DES PROBABILITÉS AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Guillaume GAUDRON

1. Rappels et Notations

1.1 Variable aléatoire

Une variable aléatoire est une fonction qui à un résultat d'un tirage aléatoire associe une certaine valeur.

exemple : Carlos joue à la belote (cf. [2]). Il choisit au hasard son partenaire parmi deux possibilités, $\Omega = \{Castor, Pollux\}$. Il sait qu'il perdra 3 parties dans le premier cas et 5 dans le deuxième cas. On peut modéliser cette mauvaise expérience par une variable aléatoire X définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} X(Castor) = 3 \\ X(Pollux) = 5. \end{array} \right. \tag{1}$$

On pourra alors parler du nombre moyen de parties perdues par Carlos en considérant l'espérance E de la variable aléatoire X (définie par sa moyenne pondérée, ici on suppose qu'il y a équiprobabilité) :

$$\begin{aligned} E(X) &= 3 \times \text{Probabilité de choisir Castor } + 5 \times \text{Probabilité de choisir Pollux} \\ &= 3.\frac{1}{2} + 5.\frac{1}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

1.2 Processus stochastique

Un processus est une variable aléatoire à laquelle on associe non pas une seule valeur mais une fonction dépendant du temps.

exemple : un industriel hésite entre équiper ses machines de PC sous Windows 97 ou de Mac. On peut alors modéliser les conséquences de son "pile ou face" par une variable aléatoire associant à son choix une certaine progression de l'entreprise :

$$\left\{ \begin{array}{l} X(Pc) = f_1 \text{ où } f_1(t) = -t \\ X(Mac) = f_2 \text{ où } f_1(t) = 2t \end{array} \right. \tag{2}$$

Dans ce cas on ne peut plus parler de valeur moyenne de la variable aléatoire X. On peut en revanche parler de valeur moyenne à l'instant t définie par :

$$\begin{aligned} E(X_t) &= f_1(t) \times \text{Probabilité de choisir Pc } + f_2(t) \times \text{Probabilité de choisir Mac} \\ &= -t.\frac{1}{2} + 2t.\frac{1}{2} \\ &= \frac{t}{2} \end{aligned}$$

Par commodité, on appellera $X_t(w)$ la valeur au temps t de la fonction associée à w (w étant le résultat du tirage aléatoire).

1.3 Filtration

On appellera filtration ou "passé" d'un processus stochastique X la connaissance des valeurs de X jusqu'au temps t :

$$\mathcal{F}_t^X = \{X_s, 0 \leq s \leq t\}$$

On dira qu'un processus stochastique Y est adapté à la filtration $\mathcal{F}^X$ si Y_t ne dépend de X que par l'intermédiaire des valeurs de X entre 0 et t. En ce sens on pourra dire que Y est cohérent avec X, qu'il n'anticipe pas.

1.4 Martingale

Certains processus sont appelés martingales (on ne rentrera pas dans le détail de leur définition...). Si M est une martingale, on admettra que l'objet noté $\int_0^t K_s dM_s$ est aussi une martingale, prenant la valeur 0 quand $t = 0$ et telle que $E(\int_0^t K_s dM_s) = 0$.

1.5 Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien, noté B, est un processus particulier qui se définit de manière unique par les propriétés suivantes :
i) toutes ses réalisations sont des fonctions continues,
ii) $B_0 = 0$,
iii) $E(B_t^2) < \infty$,
iv) $B_t - B_s$ ($t \geq s$) est indépendant de $\mathcal{F}_s$ (ie ne dépend pas du passé de B jusqu'au temps s),
v) $B_t - B_s$ se comporte (à s fixé, t variable) de la même manière que B_{t-s} (on dit que $B_t - B_s$ et B_{t-s} ont même loi).

Le mouvement Brownien est fondamental dans tout le développement du calcul stochastique. C'est une martingale dont on connait la loi : B_t suit une loi gaussienne, de moyenne 0 et d'écart-type $\sqrt{t}$.

2. Des Équations aux Dérivées Partielles (EDP) linéaires

2.1 Théorie

Définissons

$$X_t = x + B_t \tag{3}$$

et appelons

$$u(x,t) = E[g(X_t)] \tag{4}$$

où g est une fonction quelconque donnée par avance ($Y(w) = g(X(w))$ définit un nouveau processus dont on peut considérer la valeur moyenne au temps t).

théorème 21
u est solution de l'EDP

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u \\ u(x, t = 0) = g(x) \end{array} \right. \tag{5}$$

Soit maintenant v une certaine fonction. Supposons maintenant que, à B donné, X soit "solution" de l'équation suivante :

$$X_t = x + B_t + \int_0^t v(X_s) ds \tag{6}$$

et appelons toujours

$$u(x, t) = E[g(X_t)] \tag{7}$$

théorème 22
u est solution de l'EDP

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u + v(x).\frac{\partial u}{\partial x} \\ u(x, t = 0) = g(x) \end{array} \right. \tag{8}$$

2.2 Applications

D'après ce qui précède, on voit qu'il existe un lien très fort entre le type d'EDP présenté et le processus qui lui est associé. Les méthodes probabilistes consistent donc à étudier les processus stochastiques et à déduire de leurs propriétés des théorèmes sur les EDP.

Citons par exemple un modèle de diffusion d'une particule dans un milieu aléatoire introduit par Avellaneda et Majda en 1990 [1] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - v_\varepsilon(x, t)\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\nu_0.\Delta u \\ u(x, y, t = 0) = u_0(\varepsilon x, \varepsilon y) \end{array} \right. \tag{9}$$

où $v_\varepsilon(x)$ est un champ de vitesse aléatoire (gaussien) satisfaisant aux hypothèses de Kolmogorov, dépendant de deux paramètres. Les auteurs étudient difficilement des propiétés de type champ moyen à l'aide de méthodes d'analyse, mettant en évidence des phénomènes de lois d'échelle "anormales". Dans ce cas la techniques des processus stochastiques donne de bons résultats (voir [4]).

On peut utiliser des modèles semblables au précédent en océanographie, les processus stochastiques pouvant parfaitement conduire à des simulations numériques (voir figure 1 le travail effectué dans [3]).

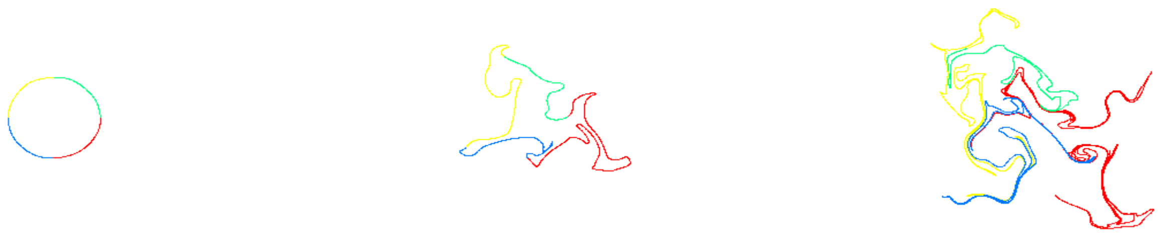

Figure 1: cercle de particules diffusives déformé sous l'action du champ de vitesse v

3. Des Équations aux Dérivées Partielles (EDP) non linéaires

3.1 Théorie

Soit X un processus stochastique donné (voir (3)) et considérons le processus stochastique

$$Y_t \quad = \quad Y_0 + B_t + \int_0^t h(Y_s)ds$$

où Y_0 est le point de départ, déterministe. Supposons cette fois que l'on veuille non pas un point de départ donné mais un point d'arrivée au temps T. On souhaite donc en résumé construire un processus Y tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = Y_0 + B_t + \int_0^t h(Y_s)ds \\ Y_T = g(X_T) \end{array} \right. \tag{10}$$

Cette tâche, a priori anodine pour des analystes (il suffit de renverser le temps...!) est en fait des plus compliquées en probabilité car le processus Y, défini par une condition finale, doit être adapté à la filtration $\mathcal{F}^B$. Pourtant on peut montrer qu'une telle construction est possible. Elle conduit à une condition initiale "inconnue", mais déterministe par construction, notée $Y_0^{T,x}$ (puisqu'elle dépend de T et x). Une telle équation est appelée "équation différentielle stochastique rétrograde" (EDSR) et a été introduite pour la première fois par Pardoux et Peng en 1990 ([6]).

Ce qui peut paraître surprenant est le résultat suivant :

théorème 31
Posons $u(t,x) = Y_0^{t,x}$. Alors u est solution de l'EDP

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(u) \\ u(x, t=0) = g(x) \end{array} \right. \tag{11}$$

En fait l'équation rétrograde (10) n'a pas nécessairement de solution sous cette forme. Le théorème général est le suivant :

théorème 32
Soit X le processus solution de (6). Sous de bonnes hypothèses, l'EDSR

$$Y_t = g(X_T) - \int_t^T h(X_s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s.dB_s$$

admet une unique solution $\mathcal{F}_t$-adaptée (Y,Z) vérifiant $E(\int_0^T |Z_s|^2 ds) < \infty$.
Posons alors $u(t,x) = Y_0^{t,x}$. u est solution de (de viscosité) l'EDP non-linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v(x)\frac{\partial u}{\partial x} + h(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}) \\ u(x, t=0) = g(x) \end{cases} \tag{12}$$

3.2 Applications

Un des grands succés de cette méthode provient de son exploitation dans des modèles financiers. En effet, la condition finale représente typiquement la valeur d'un portefeuille d'actions à un instant final et on aimerait connaître quelle stratégie adopter pour arriver à cette situation. Autrement dit, dans un marché financier très perturbé (soumis à beaucoup d'aléas...), on aimerait trouver le contenu otpimal initial d'un portefeuille d'actions.

L'autre succés, moins médiatique, vient de ce que cette méthode permet de prouver des résultats d'existence et d'unicité pour certains types d'EDP non linéaires. A ce titre il ne serait pas surprenant, vus les rapports étroits existant entre processus stochastiques et certaines classes d'EDP qu'un chercheur prouve leur équivalence mathématique...

4. Conclusion

Volontairement, aucune preuve des théorèmes n'a été donnée. On pourra se rapporter pour cela à [7]. Les démonstrations reposent sur la théorie des martingales, la formule d'Itô et la propriété de Markov des processus étudiés (le futur ne dépend du passé que par l'intermédiaire de la valeur du présent).

Une des forces des modèles probabilistes (en finance, mécanique des fluides, physique etc...) vient de ce qu'avec des équations a priori très simple (linéaires...), on obtient des comportements qui se rapprochent de comportements non-linéaires. Pour les étudier, les processus stochastiques et toutes les techniques du calcul stochastique paraîssent bien adaptées.

References

[1] M. AVELLANEDA and A. MAJDA : Mathematical Models with exact Renormalization for Turbulent Transport, *Communications in Mathematical Physics 131*, p. 381-429 (1990)

[2] CARLOS : Moi et la "Coinche", *Izotges Review*, Vol. 12, number 4 (1997)

[3] R. CARMONA, F. CEROU (1997)

[4] G. GAUDRON : Scaling Laws and Convergence for Advection-Diffusion Equation, *preprint LATP 96-13*

[5] S. OLLA : Homogeneization of Diffusion Processes in Random Fields, *Cours de l'Ecole Doctorale de l'Ecole Polytechnique* (1994)

[6] E. PARDOUX, S. PENG : Adapted Solution of a Backward Stochastic Differential Equation, *Systems and Control Letters 14*, p. 55-61 (1990)

[7] D. REVUZ, M. YOR, Continuous Martingales and Brownian Motion, Springer (1991)