# Interrogation d'Analyse.

## 1 Question de cours

Définition :
$\lim_{n\to+\infty} u_n = L$ :
CF Cours.

## 2 Etude de la suite $U_n = \frac{2n+3}{n+3}$.

*1. Montrer que* $\forall n \in I\!N$, $1 \leq U_n \leq 2$.
$n+3 \leq 2n+3$, $\forall n$ donc $\frac{2n+3}{n+3} \geq 1$.
$2(n+3) = 2n+6 \geq 2n+3$, $\forall n$.
*2. Etudier la montonie de* $U_n$.
Méthode 1 :
$U_{n+1} - U_n = \frac{2n+5}{n+4} - \frac{2n+3}{n+3} = \frac{(2n+5)(n+3)-(2n+3)(n+4)}{(n+3)(n+4)} = \frac{2n^2+5n+6n+15-2n^2-8n-3n-12}{(n+3)(n+4)} = \frac{3}{(n+3)(n+4)} > 0$. Donc $U_n$ est croissante.
Méthode 2:
$U_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{2x+3}{x+3}$, $f'(x) = \frac{2(x+3)-(2x+3)}{(x+3)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$. Donc $U_n$ est croissante.
*3.* $U_n$ *est-elle convergente ? Si oui caluler sa limite.*
$U_n$ est croissante et majorée, donc $U_n$ est convergente. $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(2+\frac{3}{n})}{n(1+\frac{3}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2+\frac{3}{n})}{(1+\frac{3}{n})} = 2$ car $\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{3}{n} = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{3}{n} = 1$.
*4. Résoudre* $|U_n - 2| \leq \varepsilon$. *Conclure.*
$|U_n - 2| = |\frac{2n+3}{n+3} - \frac{2(n+3)}{n+3}| = |\frac{2n+3-2n-6}{n+3}| = |-\frac{3}{n+3}| = \frac{3}{n+3}$.
Donc $|U_n - 2| \leq \varepsilon$ si et seulement si $\frac{3}{n+3} \leq \varepsilon$ si et seulement si $n+3 \geq \frac{3}{\varepsilon}$ si et seulement si $n \geq \frac{3}{\varepsilon} - 3$.
Donc $\forall \varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) = \frac{3}{\varepsilon} - 3$ tel que $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $|U_n - 2| \leq \varepsilon$. On retrouve donc que $\lim_{n\to+\infty} = 2$.

## 3 Etude de la suite définie par récurrence.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} U_{n+1} & = & \frac{1}{2}U_n + 1 \\ U_0 & = & 1 \end{array} \right.$$

*1. Montrer que $\forall n \in I\!N$, $1 \leq U_n \leq 2$.*

$U_0 = 1$ donc $1 \leq U_0 \leq 2$.

Si $1 \leq U_n \leq 2$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}U_n \leq 1$ et donc $\frac{1}{2} + 1 \leq \frac{1}{2}U_n + 1 + 1 \leq 1 + 1$. Soit $\frac{3}{2} \leq U_{n+1} \leq 2$. Et on a donc bien $1 \leq U_{n+1} \leq 2$

Donc $\forall n \in I\!N$, $1 \leq U_n \leq 2$.

*2. Montrer que $U_{n+1} - U_n$ a le même signe que $U_n - U_{n-1}$. En déduire la monotonie de $(U_n)_{n \in I\!N}$.*

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n + 1 - \frac{1}{2}U_{n-1} - 1 = \frac{1}{2}(U_n - U_{n-1})$. Donc $U_{n+1} - U_n$ et $U_n - U_{n-1}$ sont de même signe.

$U_1 - U_0 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0$.Donc par récurrence sur $n$, $U_{n+1} - U_n > 0$. Donc $U_n$ est croissante.

*3. $U_n$ est-elle convergente ? Si oui quelle est la limite de $U_n$ ?*

$U_n$ est croissante et majorée. Donc $U_n$ est convergente. Donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = l \in I\!R$. Si on passe à la limite dans la relation de récurrence, on obtient la relation suivante sur $l$ :

$l = \frac{l}{2} + 1$ soit $\frac{l}{2} = 1$ et donc $l = 2$. Et donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = 2$.

## 4 Monter que l'équation suivante admet une unique solution sur $[0; \pi]$

$$\cos(x) - \sqrt{x} = 0$$

Posons $f(x) = \cos(x) - \sqrt{x}$. $f$ est continue sur $[0; \pi]$. $f(0) = 1 > 0$. $f(\pi) = -1 - \sqrt{\pi} < 0$. Donc il existe $x_0 \in [0; \pi]$ tel que $f(x_0) = 0$.

Pour l'unicité, on s'intéresse à la monotonie de $f$.

$f'(x) = -\sin(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$ sur $[0; \pi]$.

$f$ est stictement monotone donc il existe **un unique** $x_0 \in [0; \pi]$ tel que $f(x_0) = 0$.

## 5 Etude de la fonction $f(x) = \sin(x) - \frac{2}{3}\sin^3(x)$.

*1. Montrer qu'on peut restreindre l'étude de $f$ à l'intervalle $[0; \pi]$.*

période : $2\pi$.

Fonction impaire.

*2. Montrer que $f'(x) = \cos(x)\cos(2x)$. En déduire les variations de $f$.*

$f'(x) = \cos(x) - 2\cos(x)\sin^2(x) = \cos(x)(1 - 2\sin^2(x))$. Puis voir le formulaire.

*3. Tracer la courbe représentative de $f$ sur $[-\pi; \pi]$.*