Borne supérieure d'un ensemble E. C'est le plus petit majorant de l'ensemble E. C'est $\min\{M$ tels que $\forall x \in E,\, x \geq M\}$.

La borne supérieure peut appartenir à l'ensemble E. Mais en général la borne supérieure n'appartient pas à l'ensemble.

Exercice 4 On considère $E = \{\frac{n^2}{1+n^2}\ ,\, n \in I\!N\}$.

- ATTENTION : ON NE CONSIDERE PAS LA SUITE $U_N = \frac{N^2}{1+N^2}$ MAIS UN ENSEMBLE. UN ENSEMBLE N'EST PAS ORDONNE. ON NE PEUT DONC PAS PARLER DE LA LIMITE DE E.
- Quand on lit l'ensemble de l'exercie, on comprend que l'on ne doit pas utiliser le langage et les propriétés des suites. Pour savoir ce qui est attendu dans l'exercice, on commence par lire toutes les questions.

Les premières questions de l'exercice sont là pour vous aider à devinier que la borne supérieure est 1.

Preuve :

On va faire une preuve par l'absurde. Si 1 n'est pas la borne supérieure de E, il existe $s < 1$ tel que $\forall x \in E\ ,\, x \leq s$. En explicitant la forme des élements de E, $\forall n \in I\!N\ ,\, \frac{n^2}{1+n^2} \leq s$.

$$\frac{n^2}{1+n^2} \leq s \Leftrightarrow$$

$$n^2 \leq s(1+n^2) \Leftrightarrow$$

$$n^2 \leq s + sn^2 \Leftrightarrow$$

$$n^2 - sn^2 \leq s \Leftrightarrow$$

$$n^2(1-s) \leq s \Leftrightarrow$$

$$n^2 \leq \frac{s}{1-s} \text{ (car 1-s est positif)} \Leftrightarrow$$

$$n \leq \sqrt{\frac{s}{1-s}} \text{ car } \frac{s}{1-s} \geq 0$$

En conclusion, si il existe s tel que $\forall x \in E,\, x \leq s$, alors $\forall n \in I\!N,\, n \leq \sqrt{\frac{s}{1-s}}$. Or $I\!N$ n'est pas borné. On a donc trouvé un contradiction. 1 est donc bien le plus petit majorant de E, c'est-à-dire sa **borne supérieure**.