Interrogation d'Analyse 2. Corrigé.

1. QCM

Réponses :
1. A   2. B   3. A

Quelques commentaires :

- ON NE PEUT AJOUTER NI SOUSTRAIRE DES EQUIVALENTS. Donc on ne peut pas dire $\sin(x)$ est équivalent à x, donc $\sin(x) - x$ est équivalent à 0. (Revoir le cours si vous n'êtes toujours pas convaincus).Les opérations d'addition et de soustraction doivent se faire avec des développements limités. En effet avec le développement limité on dispose d'une vraie égalité. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$, et donc $\sin(x) - x = -\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$.
- Une fonction non nulle ne peut pas être équivalente à 0. En effet, d'après la définiton, f est équivalente à g en 0 si et seulement si il existe une fonction h telle que $f = h \times g$ et $\lim_{x\to 0} h(x) = 1$. Donc si f est équivalente à 0 en 0, il existe une fonction h telle que $f = h \times 0 = 0$. UNE FONCTION NON NULLE N'EST JAMAIS EQUIVALENTE A 0
- Si f et g sont équivalentes en un point x_0, elles ont la même limite. Mais si f et g ont la même limite en un point, elle ne sont pas forcément équivalentes. (exemple $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ ont la même limite en 0, mais elles ne sont pas équivalentes, en effet, $\dfrac{f}{g}$ ne tend pas vers 1 en 0).
- Attention la limite quand x tend vers 0 d'une fonction $u(x)$ ne dépend pas de x. Il ne faut pas confondre l'équivalent (qui est une fonction) avec la limite (qui est un nombre).
- Quand on regarde la fonction donnée par $f(x) = |x|$, on voit que la pente de la courbe est discontinue (-1 puis 1). En calculant les dérivées à droite et à gauche de 0, on s'aperçoit qu'elles sont différentes (voir la feuille 4 de TD, dernier exercice). Il est donc impossible de donner une valeur à la dérivée en 0. f n'est donc pas dérivable.

2. EXERCICE DE COURS

a.Enoncer précisément le théorème des accroissements finis.

Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle $[a;b]$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

b. Appliquons le théorème des accroissements finis à $f(x) = \tan(x)$ sur l'intervalle $[0;x]$. Il existe $0 < c < x$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Or $f'(c) = 1+\tan^2(c)$. Donc $1+\tan^2(c) = \dfrac{\tan(x)}{x}$. Mais la fonction $1+\tan^2$ est croissante sur $[0;\frac{\pi}{2}[$. Donc $1+\tan^2(0) \leq 1+\tan^2(c) \leq 1+\tan^2(x)$. Soit $1 \leq \dfrac{\tan(x)}{x} \leq 1+\tan^2(x)$.

3. EXERCICE

On peut mettre une des deux formules de Taylor :
Il existe $c \in]0;x[$ tel que :
$f(x) = f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2}f''(0) + \dfrac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \dfrac{x^4}{4!}f^{(4)}(0) + \dfrac{x^5}{5!}f^{(5)}(0) + \dfrac{x^6}{6!}f^{(6)}(c)$.
Il existe une fonction $\varepsilon(x)$ telle que $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ et
$f(x) = f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2}f''(0) + \dfrac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \dfrac{x^4}{4!}f^{(4)}(0) + \dfrac{x^5}{5!}f^{(5)}(0) + x^5\varepsilon(x)$.

On applique alors cette formule à
$f(x) = \ln(1+x)$. $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$. $f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$. $f^{(3)}(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$. $f^{(4)}(x) = \dfrac{-2\times 3}{(1+x)^4}$.
$f^{(5)}(x) = \dfrac{2\times 3\times 4}{(1+x)^5}$. $f^{(6)}(x) = \dfrac{-2\times 3\times 4\times 5}{(1+x)^6}$.
On obtient alors
$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6(1+c)^6}$
ou
$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x)$

4. Calculer les limites suivantes

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\tan(x)} - \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan(x)}{x\tan(x)}$
Recherche d'un équivalent de $x-\tan(x)$ et de $x\tan(x)$ en 0.

Grâce à l'indication, $x - \tan(x) = x - (x + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) = -\dfrac{x^3}{3} - x^3\varepsilon(x)$. Donc

$x - \tan(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^3}{3}$.
L'indication nous permettait aussi de dire que $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$. Donc $x\tan(x) \underset{0}{\sim} x^2$.

On en conclut donc que $\dfrac{1}{\tan(x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - \tan(x)}{x\tan(x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^3}{3}}{x^2} = -\dfrac{x}{3}$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\tan(x)} - \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{x}{3} = 0$.

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8^x - 4^x}{3^x - 2^x}$ est une forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$. Aucune manipulation facile ne permet de se débarrasser de cette forme indéterminée.
On recherche alors des équivalents pour le numérateur et le dénominateur en utilisant les développements limités.
$8^x - 4^x = \exp(x\ln(8)) - \exp(x\ln(4)) = 1 + x\ln(8) + x\varepsilon_1(x) - 1 - x\ln(4) - x\varepsilon_2(x)$
$= x(\ln(8) - \ln(4)) + x\varepsilon(x)$. Donc $8^x - 4^x \underset{0}{\sim} x(\ln(8) - \ln(4)) = x\ln(\dfrac{8}{4}) = x\ln(2)$.
De la même manière, on montre que $3^x - 2^x \underset{0}{\sim} x(\ln(3) - \ln(2)) = x\ln(\dfrac{3}{2})$.
Donc $\dfrac{8^x - 4^x}{3^x - 2^x} \underset{0}{\sim} \dfrac{x\ln(2)}{x\ln(\frac{3}{2})} = \dfrac{\ln(2)}{\ln(\frac{3}{2})}$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8^x - 4^x}{3^x - 2^x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2)}{\ln(\frac{3}{2})} = \dfrac{\ln(2)}{\ln(\frac{3}{2})}$

Conseil : toujours commencer par un développement petit (ordre 1 ou 2)