Interrogation d'Analyse.

1 Question de cours.

Définition :
Fonction continue :
Cf COURS.

2 Etude de la suite $U_n = \frac{1}{n}\sin(n)$.

1. Montrer que $\forall n \in I\!N$, $-\frac{1}{n} \leq U_n \leq \frac{1}{n}$.
Comme $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, pour tout n, $\forall n \in I\!N$, $-\frac{1}{n} \leq U_n \leq \frac{1}{n}$.
2. U_n *est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite?*
$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$. Donc U_n converge vers cette même limite : 0. (Théorème des gendarmes).

3 Etude de la suite définie par récurrence.

$$\begin{cases} U_{n+1} & = & \frac{U_n}{U_n+3} \\ U_0 & = & 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in I\!N$, $0 \leq U_n$.
Par récurrence sur $n \in I\!N$:
$U_0 = 1 \geq 0$.
Si $U_n \geq 0$, $U_n + 3 \geq 0$ et donc $\frac{U_n}{U_n+3} \geq 0$.
Si qui démontre la propriété recherchée.
2. Montrer que $U_{n+1} - U_n$ *a le même signe que* $U_n - U_{n-1}$. *En déduire la monotonie de* $(U_n)_{n\in I\!N}$.
$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{U_n+.} - \frac{U_{n-1}}{U_{n-1}+3} = \frac{U_n(U_{n-1}+3) - U_{n-1}(U_n+3)}{(U_n+3)(U_{n-1}+3)} = \frac{U_nU_{n-1}+3U_n - U_nU_{n-1} - 3U_{n-1}}{(U_n+3)(U_{n-1}+3)} = \frac{3(U_n - U_{n-1})}{(U_n+3)(U_{n-1}+3)}$

Or $(U_n + 3)(U_{n-1} + 3) \geq 0$ donc $U_{n+1} - U_n$ et $U_n - U_{n-1}$ ont le même signe.

$U_1 - U_0 = \frac{1}{4} - 1 < 0$

Par récurrence sur n, on en déduit que $\forall n \in I\!N$, $U_n - U_{n-1} < 0$. Donc U_n est strictement décroissante.

3. U_n est-elle convergente ? Si oui quelle est la limite de U_n ?

U_n est décroissante et minorée, donc U_n converge. Sa limite est un nombre réel l. En passant la relation de récurrence à la limite, l doit vérifier $l = \frac{l}{l+3}$. C'est équivalent à $l(l+3) = l$, soit encore $l^2 + 2l = 0$. Donc $l \in \{-2; 0\}$. Mais $U_n \geq 0$, donc $l \geq 0$. Donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$.

4 En utilisant la définition de la limite, montrer que :

$$\lim_{x \to 2} 3x - 5 = 1$$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\delta > 0$ tel que $|x - 2| \leq \delta \Rightarrow |3x - 5 - 1| \leq \varepsilon$.

$|3x - 5 - 1| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$

$|3x - 6| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$

$|3(x - 2)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$

$3|x - 2| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$

$|x - 2| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Il suffit donc de choisir $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

5 Démonstration de l'inégalité $x - \frac{x^3}{3} \leq \sin(x) \leq x$ sur $[0; \pi]$.

1. On pose $g(x) = x - \sin(x)$. Grâce à l'étude de la fonction g, montrer que $\sin(x) \leq x$ sur $[0; \pi]$.

$g'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$. Donc g est croissante sur $[0; \pi]$. $g(0) = 0$. Donc $g(x) \geq 0$ sur $[0; \pi]$.

2. a) Montrer que $\forall x \in [0; \pi]$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$. On peut poser $h(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos(x)$.

$h'(x) = -x + \sin(x) \leq 0$ sur $[0; \pi]$ d'après la question 1.

Donc h est décroissante sur $[0; \pi]$. $h(0) = 0$ donc $h(x) \leq 0$, $\forall x \in [0; \pi]$.

2. b) Montrer que $x - \frac{x^3}{3} \leq \sin(x)$ *sur* $[0;\pi]$ *. On peut poser* $i(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)$*.*

$i'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos(x) \leq 0$ sur $[0;\pi]$ d'après la question 2.a).

Donc i est décroissante sur $[0;\pi]$. $i(0) = 0$. Donc $i(x) \leq 0$, $\forall x \in [0;\pi]$.