

Interrogation d'Analyse.Corrigé

Définition :

Suite monotone :

CF COURS.

1 Etude de la suite $U_n = \frac{1}{n} \cos(n)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{n} \leq U_n \leq \frac{1}{n}$.

Comme $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, pour tout $n, \forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{n} \leq U_n \leq \frac{1}{n}$.

2. U_n est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$. Donc U_n converge vers cette même limite :

0. (Théorème des gendarmes).

2 Etude de la suite définie par récurrence.

$$\begin{cases} U_{n+1} &= \frac{U_n}{U_n+2} \\ U_0 &= 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n$.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$U_0 = 1 \geq 0$.

Si $U_n \geq 0, U_n + 2 \geq 0$ et donc $\frac{U_n}{U_n+2} \geq 0$.

Si qui démontre la propriété recherchée.

2. Montrer que $U_{n+1} - U_n$ a le même signe que $U_n - U_{n-1}$. En déduire la monotonie de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{U_n+2} - \frac{U_{n-1}}{U_{n-1}+2} = \frac{U_n(U_{n-1}+2) - U_{n-1}(U_n+2)}{(U_n+2)(U_{n-1}+2)} = \frac{U_n U_{n-1} + 2U_n - U_n U_{n-1} - 2U_{n-1}}{(U_n+2)(U_{n-1}+2)} = \frac{2(U_n - U_{n-1})}{(U_n+2)(U_{n-1}+2)}$$

Or $(U_n + 2)(U_{n-1} + 2) \geq 0$ donc $U_{n+1} - U_n$ et $U_n - U_{n-1}$ ont le même signe.

$$U_1 - U_0 = \frac{1}{3} - 1 < 0$$

Par récurrence sur n , on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n - U_{n-1} < 0$. Donc U_n est strictement décroissante.

3. U_n est-elle convergente ? Si oui quelle est la limite de U_n ?

U_n est décroissante et minorée, donc U_n converge. Sa limite est un nombre réel l . En passant la relation de récurrence à la limite, l doit vérifier $l = \frac{l}{l+2}$.

C'est équivalent à $l(l+2) = l$, soit encore $l^2 + l = 0$. Donc $l \in \{-1; 0\}$. Mais $U_n \geq 0$, donc $l \geq 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

3 En utilisant la définition de la limite, montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 4} 3x - 5 = 7$$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\delta > 0$ tel que $|x - 4| \leq \delta \Rightarrow |3x - 5 - 7| \leq \varepsilon$.

$$|3x - 5 - 7| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$|3x - 12| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$|3(x - 4)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$3|x - 4| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$|x - 4| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il suffit donc de choisir $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

4 Démonstration de l'inégalité $x - \frac{x^3}{3} \leq \sin(x) \leq x$ sur $[0; \pi]$.

1. On pose $g(x) = x - \sin(x)$. Grâce à l'étude de la fonction g , montrer que $\sin(x) \leq x$ sur $[0; \pi]$.

$g'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$. Donc g est croissante sur $[0; \pi]$. $g(0) = 0$. Donc $g(x) \geq 0$ sur $[0; \pi]$.

2. a) Montrer que $\forall x \in [0; \pi]$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$. On peut poser $h(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos(x)$.

$h'(x) = -x + \sin(x) \leq 0$ sur $[0; \pi]$ d'après la question 1.

Donc h est décroissante sur $[0; \pi]$. $h(0) = 0$ donc $h(x) \leq 0$, $\forall x \in [0; \pi]$.

2. b) Montrer que $x - \frac{x^3}{3} \leq \sin(x)$ sur $[0; \pi]$. On peut poser $i(x) = x - \frac{x^3}{3} - \sin(x)$.

$i'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos(x) \leq 0$ sur $[0; \pi]$ d'après la question 2.a).

Donc i est décroissante sur $[0; \pi]$. $i(0) = 0$. Donc $i(x) \leq 0$, $\forall x \in [0; \pi]$.