Interrogation d'Analyse 2. Corrigé.

Sujet A: sujet avec la question : " $\ln(1+x)-x$ est équivalente en 0 à : ..." en deuxième dans le QCM.
Sujet B : sujet avec la question : " $\ln(1+x)-x$ est équivalente en 0 à : ..." en premier dans le QCM.

1. QCM

Réponses :

Sujet A :
1. C 2. B 3. A

Sujet B:
1. B 2. A 3. C

Quelques commentaires :

- ON NE PEUT AJOUTER NI SOUSTRAIRE DES EQUIVALENTS. Donc on ne peut pas dire $\ln(1+x)$ est équivalent à x, donc $\ln(1+x)-x$ est équivalent à 0. (Revoir le cours si vous n'êtes toujours pas convaincus).Les opérations d'addition et de soustraction doivent se faire avec des développements limités. En effet avec le développement limité on dispose d'une vraie égalité. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)$, et donc $\ln(1+x)-x=-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)$.
- Une fonction non nulle ne peut pas être équivalente à 0. En effet, d'après la définiton, f est équivalente à g en 0 si et seulement si il existe une fonction h telle que $f=h\times g$ et $\lim_{x\to 0} h(x)=1$. Donc si f est équivalente à 0 en 0, il existe une fonction h telle que $f=h\times 0=0$.
  UNE FONCTION NON NULLE N'EST JAMAIS EQUIVALENTE A 0
- Si f et g sont équivalentes en un point x_0, elles ont la même limite. Mais si f et g ont la même limite en un point, elle ne sont pas forcément équivalentes. (exemple $f(x)=x$ et $g(x)=x^2$ ont la même limite en 0, mais elles ne sont pas équivalentes, en effet, $\dfrac{f}{g}$ ne tend pas vers 1 en 0).
- Attention la limite quand x tend vers 0 d'une fonction $u(x)$ ne dépend pas de x. Il ne faut pas confondre l'équivalent (qui est une fonction) avec la limite (qui est un nombre).
- Quand on regarde la fonction donnée par $f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$, on voit que la pente de la courbe est discontinue (0 puis 1). En calculant les dérivées à droite et à gauche de 0, on s'aperçoit qu'elles sont différentes (voir la feuille 4 de TD, dernier exercice). Il est donc impossible de donner une valeur à la dérivée en 0. f n'est donc pas dérivable.

2. EXERCICE DE COURS

a. Enoncer la formule de Taylor pour une fonction f en x_0 à l'ordre n.

Il y a deux formules possibles. Ci dessous les 2 théorèmes précisément énoncés.

- Soit f $n+1$ fois dérivable, il existe c tel que
  $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \dfrac{(x-x_0)^2 f^{(2)}(x_0)}{2!} + \ldots + \dfrac{(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0)}{n!} + \dfrac{(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$
- Soit f $n+1$ fois dérivable,
  $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \dfrac{(x-x_0)^2 f^{(2)}(x_0)}{2!} + \ldots + \dfrac{(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0)}{n!} + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$
  avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Penser à mettre les hypothèses sur f, c et ε (en fonction de la formule choisie)
b. SUJET A:
$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)$
ou $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6 \exp(c)}{6!}$
SUJET B:
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x)$
ou
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5 \cos(c)}{5!}$

3. EXERCICE

SUJET A:
En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $\forall x \in I\!R$, $\exp(x) \geq x + 1$.

SUJET B:
En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $\forall x \in I\!R$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

Aller voir la feuille de TD 4, ce sont exactement les mêmes exercices.

4. Calculer les limites suivantes

a.SUJET A:
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x) - x}{x^2}$

SUJET B:
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x) - x}{x^3}$

Les deux exercices nécessitent de trouver un équivalent de $\tan(x) - x$ en 0:
$\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + x^6\varepsilon(x)$, donc $\tan(x) - x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + x^6\varepsilon(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$
Alors :

SUJET A:
$\dfrac{\tan(x)-x}{x^2} = \dfrac{x}{3} + x\varepsilon(x)$. Et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)-x}{x^2} = 0$.
SUJET B:
$\dfrac{\tan(x)-x}{x^3} = \dfrac{1}{3} + \varepsilon(x)$. Et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)-x}{x^3} = \dfrac{1}{3}$.

b. SUJET A :
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} \dfrac{\cos(x)}{x-\frac{\Pi}{2}}$
SUJET B:
b. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} \dfrac{\cos(x)}{(x-\frac{\Pi}{2})^2}$

Deux stratégies possibles :

- On peut faire un changement de variable $X = x - \frac{\pi}{2}$ soit $x = X + \frac{\pi}{2}$, alors
  SUJET A:
  $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} \dfrac{\cos(x)}{x-\frac{\Pi}{2}} = \lim\limits_{X\to 0+} \dfrac{\cos(X+\frac{\pi}{2})}{X} = \lim\limits_{X\to 0+} \dfrac{-\sin(X)}{X} = 1$ car $\sin(x)$ est équivalent à x en 0.
  SUJET B:
  $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} \dfrac{\cos(x)}{(x-\frac{\Pi}{2})^2} = \lim\limits_{X\to 0+} \dfrac{\cos(X+\frac{\pi}{2})}{X^2} = \lim\limits_{X\to 0+} \dfrac{-\sin(X)}{X^2} = \lim\limits_{X\to 0+} \dfrac{-1}{X} = -\infty$
  car $\sin(x)$ est équivalent à x en 0.
- On peut utiliser la formule de Taylor pour trouver le développement limité de $\cos(x)$ en $\frac{\pi}{2}$ puis un équivalent.
  $\cos(x) = cos(\dfrac{\pi}{2}) + (x-\dfrac{\pi}{2})\cos'(\dfrac{\pi}{2}) + (x-\dfrac{\pi}{2})\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \varepsilon(x) = 0$.
  Soit $\cos(x) = (x-\dfrac{\pi}{2})(-\sin(\dfrac{\pi}{2})) + (x-\dfrac{\pi}{2})\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \varepsilon(x) = 0$.
  Et donc $\cos(x) = -(x-\dfrac{\pi}{2}) + (x-\dfrac{\pi}{2})\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \varepsilon(x) = 0$
  Donc $\cos(x)$ est équivalent à $-(x-\frac{\pi}{2})$ en $\frac{\pi}{2}$.
  SUJET A: $\dfrac{\cos(x)}{x-\frac{\Pi}{2}} \sim_0 \dfrac{-(x-\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\Pi}{2}} = -1$ et donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} \dfrac{\cos(x)}{x-\frac{\Pi}{2}} = -1$.
  SUJET B: $\dfrac{\cos(x)}{(x-\frac{\Pi}{2})^2} \sim_0 \dfrac{-(x-\frac{\pi}{2})}{(x-\frac{\Pi}{2})^2} = -\dfrac{1}{x-\frac{\Pi}{2}}$ et donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} \dfrac{\cos(x)}{(x-\frac{\Pi}{2})^2} = -\infty$.

Conseil : toujours commencer par un développement petit (ordre 1 ou 2)