Interrogation d'Analyse.Corrigé.

1 Question de cours

Définition :
$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$
CF cours.

2 Etude de la suite $U_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

1. Montrer que $\forall n \in I\!N$, $1 \leq U_n \leq 2$.
$n+1 \leq 2n+1$, $\forall n$ donc $\frac{2n+1}{n+1} \geq 1$.
$2(n+1) = 2n+2 \geq 2n+1$, $\forall n$.
2. Etudier la montonie de U_n.
Méthode 1 :
$U_{n+1} - U_n = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{(2n+3)(n+1)-(2n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n^2+3n+2n+3-2n^2-4n-n-2}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$. Donc U_n est croissante.
Méthode 2:
$U_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$, $f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$. Donc U_n est croissante.
3. U_n *est-elle convergente ? Si oui caluler sa limite.*
U_n est croissante et majorée, donc U_n est convergente. $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(2+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2+\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})} = 2$ car $\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n} = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$.
4. Résoudre $|U_n - 2| \leq \varepsilon$. *Conclure.*
$|U_n - 2| = |\frac{2n+1}{n+1} - \frac{2(n+1)}{n+1}| = |\frac{2n+1-2n-2}{n+1}| = |-\frac{1}{n+1}| = \frac{1}{n+1}$.
Donc $|U_n - 2| \leq \varepsilon$ si et seulement si $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$ si et seulement si $n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon}$ si et seulement si $n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$.
Donc $\forall \varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ tel que $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $|U_n - 2| \leq \varepsilon$. On retrouve donc que $\lim_{n\to+\infty} = 2$.

3 Etude de la suite définie par récurrence.

$$\begin{cases} U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 1 \\ U_0 = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in I\!N$, $1 \leq U_n \leq 2$.

Par récurrence sur $n \in I\!N$.

$U_0 = 1$ donc $1 \leq U_0 \leq 2$.

Si $1 \leq U_n \leq 2$, $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}U_n \leq \frac{2}{3}$ et donc $\frac{1}{3} + 1 \leq \frac{1}{3}U_n + 1 \leq \frac{2}{3} + 1$. Soit $\frac{4}{3} \leq U_{n+1} \leq \frac{5}{3}$. Et on a donc bien $1 \leq U_{n+1} \leq 2$

Donc $\forall n \in I\!N$, $1 \leq U_n \leq 2$.

2. Montrer que $U_{n+1} - U_n$ *a le même signe que* $U_n - U_{n-1}$*. En déduire la monotonie de* $(U_n)_{n \in I\!N}$.

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3}U_n + 1 - \frac{1}{3}U_{n-1} - 1 = \frac{1}{3}(U_n - U_{n-1})$. Donc $U_{n+1} - U_n$ et $U_n - U_{n-1}$ sont de même signe.

$U_1 - U_0 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} > 0$.Donc par récurrence sur n, $U_{n+1} - U_n > 0$. Donc U_n est croissante.

3. U_n *est-elle convergente ? Si oui quelle est la limite de* U_n *?*

U_n est croissante et majorée. Donc U_n est convergente. Donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = l \in I\!R$. Si on passe à la limite dans la relation de récurrence, on obtient la relation suivante sur l :

$l = \frac{l}{3} + 1$ soit $\frac{2l}{3} = 1$ et donc $l = \frac{3}{2}$. Et donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1.5$.

4 Monter que l'équation suivante admet une unique solution sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

$$\cos(x) - \sqrt{x} = 0$$

Posons $f(x) = \cos(x) - \sqrt{x}$. f est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. $f(0) = 1 > 0$. $f(\frac{\pi}{2}) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} < 0$. Donc il existe $x_0 \in [0; \frac{\pi}{2}]$ tel que $f(x_0) = 0$.

Pour l'unicité, on s'intéresse à la monotonie de f.

$f'(x) = -\sin(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

f est stictement monotone donc il existe **un unique** $x_0 \in [0; \frac{\pi}{2}]$ tel que $f(x_0) = 0$.

5 Etude de la fonction $f(x) = \sin(x) - \frac{2}{3}\sin^3(x)$.

1. Montrer qu'on peut restreindre l'étude de f *à l'intervalle* $[0; \pi]$.

période : 2π.

Fonction impaire.

2. Montrer que $f'(x) = \cos(x)\cos(2x)$*. En déduire les variations de* f.

$f'(x) = \cos(x) - 2\cos(x)\sin^2(x) = \cos(x)(1 - 2\sin^2(x))$. Puis voir le formulaire.

3. Tracer la courbe représentative de f *sur* $[-\pi; \pi]$.