} - U_n = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{(2n+3)(n+2)-(2n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \frac{3}{(n+2)(n+3)} > 0$, $\forall n \in I\!N$. Donc U_n est une suite croissante.

   (b) Majorant, Minorant.
   U_n est croissante donc $\forall n$, $U_n > U_0 = \frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$ est donc un minorant de U_n.
   $2 - U_n = \frac{2(n+2)}{n+2} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+4-(2n+1)}{n+2} = \frac{3}{n+2} > 0$. Donc 2 est un majorant de U_n.
   2 est la borne supérieure de U_n. Démontrons le par l'absurde. Supposons qu'il existe $\lambda < 2$ tel que $U_n \leq \lambda$, $\forall n \in I\!N$. Alors $\frac{2n+1}{n+2} \leq \lambda$ $\Leftrightarrow 2n+1 \leq \lambda(n+2) \Leftrightarrow 2n+1 \leq \lambda n + 2\lambda \Leftrightarrow 2n - \lambda n \leq 2\lambda - 1 \Leftrightarrow n(2-\lambda) \leq 2\lambda - 1 \Leftrightarrow n \leq \frac{2\lambda-1}{2-\lambda}$ car $2 - \lambda > 0$. Mais $I\!N$ n'est pas borné. Donc $n \leq \frac{2\lambda-1}{2-\lambda}$ ne peut être vrai pour tout n. On a trouvé une contraction. 2 est la borne supérieure de U_n.

   (c) $U_2 = \frac{5}{4}$ et U_n est croissante. Donc pour $n \geq 2$, $U_n - 1 > U_2 - 1 > \frac{5}{4} - 1 = 0.25$. Donc il ne peut pas exister de n_0 à partir duquel $|U_n - 1| \leq 10^{-3}$.

   (d) $|U_n - 2| = 2 - U_n$ car 2 est un majorant de U_n. $|U_n - 2| \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 2 - U_n \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 2 - \frac{2n+1}{n+2} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{3}{n+2} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 3 \leq 10^{-3}(n+2)$ $\Leftrightarrow 3 \leq 10^{-3}n + 2.10^{-3} \Leftrightarrow 3 - 2.10^{-3} \leq 10^{-3}n \Leftrightarrow \frac{3-2.10^{-3}}{10^{-3}} \leq n \Leftrightarrow n \geq 2998$. Donc si $n \geq 2998$, $|U_n - 2| \leq 10^{-3}$.
   On peut remplacer 10^{-3} par n'importe quel nombre ε. Ce qui donne $|U_n - 2| \leq \varepsilon \Leftrightarrow 2 - U_n \leq \varepsilon \Leftrightarrow 2 - \frac{2n+1}{n+2} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{n+2} \leq \varepsilon \Leftrightarrow 3 \leq \varepsilon(n+2)$ $\Leftrightarrow 3 \leq \varepsilon n + 2.\varepsilon \Leftrightarrow 3 - 2.\varepsilon \leq \varepsilon n \Leftrightarrow \frac{3-2.\varepsilon}{\varepsilon} \leq n$.
   Donc $\forall \varepsilon > 0$, il existe $N_0(\varepsilon) = \frac{3-2.\varepsilon}{\varepsilon}$ tel que $\forall n \geq N_0(\varepsilon)$, $|U_n - 2| \leq \varepsilon$.
   On retrouve ici la définition de la limite de U_n et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2$.

2. Exercice 2. $U_n = \dfrac{n+1}{n^2+n+1}$.

(a) Pour $n > 0$, $U_n > 0$ car $n+1$ et n^2+n+1 sont des nombres positifs. De plus, on peut vérifier que $n(n+1) = n^2+n < n^2+n+1$ et donc $\frac{n(n+1)}{n^2+n+1} < 1$ et donc $\frac{n+1}{n^2+n+1} \leq \frac{1}{n}$, $\forall n > 0$ (division par n).

(b) On a montré que $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n}$, $\forall n > 0$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Donc par le théorème des gendarmes, la suite U_n converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

3. Suites géométriques. Les résultats sont à retenir

(a) Monotonie de $U_n = q^n$. On peut étudier $U_{n+1} - U_n = q^{n+1} - q^n = q^n(q-1)$. Si $q \geq 0$, $U_{n+1} - U_n$ a le même signe que $q-1$. Donc U_n est monotone, croissante si $q \geq 1$, décroissante si $q \leq 1$. Si $q < 0$, $U_{n+1} - U_n$ n'est pas de signe constant et donc U_n n'est pas monotone.

(b) Convergence : Pour $q = 0$ et $q = 1$, la suite est constante.
Si $0 < q < 1$, la suite U_n est décroissante et minorée par 0. Donc, elle converge. Montrons en utilisant la définition que sa limite est nulle.
Soit $\varepsilon > 0$, $|U_n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow q^n \leq \varepsilon \Leftrightarrow n\ln(q) \leq \ln(\varepsilon) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(q)}$ car $\ln(q) < 0$. Donc $\forall \varepsilon > 0$, il existe $N_0 = \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(q)}$ tel que $\forall n \geq N_0$, $|U_n| \leq \varepsilon$. Donc U_n converge vers 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.
Pour $q > 1$, montrons en utilisant la définition que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
Soit $A > 0$, $|U_n| \geq A \Leftrightarrow q^n \geq A \Leftrightarrow n\ln(q) \geq \ln(A) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(A)}{\ln(q)}$ car $\ln(q) > 0$. Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
Pour $q < 0$. On s'intéresse à la suite $|U_n|$. $|U_n| = |q|^n$. Comme $|q| > 0$, on peut utiliser les résultats précédents :
Si $-1 < q < 0$, $|U_n|$ converge vers 0. Or grâce au cours, nous savons qu'alors la suite U_n converge vers 0. (Il suffit d'appliquer la définition pour le démontrer).
Si $q = -1$, la suite $(-1)^n$ n'a pas de limite.
Si $q < -1$, la suite $|U_n|$ a pour limite $+\infty$. Donc soit U_n tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, soit U_n n'a pas de limite. Mais U_n et U_{n+1} sont toujours de signe opposé, donc U_n n'a pas de limite. En effet, soit $A > 0$, $\forall n$, il existe une infinité de $U_i > A$, $i \geq n$.

(c) $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^i$. Pour calculer S_n, on passe par $(q-1)S_n = qS_n - S_n = q\sum_{i=0}^n q^i - \sum_{i=0}^n q^i = \sum_{i=0}^n q^{i+1} - \sum_{i=0}^n q^i = \sum_{i=1}^{n+1} q^i - \sum_{i=0}^n q^i = q^{n+1} - 1$. Donc $S_n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$.
Donc si $q < 0$, U_n n'a pas de limite et donc S_n non plus. Si $q = 0$, $S_n = 0$, si $q = 1$, $S_n = n+1$. Si $0 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$ et si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

(d) On montre par récurrence sur n que la suite ν_n est la suite $\nu_0 q^n$. La proposition est vraie au rang 0.

Supposons qu'elle soit vraie au rang n, alors $\nu_n = \nu_0 q^n$. $\nu_{n+1} = q\nu_n = q(\nu_0 q^n) = \nu_0 q^{n+1}$. La proposition est alors vraie au rang $n+1$. Et donc $\forall n$, $\nu_n = \nu_0 q^n$.

2 Quelques exercices (non corrigés) pour s'entraîner

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n+1}{n^2+n+1}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{3n^2 - n + 2} - \sqrt{3n^2 + 5n + 1}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin(n)}{n}$.
- La taille d'un nénuphar double chaque jour. Au bout de 40 jours, il a recouvert tout l'étang. Au bout de combien de jours a-t-il recouvert tout l'étang ?