

Interrogation d'analyse 1. 16 mars 2004.

Groupe 5

NOM :
PRENOM :

I. QCM.

C'est un questionnaire à choix multiples. Il y a une seule réponse juste par question. Le barème est le suivant :
+ 1 point pour une réponse correcte. -0.5 point pour une réponse fausse.

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 2}{n + 1} = :$
A. $+\infty$ B. 1 C. 0
2. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 2$ est une fonction :
A. Injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ B. Injective de $] - \infty; \frac{1}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ C. Injective de $] - \infty; \frac{7}{4}]$ dans $\mathbb{R}$.
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n) =$
A. n'existe pas B. 1 C. 0

II. Question de cours

Donner la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$.

III. Soit $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 1$, $U_0 = 1$.

- (a) Montrer que $\forall n, 0 \leq U_n \leq 2$.
- (b) Montrer que $\text{signe}(U_{n+1} - U_n) = \text{signe}(U_n - U_{n-1})$. En déduire que U_n est monotone.
- (c) Montrer que U_n est convergente et calculer la limite de U_n .

IV. Soit $f(x) = \sin(x) - \frac{2}{3} \sin^3(x)$.

- (a) Montrer que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0; \pi]$?
- (b) Montrer $f'(x) = \cos(x) \cos(2x)$. En déduire les variations de f .
- (c) Etudier puis représenter f sur $\mathbb{R}$.
- (d) $f : [0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle injective? Sinon, donner un intervalle J tel que $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ soit injective.