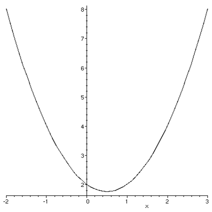
Interrogation d'analyse. Groupe 5. Sujet 1. Corrigé.

1. QCM.

   (a)
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n+2}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})}{(1+\frac{1}{n})} = +\infty$$
   Réponse A.

   (b) La fonction f est un polynôme de degré 2.

   Elle admet un minimum en $x=\frac{1}{2}$ et $f(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$. Et donc f est injective de $]-\infty;\frac{1}{2}]$ dans $I\!R$. Réponse B.

   (c) sin oscille entre -1 et 1 quand $n\to+\infty$, $\sin(n)$ n'a pas de limite.

2. C'est dans le cours, c'est la principale nouveauté sur les suites introduite cette année, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$, il existe N un entier tel que $\forall n\geq N$, $|U_n-l|\leq\varepsilon$. C'est-à-dire en français on peut se rapprocher **arbitrairement** près de l en choisissant n suffisamment grand.

3. (a) Montrons par récurrence sur n que $0\leq U_n\leq 2$.
   $0\leq U_0=1\leq 2$
   Supposons que $0\leq U_n\leq 2$. Alors $0\leq \dfrac{1}{3}U_n\leq\dfrac{2}{3}$. Et donc $1\leq\dfrac{1}{3}U_n+1\leq\dfrac{2}{3}+1$ et donc $0\leq\dfrac{1}{3}U_n+1\leq 2$ soit $0\leq U_{n+1}\leq 2$. Par récurrence, on a donc que $\forall n\in I\!N$, $0\leq U_n\leq 2$.

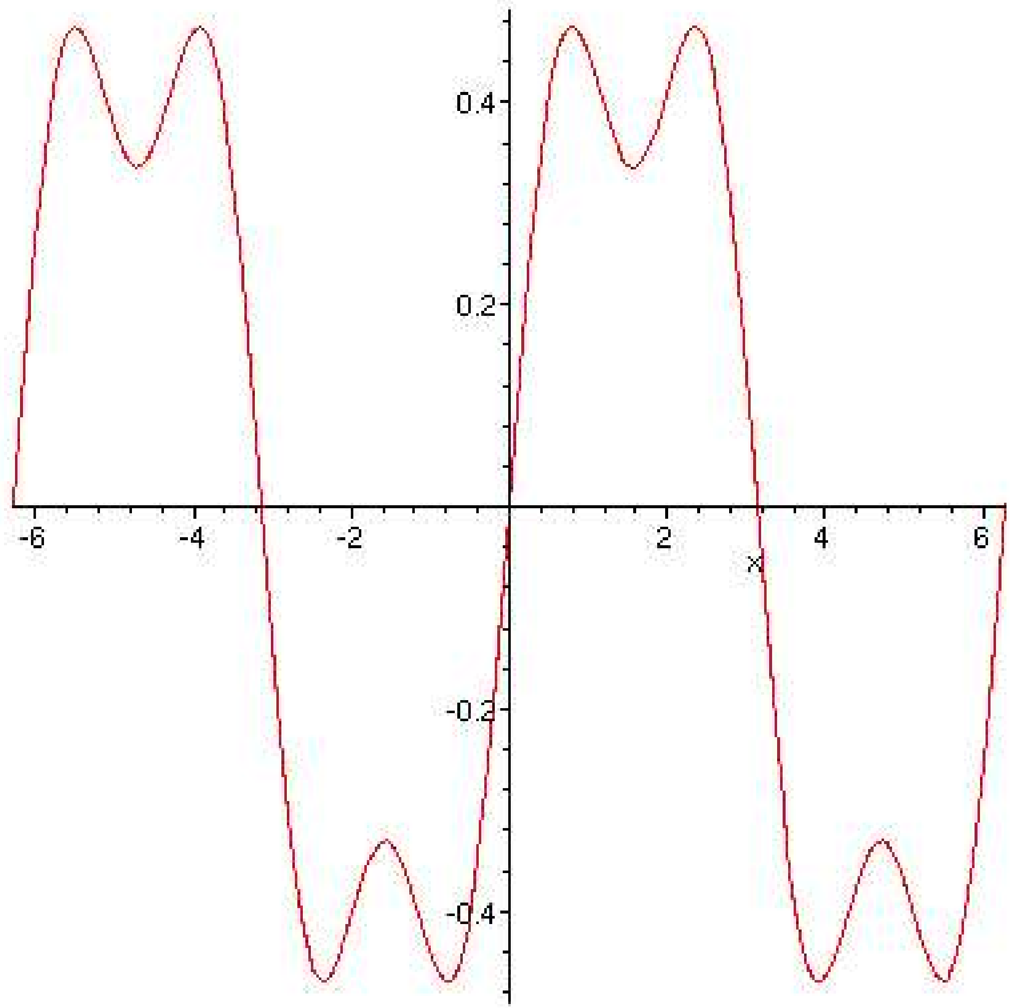
   (b) $U_{n+1}-U_n=\dfrac{1}{3}U_n+1-\dfrac{1}{3}U_{n-1}-1=\dfrac{1}{3}(U_n-U_{n-1}$. Donc $signe(U_{n+1}-U_n)=signe(U_n-U_{n-1})$. Par récurrence, on démontre alors que $\forall n\in I\!N$, $signe(U_{n+1}-U_n)=signe(U_1-U_0)=\frac{1}{3}>0$. Donc $\forall n\in I\!N$, $U_n-U_{n-1}>0$. U_n est donc ue suite montone croissante.

   (c) U_n est une suite croissante et majorée. Elle est donc convergente. Elle a donc une limite finie l. Mais $l=\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}U_{n+1}$. Et en passant à la limite la relation de récurrence, on doit avoir $l=\dfrac{1}{3}l+1$. Et donc $\dfrac{2}{3}l=1\Leftrightarrow l=\dfrac{3}{2}$

4. (a) f est une fonction 2π-périodique. On peut donc réduire l'étude de f à un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi;\pi]$. De plus $f(-x)=-f(x)$. f est donc une fonction impaire. Il suffit donc d'étudier f sur $[0;\pi]$

   (b) $f'(x)=\cos(x)-\dfrac{2}{3}*3*\cos(x)\sin(x)^2=\cos(x)(1-2\sin(x)^2)=\cos(x)\cos(2x)$.

   (c) On s'intéresse à l'intervalle $[0;\pi]$. Sur cet intervalle $\cos(x)\leq 0$ si et seulement si $x\geq\frac{\pi}{2}$ et $\cos(2x)\leq 0$ si et seulement si $x\in[\frac{\pi}{4};3\frac{\pi}{4}]$. On en déduit le signe de $f'(x)$.
   $f(0)=0=f(\pi)$, $f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{3}$, $f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{3}=f(\frac{3\pi}{4})$.



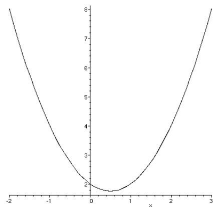
(d) f n'est pas injective de $[0; \frac{\pi}{2}]$ dans $I\!R$, f est injective de $[0; \frac{\pi}{4}]$ dans $I\!R$.

Interrogation d'analyse. Groupe 5. Sujet 2. Corrigé.

1. QCM.

   (a)
   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n^2+n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(1+\frac{2}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+\frac{2}{n})}{n(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}=0$$
   Réponse C.

   (b) La fonction f est un polynôme de degré 2.

   Elle admet un minimum en $x=\frac{1}{2}$ et $f(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$. Et donc f est surjective de $I\!R$ dans $[\frac{3}{4};+\infty[$. Réponse C.

   (c) $-1\leq\sin(n)\leq 1$, et donc $\frac{-1}{n}\leq\frac{\sin(n)}{n}\leq\frac{1}{n}$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=0$. Et donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{n}=0$. Réponse C.

2. C'est dans le cours, c'est la principale nouveauté sur les suites introduite cette année, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}U_n=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, il existe N un entier tel que $\forall n\geq N$, $|U_n-l|\leq\varepsilon$. C'est-à-dire en français on peut se rapprocher **arbitrairement** près de l en choisissant n suffisamment grand.

3. (a) Montrons par récurrence sur n que $0\leq U_n\leq 2$.
   $0\leq U_0=1\leq 2$
   Supposons que $0\leq U_n\leq 2$. Alors $0\leq\frac{1}{2}U_n\leq 1$. Et donc $1\leq\frac{1}{2}U_n+1\leq 1+1$ et donc $0\leq\frac{1}{2}U_n+1\leq 2$ soit $0\leq U_{n+1}\leq 2$. Par récurrence, on a donc que $\forall n\in I\!N$, $0\leq U_n\leq 2$.

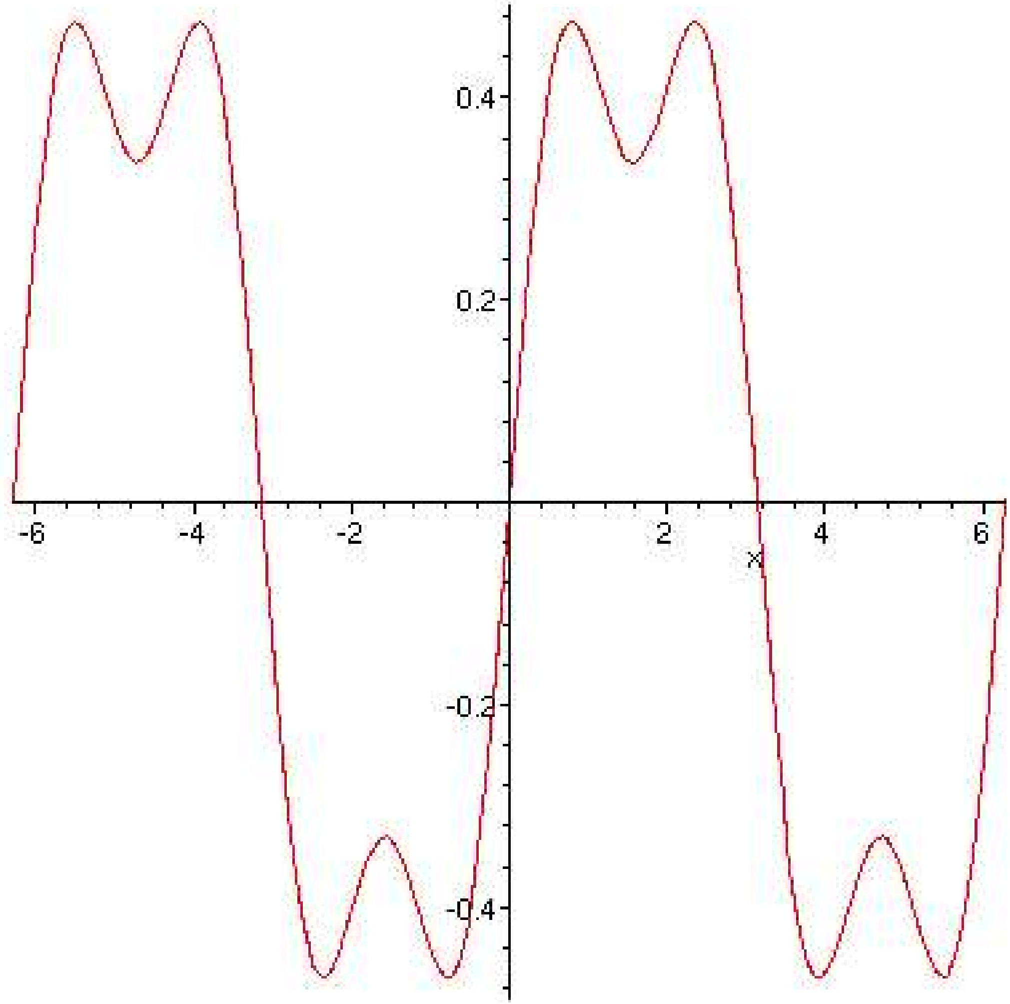
   (b) $U_{n+1}-U_n=\frac{1}{2}U_n+1-\frac{1}{2}U_{n-1}-1=\frac{1}{2}(U_n-U_{n-1}$. Donc $signe(U_{n+1}-U_n)=signe(U_n-U_{n-1})$. Par récurrence, on démontre alors que $\forall n\in I\!N$, $signe(U_{n+1}-U_n)=signe(U_1-U_0)=\frac{1}{3}>0$. Donc $\forall n\in I\!N$, $U_n-U_{n-1}>0$. U_n est donc ue suite montone croissante.

   (c) U_n est une suite croissante et majorée. Elle est donc convergente. Elle a donc une limite finie l. Mais $l=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}U_{n+1}$. Et en passant à la limite la relation de récurrence, on doit avoir $l=\frac{1}{2}l+1$. Et donc $\frac{1}{2}l=1\Leftrightarrow l=2$

4. (a) f est une fonction 2π-périodique. On peut donc réduire l'étude de f à un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi;\pi]$. De plus $f(-x)=-f(x)$. f est donc une fonction impaire. Il suffit donc d'étudier f sur $[0;\pi]$

   (b) $f'(x)=\cos(x)-\frac{2}{3}*3*\cos(x)\sin(x)^2=\cos(x)(1-2\sin(x)^2)=\cos(x)\cos(2x)$.

   (c) On s'intéresse à l'intervalle $[0;\pi]$. Sur cet intervalle $\cos(x)\leq 0$ si et seulement si $x\geq\frac{\pi}{2}$ et $\cos(2x)\leq 0$ si et seulement si $x\in[\frac{\pi}{4};3\frac{\pi}{4}]$. On en déduit le signe de $f'(x)$.
   $f(0)=0=f(\pi)$, $f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{3}$, $f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{3}=f(\frac{3\pi}{4})$.



(d) f n'est pas surjective de $[0; \frac{\pi}{2}]$ dans $I\!R$, f est surjective de $[0; \frac{\pi}{2}]$ dans $[0; \frac{\sqrt{2}}{3}]$.