Modèles Déformables : Élasticité et Éléments Finis

Guillaume Picinbono

INRIA Sophia Antipolis
2004 route des Lucioles, BP 93
06902 Sophia Antipolis CEDEX

7 Septembre 1998

Introduction

Réalisme ET Temps Réel

Modélisation Géométrique:

DISCRETE	Masses/ressorts	CONTINUE	Éléments finis
Simplicité de mise en oeuvre		Réalisme Conservation du comportement en cas de changement de topologie Dans la cas d'éléments P1 et schéma explicite: Presque aussi simple que le discret	

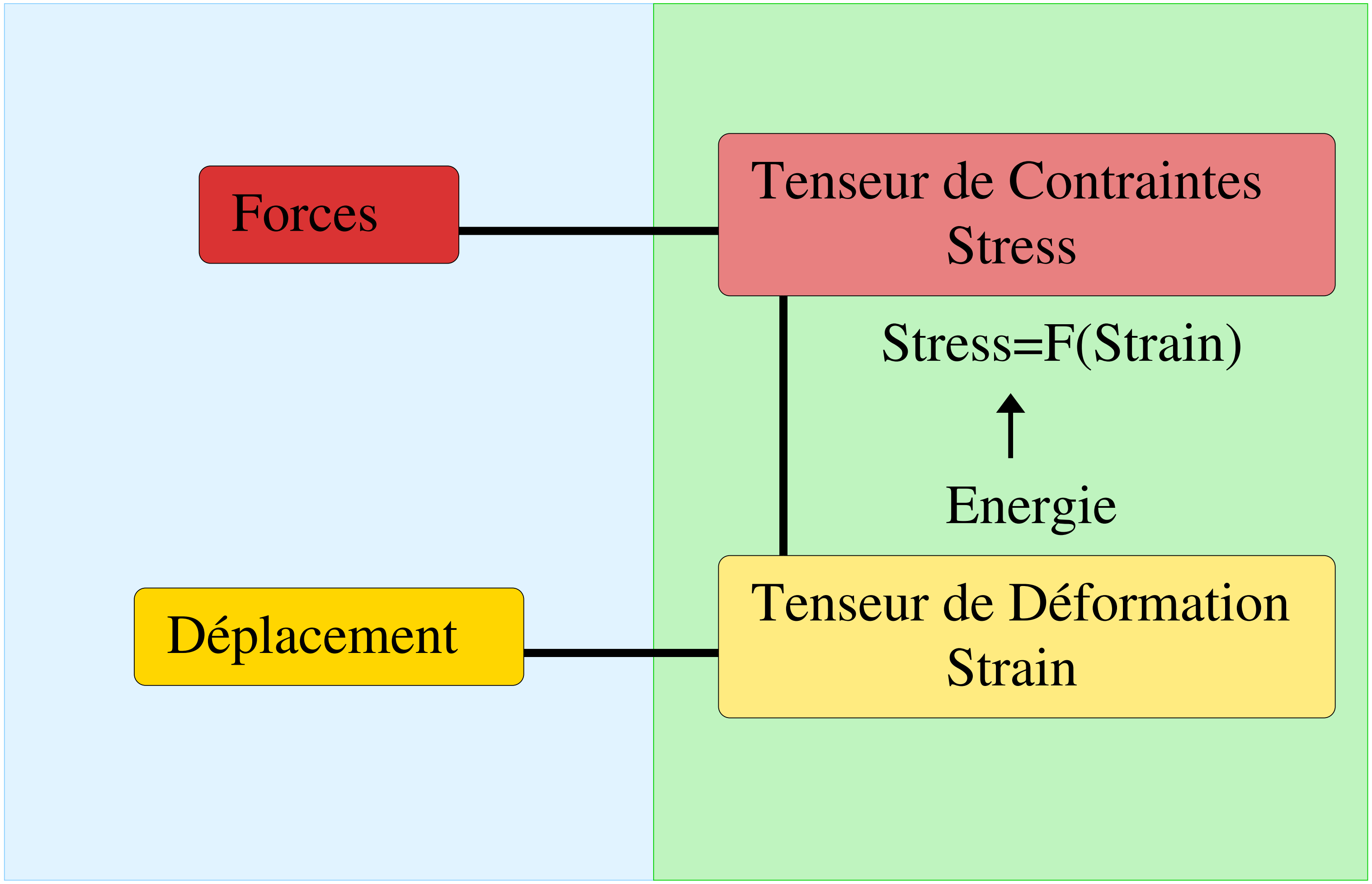
Comportement Physique:

	Linéaire	Non-Linéaire
Isotrope	Simple en explicite Précalculable en implicite Pas de chgt de Topologie Pas invariance par rotation Petites déformations	Tissus homogènes Réaliste mais Couteux Pré-calculs ou Décomposition modale?
Trans-iso	Modélisation des Vaisseaux et tissus à fibres	
Aniso. Surf.	Modélisation d'une peau : Capsule de Glisson	

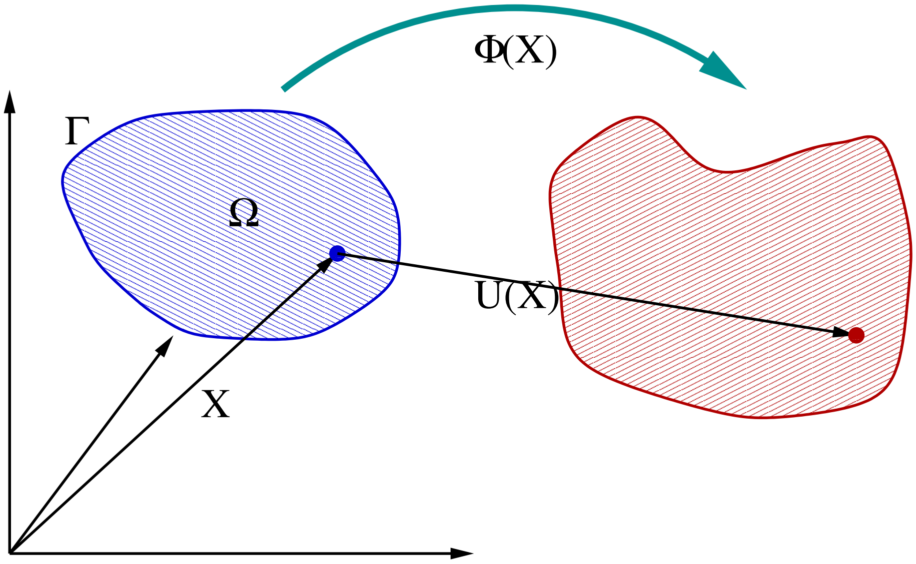
Plan

- Théorie de l'Élasticité
  - Généralités
  - St Venant-Kirchhoff
  - Approximation Linéaire
  - Isotropie Transverse
- Les Éléments Finis
- Mise en œuvre
  - Formulation Éléments Finis
  - Le modèle Masse/Tenseur
    - Linéaire et Anisotrope
    - Non-linéaire
- Perspectives

3 Théorie de l'Élasticité



Déformation et Déplacement



Φ: champs de déformation
U: champs de déplacement

$$\Phi(X,t) = X + U(X,t) \tag{1}$$

D'où pour les gradients:

$$\nabla\Phi = I + \nabla U \tag{2}$$

Tenseurs et Énergies

- Tenseur de Déformation (Strain):
  - Cauchy-Green:

$$C = \nabla\Phi^t \nabla\Phi \tag{3}$$

Si $\Phi(X) = RX + T$ alors $C = Id$

  - Green-St Venant:

$$E = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2}[\nabla U^t + \nabla U + \nabla U^t \nabla U] \tag{4}$$

Si $\Phi = RX + T$ alors $E = 0$

Théorie de l'Élasticité

Tenseurs et Énergies *(suite)*

- Hyperélasticité:
  Il existe une fonction scalaire $W(E)$ telle que:

$$\begin{array}{c|c} \boxed{\text{Hyperélasticité}} & \boxed{\text{ressort}} \\ \sigma(E) = \frac{\partial W(E)}{\partial E} & \begin{array}{c} E_p = 1/2\ k\ (\Delta l)^2 \\ f = k\ \Delta l \end{array} \end{array} \quad (5)$$

$\hookrightarrow W$: Énergie Potentielle de Déformation

- Pour les matériaux homogènes et isotropes:

$$W = \sum_{r,s,t=0}^{\infty} C_{rst}(I_1 - 3)^r (I_2 - 3)^s (I_3 - 1)^t \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = 3 + 2trE \\ I_2 = 3 + 4trE + 2\left[(trE)^2 - trE^2\right] \\ I_3 = |2E + I| \end{array} \right. \quad (7)$$

7 Théorie de l'Élasticité

Modèle de St Venant-Kirchhoff

Coefficients de Lamé: λ et μ

$$\begin{cases} C_{100} = \mu \\ C_{200} = \frac{\lambda+2\mu}{8} \\ C_{010} = -\frac{\mu}{2} \\ C_{rst} = 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{8}$$

On trouve la Loi de Hooke:

$$W = \frac{\lambda}{2}(trE)^2 + \mu trE^2 \tag{9}$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{\lambda}{2}\left[(div\ U) + \frac{1}{2}\|\nabla U\|^2\right]^2 \\ &+ \mu\|\nabla U\|^2 - \frac{\mu}{2}\|rot\ U\|^2 \\ &+ \mu(\nabla U : \nabla U^t \nabla U) + \frac{\mu}{4}\|\nabla U^t \nabla U\|^2 \end{aligned} \tag{10}$$

D'où par dérivation:

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial E} = \lambda(trE)I + 2\mu E \tag{11}$$

Théorie de l'Élasticité

Forme Variationnelle:

$$f(X) + \nabla . T(X) = 0$$

1^{er} Piola-Kirchoff T:

$$\sigma(\Phi, X) = \nabla\Phi^{-1}(X)T(X) = \frac{\partial W}{\partial E}$$

Forces – – – – – **Tenseur de contraintes**

2^{nd} Piola-Kirchoff:

$$\sigma = \lambda(trE)I + 2\mu E \qquad (12)$$

Energie Potentielle de Déformation:

$$W = \frac{\lambda}{2}(trE)^2 + \mu trE^2$$

Déplacement – – – – – **Tenseur de déformation**

$$\Phi(X) = X + U(X)$$

$$E = \frac{1}{2}[\nabla U^t + \nabla U + \nabla U^t \nabla U]$$

9 Théorie de l'Élasticité

Élasticité Linéaire

Approximation de E:

$$E_l = \frac{1}{2}\left[\nabla U^T + \nabla U\right] \tag{13}$$

$$(E)_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_j}\right) \tag{14}$$

Ce qui donne:

$$W_l = \frac{\lambda}{2}(div\ U)^2 + \mu\|\nabla U\|^2 - \frac{\mu}{2}\|rot\ U\|^2 \tag{15}$$

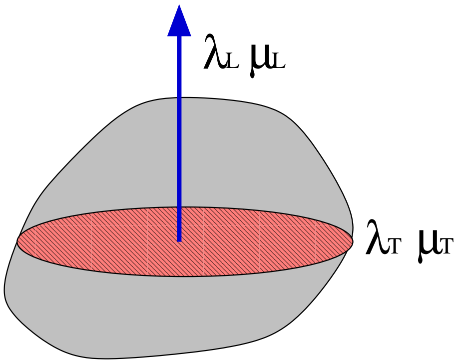
Et:

$$\delta W_l = \mu\Delta U + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla.U) \tag{16}$$

INRIA

isotropie Transverse

- Pour les matériaux présentant une direction privilégiée
- Nouvelles constantes d'élasticité:



- Nouvelle energie:

$$
\begin{aligned}
W_{iso} &= \frac{\lambda_T}{2}(trE)^2 + \mu_T trE^2 \\
&= \frac{\lambda_T}{2}[E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2 + 2(E_{11}E_{22} + E_{11}E_{33} + E_{22}E_{33})] \\
&\quad \mu_T[E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2 + 2(E_{12}^2 + E_{13}^2 + E23^2)]
\end{aligned}
$$

Théorie de l'Élasticité

isotropie Transverse *(suite)*

$$
\begin{aligned}
W_{Trans-iso} = W_{iso} \quad & + \quad (\lambda_L - \lambda_T)E_{33}trE \\
& + \quad 2(\mu_L - \mu_T)(E_{33}^2 + E_{32}^2 + E_{31}^2) \\
& - \quad \left(\frac{\lambda_L - \lambda_T}{2} + (\mu_L - \mu_T)\right) E_{33}^2 \\
= W_{iso} \quad & + \quad (\lambda_L - \lambda_T)(a_0^t E a_0)trE \\
& + \quad 2(\mu_L - \mu_T)(a_0^t E^2 a_0) \\
& - \quad \left(\frac{\lambda_L - \lambda_T}{2} + (\mu_L - \mu_T)\right) (a_0^t E a_0)^2
\end{aligned}
$$

➤ Nouveaux Invariants: $a_0^t E a_0$ et $a_0^t E^2 a_0$

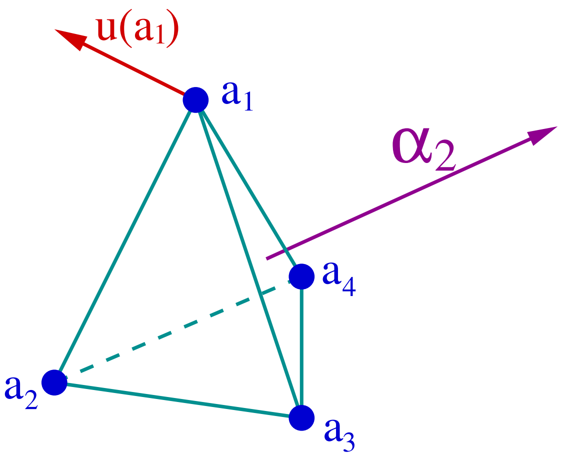
$$
\begin{aligned}
W_{Trans-iso} \quad = \quad & \frac{\lambda_T}{2}(trE)^2 + \mu_T trE^2 \\
& + (\lambda_L - \lambda_T)(a_0^t E a_0)trE \\
& + 2(\mu_L - \mu_T)(a_0^t E^2 a_0) \\
& - \left(\frac{\lambda_L - \lambda_T}{2} + (\mu_L - \mu_T)\right) (a_0^t E a_0)^2
\end{aligned}
$$

Plan

- Théorie de l'Élasticité
  - Généralités
  - St Venant-Kirchhoff
  - Approximation Linéaire
  - Isotropie Transverse
- Les Éléments Finis
- Mise en œuvre
  - Formulation Éléments Finis
  - Le modèle Masse/Tenseur
    - Linéaire et Anisotrope
    - Non-linéaire
- Perspectives

Les Éléments Finis

- L'Élément de base:
  - Tétraèdre
  - Fonction de Forme Linéaire
  - Élement Fini de type P_1



- Interpolation:

$$U(X) = \sum_{j=1}^{4} U(a_j)\lambda_j(X)$$

$$\lambda_j(X) = \alpha_j.X + \beta_j$$

Plan

- Théorie de l'Élasticité
  - Généralités
  - St Venant-Kirchhoff
  - Approximation Linéaire
  - Isotropie Transverse
- Les Éléments Finis
- Mise en œuvre
  - Formulation Éléments Finis
  - Le modèle Masse/Tenseur
    - Linéaire et Anisotrope
    - Non-linéaire
- Perspectives

Formulation Éléments Finis

- Tenseur de Déformation:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}[\nabla U^t + \nabla U + \nabla U^t \nabla U] \\
E_{ij} &= \frac{1}{2}\left[S_{ij}{}^t U_c + U_c{}^t P_{ij} U_c\right]
\end{aligned}
$$

- Energie Potentielle de Déformation: isotrope

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{\lambda}{2}(trE)^2 + \mu tr E^2 \\
&= \frac{\lambda}{2}\sum_{ij} E_{ii}E_{jj} + \mu \sum_{ij} E_{ij}^2 \\
&= U_c^t [B_2] U_c \\
&\quad + U_c^t \left[U_c \underset{2}{\boxtimes} B_3 \right] U_c \\
&\quad + U_c^t \left[(U_c \otimes U_c) \underset{23}{\boxtimes} B_4 \right] U_c
\end{aligned}
$$

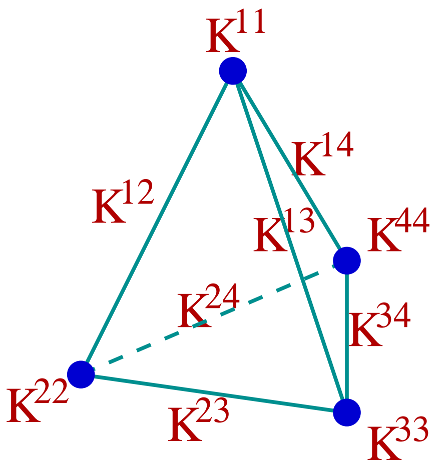
INRIA

Le modèle Masse/Tenseur

Linéaire

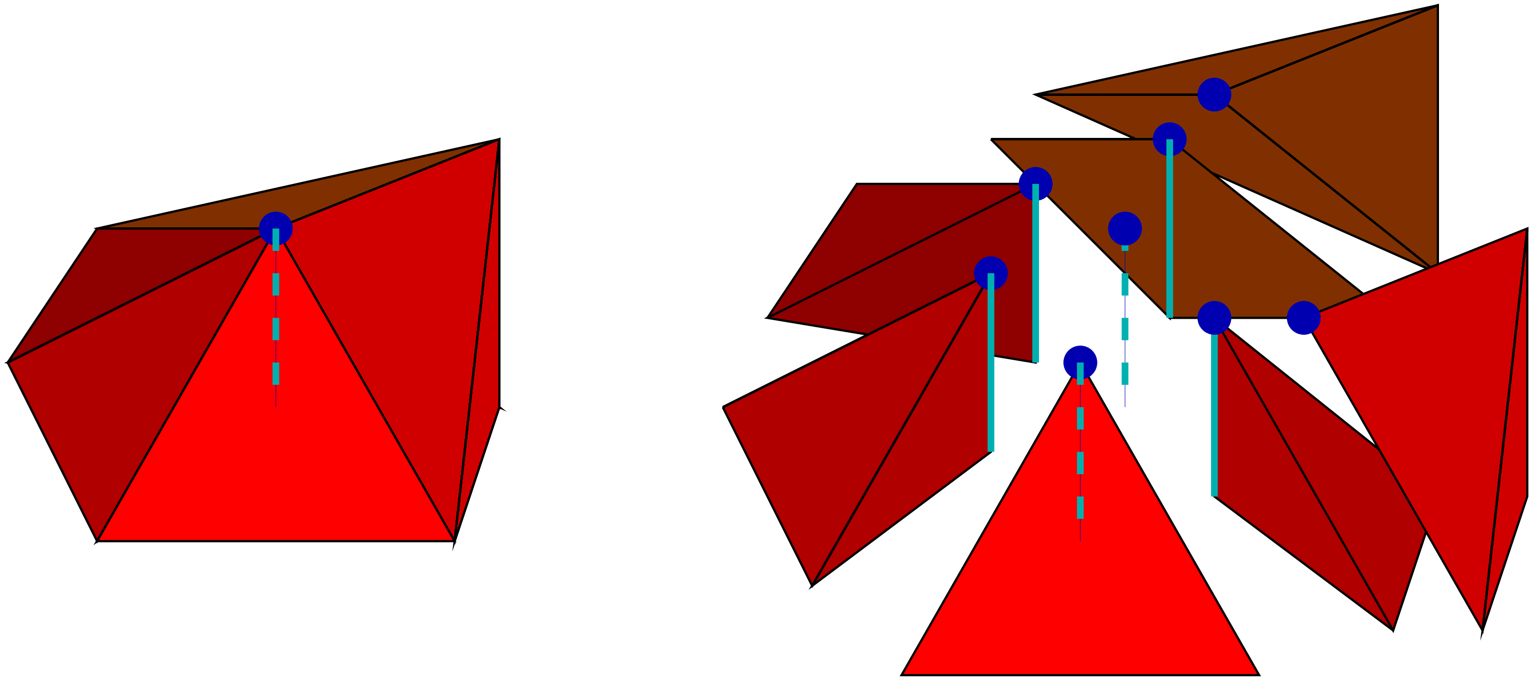
- Décomposition en Blocs

$$
\begin{aligned}
W_l &= U_c^t [B_2] U_c \\
&= \sum_{K,L=1}^{4} U^t(a_K)\,[K^{KL}]\,U(a_L) \\
F_l(a_P) &= 2 \sum_K [K^{PK}]\,U(a_K) \\
&= 2[K^{PP}]\,U(a_P) + 2 \sum_{K \neq P} [K^{PK}]\,U(a_K)
\end{aligned}
$$



17 Mise en œuvre

- Accumulation des Tenseurs de Rigidité sur les Sommets et les Arêtes:

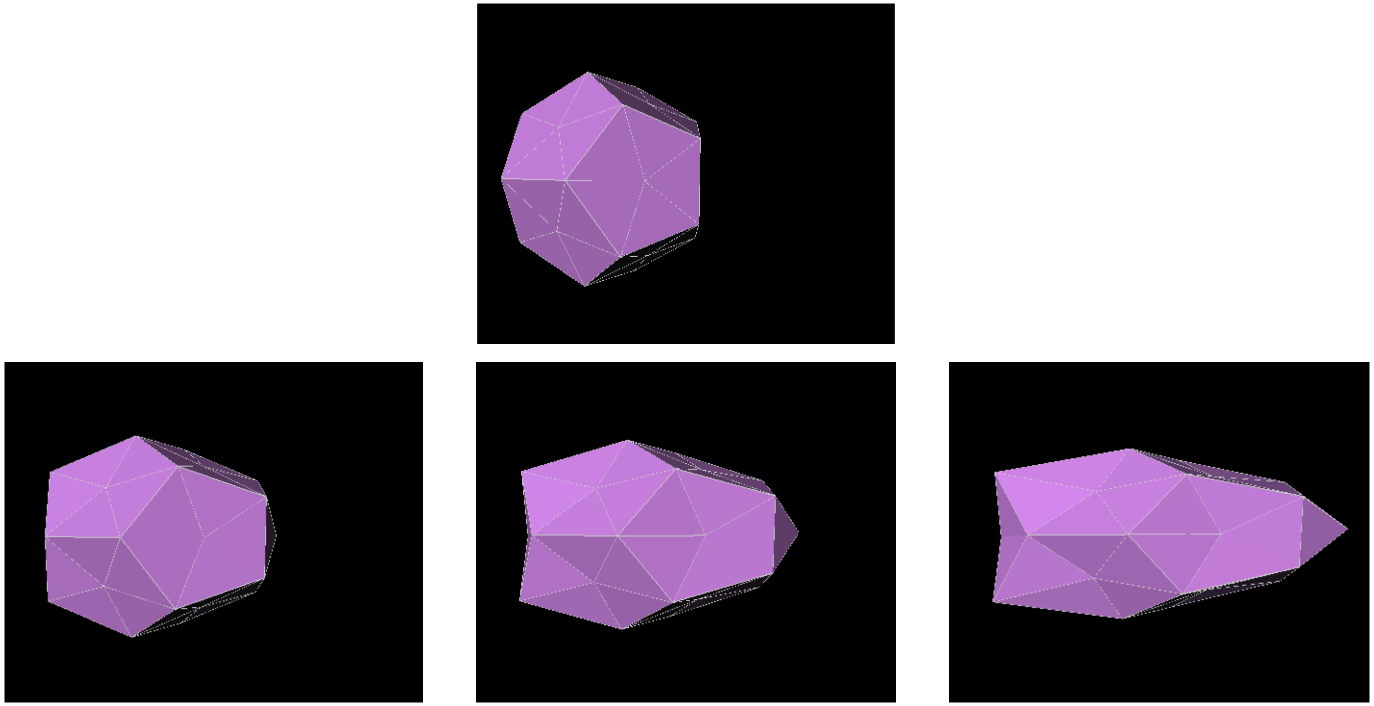


- Évaluations des forces sur les sommets:

$$F_l(a_P) = 2[K_{tot}^{PP}]\,U(a_P) + 2 \sum_{\text{arêtes } \in \nu(a_P)} [K_{tot}^{PK}]\,U(a_K)$$

Mise en œuvre

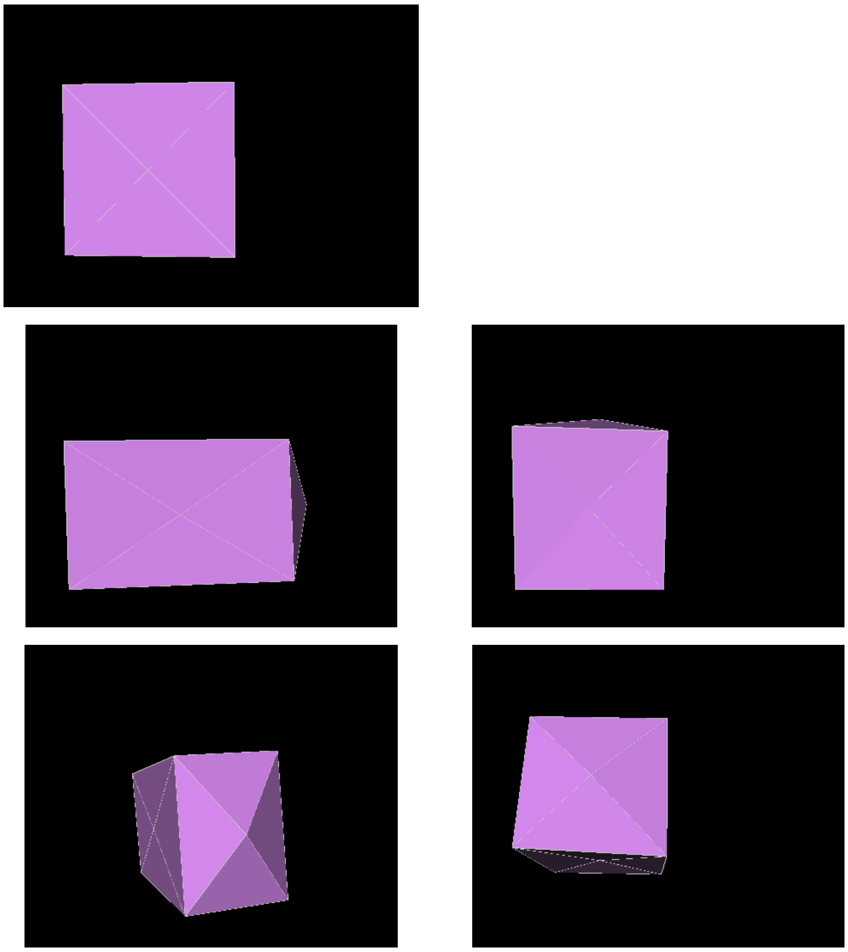
Le modèle Masse/Tenseur *(suite)*



Mise en œuvre

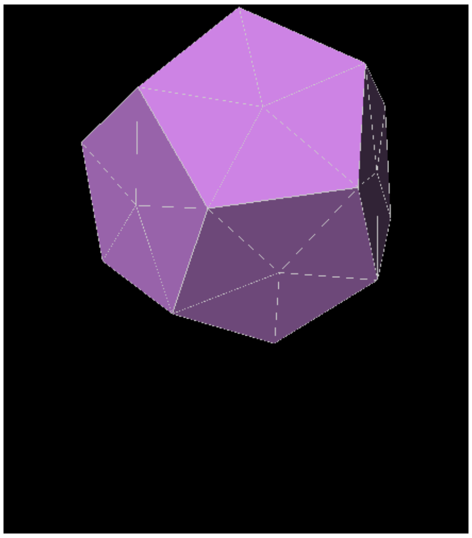
Transversallement Isotrope

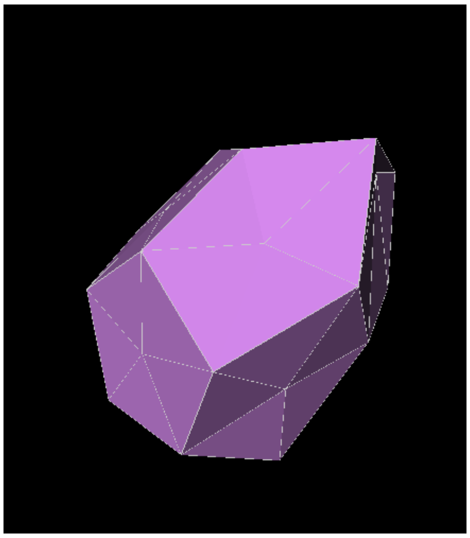
$$F_{trans-iso}(a_P) \quad = \quad F_{iso} + \sum [A]\ U$$



Le modèle Masse/Tenseur *(suite)*

Non-Linéaire





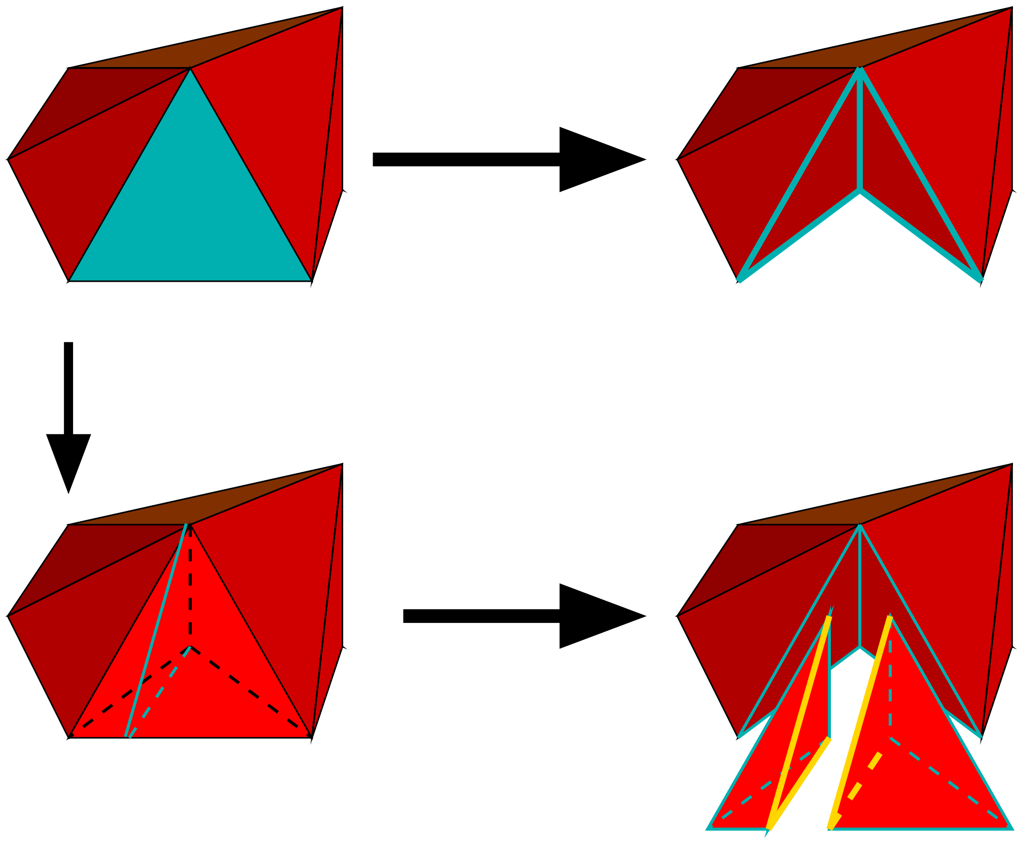
$$
\begin{aligned}
F_{non-lin}(a_P) &= \sum [K]\, U \\
&+ \sum \sum [V]\, U\, U \\
&+ \sum \sum \sum [M]\, U\, U\, U
\end{aligned}
$$

Plan

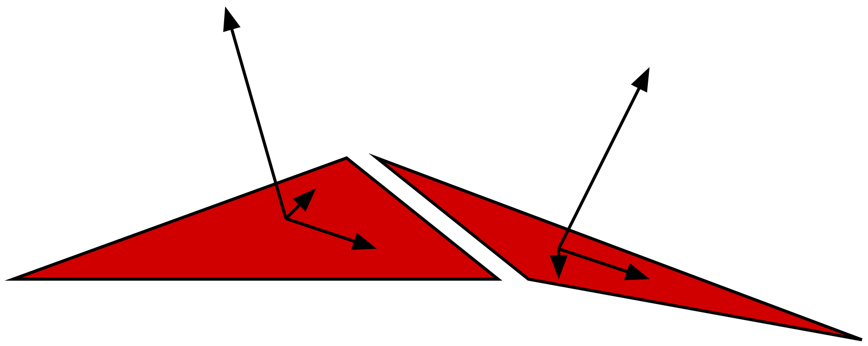
- Théorie de l'Élasticité
  - Généralités
  - St Venant-Kirchhoff
  - Approximation Linéaire
  - Isotropie Transverse
- Les Éléments Finis
- Mise en œuvre
  - Formulation Éléments Finis
  - Le modèle Masse/Tenseur
    - Linéaire et Anisotrope
    - Non-linéaire
- Perspectives

Perspectives

- Découpe et Intégration dans le Maillage Adaptatif:



- Anisotropie de surface:



Références