

# Nouvelle Architecture pour un Manipulateur Parallèle à Six Degrés de Liberté

Jean-Pierre Merlet  
et  
Clément Gosselin†  
INRIA  
Centre de Sophia-Antipolis  
2004 Route des Lucioles  
06565 Valbonne Cedex  
FRANCE

March 28, 2009

† Maintenant à l'Université Laval, Département de  
Génie Mécanique, Québec, G1K 7P4, Canada

Article soumis à  
Mechanism and Machine Theory

## Résumé

Une nouvelle architecture mécanique de manipulateur parallèle est proposée dans cet article. Après un bref rappel de l'évolution des manipulateurs parallèles, les caractéristiques géométriques du nouveau système sont décrites et la solution du problème cinématique inverse, qui est d'une importance primordiale pour la commande du robot, est présentée sous forme explicite. Les expressions pour la matrice Jacobienne inverse ainsi que de sa dérivée par rapport au temps—utilisée pour la solution du problème d'accélération inverse—sont ensuite données. On présente alors différents cas de configurations singulières. L'étude de la solution du problème cinématique inverse conduit à une description exacte de l'espace atteignable par le manipulateur dont certaines sections sont tracées à titre d'exemple. Enfin, la matrice de raideur du manipulateur est définie, ce qui permet d'établir une cartographie de la raideur à l'intérieur de l'espace atteignable. Des exemples de telles cartes sont aussi inclus.

# 1 Introduction

Les limitations inhérentes à l'utilisation des architectures classiques de type série pour la construction de manipulateurs robots ont conduit les chercheurs à s'intéresser à des architectures alternatives parallèles ou hybrides (série-parallèle). En fait, ces systèmes mécaniques ont d'abord été développés pour des applications autres que la robotique. En effet, au meilleur de la connaissance des auteurs, le premier système mécanique de ce type rapporté dans la littérature scientifique est la machine construite par Gough [?] en 1949 pour tester des pneus. Par la suite, Stewart [?], a suggéré l'utilisation de cette structure comme générateur de mouvement pour les simulateurs de vol. Ceux-ci constituent encore de nos jours l'application principale des systèmes à architecture parallèle. Il est à noter, toutefois, que l'architecture proposée par Stewart était en fait une architecture hybride alors que les simulateurs de vol modernes sont, en général, construits suivant une architecture complètement parallèle.

L'idée d'utiliser les structures parallèles en robotique est cependant un peu plus récente. En effet, même si Tindale [?] avait déjà suggéré la possibilité d'utiliser une telle architecture pour une machine outil, il faut attendre les années 70 pour que les applications en robotique apparaissent. McCallion et Pham [?] sont parmi les premiers à avoir mis au point un dispositif expérimental pour l'étude de l'efficacité de la structure parallèle pour certaines opérations mécaniques. Une analyse systématique de tous les arrangements cinématiques possibles est présentée en [?]. Par ailleurs, Hunt [?] a identifié certaines architectures qui offrent un potentiel plus important pour les applications en robotique.

Ces architectures, de même que certaines autres, ont été reprises et étudiées par plusieurs auteurs. Ainsi, Zamanov et Sotirov [?], Mohamed et Duffy [?], Fichter [?], Reboulet [?], [?] et Merlet [?], [?], ont mis au point des prototypes de manipulateurs parallèles à 6 degrés de liberté complètement parallèles pour des applications générales de robotique. Seguchi et al. [?], pour leur part, proposent un système articulé de type hybride basé sur des treillis dits déformables. Une architecture différente, basée sur des parallélogrammes, est utilisée par Inoue et al. [?] pour la construction d'un manipulateur léger à 6 degrés de liberté. En outre, des prototypes à 3 degrés de liberté sont présentés en [?], [?], [?] où il est suggéré qu'un poignet à 3 degrés de liberté soit monté sur la base parallèle afin d'obtenir un ensemble hybride à 6 degrés de liberté. Un autre type de manipulateur hybride fonctionnant à l'aide d'actionneurs dits *R-L*, c'est à dire, de liaisons rotoïdes et

prismatiques montées sur un axe commun, est proposé en [?]. Finalement, des manipulateurs parallèles destinés aux mouvements plans sont étudiés en [?], [?] alors que des poignets sphériques, aussi à architecture parallèle sont proposés en [?], [?] et qu'un prototype est en cours de développement à l'INRIA.

Dans cet article, une architecture nouvelle est proposée pour un manipulateur parallèle spatial à 6 degrés de liberté actionné par des liaisons prismatiques dont une des extrémités est fixée à la base. Les caractéristiques géométriques du manipulateur sont d'abord exposées, puis, les problèmes de cinématique inverse, de calcul de la matrice Jacobienne inverse et de détermination de l'espace atteignable sont solutionnés. La raideur du manipulateur fait aussi l'objet d'une investigation puisqu'il s'agit d'une propriété particulièrement importante pour un manipulateur parallèle.

## 2 Architecture proposée

Les études menées jusqu'à présent sur les manipulateurs à 6 degrés de liberté et à architecture complètement parallèle [[?]-[?]] ont permis d'identifier les avantages ainsi que les problèmes associés à de tels arrangements.

Un des principaux avantages est évidemment la rigidité des manipulateurs parallèles qui les rend particulièrement adaptés à la commande par retour d'effort [?], [?], [?]. Dans ce contexte, deux modes d'utilisation de la structure parallèle sont envisageables en robotique soit *i*) la configuration *main gauche* où le manipulateur parallèle supporte l'objet à manipuler et travaille en coopération avec un robot de type classique [?] et *ii*) la configuration *poignet actif* où le manipulateur parallèle est monté sur un robot porteur classique, le robot porteur étant chargé des grands déplacements alors que le manipulateur parallèle effectue les mouvements fins avec commande par retour d'effort [?]. Pour cette seconde application, qui est visée ici, le manipulateur parallèle doit donc être aussi léger et compact que possible. De plus, il est souhaitable que les vérins soient situés le plus près possible de la base de la structure parallèle afin d'amener le centre de gravité le plus près possible du point d'attache sur le robot porteur.

L'architecture du manipulateur parallèle proposé ici est montrée à la figure ???. Les 6 actionneurs sont des vérins prismatiques mais, contrairement au cas des robots étudiés en [[?]-[?]], ils ne sont pas montés le long des segments reliant le plateau à la base mais plutôt fixés à celle-ci, et tous en position verticale. Ainsi, le mouvement du plateau est obtenu non pas

en variant la longueur des segments mais en variant la position des points d'articulation sur la base par un mouvement vertical des vérins. En d'autres termes, on peut dire que la topologie de chacun des segments, décrite de la base vers le plateau, est changée de *SPH* à *PSH* où *P*, *S* et *H*, désignent des liaisons prismatiques, sphériques et de cardan, respectivement. Les segments, de longueur fixe, sont ainsi très légers puisque le poids des actionneurs est concentré dans la base de la structure. De plus, les segments étant maintenant des corps uniformes et non encombrants, l'espace atteignable du manipulateur risque moins d'être réduit par les collisions des segments entre eux et les tests d'intersection pour détecter de telles collisions deviennent beaucoup plus faciles à mettre en oeuvre en raison de la simplicité géométrique des segments. Cette structure est donc tout à fait appropriée pour la configuration *poignet actif* décrite plus haut.

Les dimensions du prototype INRIA sont données dans le tableau ???. Une vue du prototype est présentée en figure ??. La longueur totale du prototype est de 30cm, pour une charge utile de 4kg et une masse propre de 2.5kg, le centre de gravité étant situé au tiers inférieur. Les vérins sont constitués par des moteurs à courant continu en prise directe sur une vis à billes. Les déplacements des vérins sont mesurés par des potentiomètres linéaires de précision.

Dans les sections suivantes, les problèmes reliés à la cinématique du nouveau manipulateur parallèle seront solutionnés.

### 3 Modèle cinématique

Afin de pouvoir utiliser la structure parallèle présentée plus haut pour des tâches robotiques, il est indispensable de connaître les relations entre les coordonnées Cartésiennes du plateau—c'est à dire la position d'un point  $O'$  lié au plateau et l'orientation de celui-ci—et les coordonnées des actionneurs. Les paramètres de dimensionnement utilisés pour chacun des segments du manipulateur sont montrés à la figure ??. On définit d'abord un repère  $(Oxyz)$ , fixé à la base du manipulateur et dont l'axe  $z$  est parallèle à l'axe des vérins, et un repère mobile  $(O'x'y'z')$  lié au plateau. Les coordonnées du vecteur position de l'origine du repère mobile  $O'$  par rapport au point fixe  $O$ , et exprimées dans le repère fixe sont données par le triplet  $(x, y, z)$ . De plus, on note par  $A_i$  le point situé sur l'axe du  $i$ ème vérin et qui correspond à la position extrême (vers le bas) du point d'articulation. Les coordonnées de ce point dans le repère fixe sont données par  $(x_{ai}, y_{ai}, z_{ai})$ . Le point  $S_i$ , se

déplaçant sur l'axe de l'actionneur, correspond au point d'attache du  $i$ ème segment (cardan) sur la partie mobile du vérin. La coordonnée exprimant le déplacement de  $S_i$  par rapport à  $A_i$  est donnée par  $s_i$ . La course du  $i$ ème actionneur est donnée par la distance  $d_i$  et la longueur du  $i$ ème segment par  $l_i$ . On note également  $B_i$ , le point d'attache du  $i$ ème segment au plateau et les coordonnées de ce point dans le repère lié au plateau sont données par  $(x'_{bi}, y'_{bi}, z'_{bi})$ . L'orientation du plateau par rapport à la base est spécifiée par la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$  qui correspond à la rotation qui amène le repère  $(Oxyz)$  dans une orientation identique à celle du repère  $(O'x'y'z')$ . Ainsi, la position du point  $B_i$ , le point d'articulation du  $i$ ème segment sur le plateau, exprimée dans le repère fixe et notée  $(x_{bi}, y_{bi}, z_{bi})$ , est donnée par

$$x_{bi} = x + q_{11}x'_{bi} + q_{12}y'_{bi} + q_{13}z'_{bi}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (1)$$

$$y_{bi} = y + q_{21}x'_{bi} + q_{22}y'_{bi} + q_{23}z'_{bi}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2)$$

$$z_{bi} = z + q_{31}x'_{bi} + q_{32}y'_{bi} + q_{33}z'_{bi}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3)$$

où  $q_{ij}$  désigne l'élément  $ij$  ( $i$ ème ligne,  $j$ ème colonne) de la matrice  $\mathbf{Q}$ . Etant donné que l'axe  $z$  du repère fixe est parallèle à l'axe des actionneurs, on peut écrire

$$x_{si} = x_{ai}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4)$$

$$y_{si} = y_{ai}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (5)$$

où  $x_{si}$  et  $y_{si}$  sont les coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $S_i$  exprimées dans le repère fixe. Par ailleurs, la longueur du  $i$ ème segment étant égale à la distance entre les points  $B_i$  et  $S_i$ , on a

$$l_i^2 = (x_{bi} - x_{si})^2 + (y_{bi} - y_{si})^2 + (z_{bi} - z_{si})^2, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (6)$$

et la substitution des équations (??) et (??) dans l'équation (??) donne alors

$$l_i^2 = (x_{bi} - x_{ai})^2 + (y_{bi} - y_{ai})^2 + (z_{bi} - z_{si})^2, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (7)$$

La coordonnée  $z$  du point  $S_i$  peut donc être obtenue directement en réécrivant cette dernière équation sous la forme

$$z_{si} = z_{bi} - \sqrt{l_i^2 - (x_{bi} - x_{ai})^2 - (y_{bi} - y_{ai})^2}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (8)$$

où le signe devant le radical a été choisi afin d'obtenir la configuration pour laquelle le plateau est situé au-dessus (direction positive de l'axe des  $z$ ) de la

base, ce qui correspond au cas qui nous intéresse. Le calcul des coordonnées des actionneurs peut donc être effectué simplement à partir des valeurs de  $z_{si}$ , c'est à dire

$$s_i = z_{si} - z_{ai}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (9)$$

Les equations (1,2,3,8,9) représentent donc la solution explicite du problème cinématique inverse puisque les coordonnées des actionneurs  $y$  sont obtenues à partir des coordonnées Cartésiennes du plateau  $(x, y, z, \mathbf{Q})$  et des paramètres dimensionnels du manipulateur  $(x_{ai}, y_{ai}, z_{ai})$  et  $(x'_{bi}, y'_{bi}, z'_{bi})$ . On dispose alors d'un modèle de la forme

$$\mathbf{s} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) \quad (10)$$

où  $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_6]^T$  est le vecteur regroupant les 6 coordonnées articulaires et  $\mathbf{X} = [x, y, z, q_{11}, q_{12}, \dots, q_{33}]^T$  est le vecteur regroupant les coordonnées Cartésiennes du plateau.

Le calcul de la cinématique directe, comme c'est souvent le cas pour les robots parallèles, est bien plus complexe. On a pu montrer toutefois, en utilisant une méthode similaire à celle décrite par Namua et Waldron [?] qu'il pouvait se ramener à la résolution d'un polynôme de degré 24. Il existe donc au plus 24 possibilités d'assemblage de ce type de manipulateur pour un ensemble de positions articulaires fixées.

## 4 Matrice Jacobienne inverse

On obtient les relations entre les vitesses articulaires et les vitesses Cartésiennes du plateau en dérivant les relations obtenues au paragraphe précédent par rapport au temps. Toutefois, avant de procéder, il convient de réécrire certaines de ces équations sous forme vectorielle. Ainsi, les equations (??- ??) deviennent

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{b}'_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (11)$$

où  $\mathbf{b}_i = [x_{bi}, y_{bi}, z_{bi}]^T$ ,  $\mathbf{p} = [x, y, z]^T$  et  $\mathbf{b}'_i = [x'_{bi}, y'_{bi}, z'_{bi}]^T$ . De plus, l'équation (??) devient

$$\mathbf{s} = \mathbf{z}_s - \mathbf{z}_a \quad (12)$$

où on a regroupé les 6 coordonnées  $z$  des points  $S_i$  et  $A_i$  dans les vecteurs  $\mathbf{z}_s$  et  $\mathbf{z}_a$ , c'est à dire

$$\mathbf{z}_s = [z_{s1}, \dots, z_{s6}]^T \quad (13)$$

$$\mathbf{z}_a = [z_{a1}, \dots, z_{a6}]^T \quad (14)$$

La dérivation par rapport au temps de l'équation (??) conduit à

$$\dot{\mathbf{b}}_i = \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{b}'_i = \dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}\mathbf{b}'_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (15)$$

où l'on a utilisé la relation

$$\dot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q} \quad (16)$$

dans laquelle on a

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{1} \times \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

où  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$  est le vecteur représentant la vitesse angulaire du plateau mobile et où  $\mathbf{1}$  désigne la matrice identité. L'équation (15) peut donc être réécrite sous la forme

$$\dot{x}_{bi} = \dot{x} + \omega_3 V_i - \omega_2 W_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (18)$$

$$\dot{y}_{bi} = \dot{y} - \omega_3 U_i + \omega_1 W_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (19)$$

$$\dot{z}_{bi} = \dot{z} + \omega_2 U_i - \omega_1 V_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (20)$$

où l'on a utilisé la définition suivante

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{Q}\mathbf{b}'_i = \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (21)$$

Par ailleurs, la dérivation de l'équation (12) par rapport au temps produit

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{z}}_s \quad (22)$$

ou, en terme des composantes, c'est à dire en dérivant l'équation (8), on obtient

$$\dot{s}_i = \dot{z}_{bi} + \frac{(x_{bi} - x_{ai})\dot{x}_{bi} + (y_{bi} - y_{ai})\dot{y}_{bi}}{\sqrt{l_i^2 - (x_{bi} - x_{ai})^2 - (y_{bi} - y_{ai})^2}} \quad (23)$$

Donc, en substituant les équations (18–20) dans l'équation (23) et en regroupant les termes, on obtient finalement

$$\dot{s}_i = A_{i1}\dot{x} + A_{i2}\dot{y} + A_{i3}\dot{z} + A_{i4}\omega_1 + A_{i5}\omega_2 + A_{i6}\omega_3, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (24)$$

avec

$$A_{i1} = (x + U_i - x_{ai})/\rho_i \quad (25)$$

$$A_{i2} = (y + V_i - y_{ai})/\rho_i \quad (26)$$

$$A_{i3} = 1 \quad (27)$$

$$A_{i4} = [(y + V_i - y_{ai})W_i - \rho_i V_i]/\rho_i \quad (28)$$

$$A_{i5} = [-(x + U_i - x_{ai})W_i + \rho_i U_i]/\rho_i \quad (29)$$

$$A_{i6} = [(x + U_i - x_{ai})V_i - (y + V_i - y_{ai})U_i]/\rho_i \quad (30)$$

où

$$\rho_i = \sqrt{l_i^2 - (x + U_i - x_{ai})^2 - (y + V_i - y_{ai})^2}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (31)$$

et où l'on a utilisé les relations

$$x_{bi} = x + U_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (32)$$

$$y_{bi} = y + V_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (33)$$

Les  $A_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, 6$  sont donc les éléments de la  $i$ ème ligne de la matrice Jacobienne inverse du manipulateur,  $\mathbf{J}^{-1}$ , que l'on définit par la relation

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{v} \quad (34)$$

où  $\mathbf{v}$  est le vecteur vitesse généralisée du plateau, qui est donné par

$$\mathbf{v} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \omega_1, \omega_2, \omega_3]^T \quad (35)$$

La matrice Jacobienne inverse peut être écrite sous une forme plus compacte, similaire à celle donnée en [?] pour un autre manipulateur parallèle à 6 degrés de liberté, si l'on utilise la définition

$$\mathbf{r}_i = [(x + U_i - x_{ai}), (y + V_i - y_{ai}), \rho_i]^T, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (36)$$

où  $\mathbf{r}_i$  est le vecteur reliant le point  $S_i$  au point  $B_i$ . On peut alors écrire la  $i$ ème ligne de la matrice Jacobienne inverse, notée  $\mathbf{j}_i^T$ , comme

$$\mathbf{j}_i = \frac{1}{\rho_i} [\mathbf{r}_i^T, (\mathbf{G}_i \mathbf{r}_i)^T]^T \quad (37)$$

où

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{1} \times \mathbf{g}_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (38)$$

le vecteur  $\mathbf{g}_i$  étant défini par l'équation (??) et  $\mathbf{1}$  représentant la matrice identité. Il est intéressant de constater que les éléments de la troisième colonne de la matrice Jacobienne—voir equation (??)—seront toujours tous égaux à l'unité. En effet, les vérins étant tous verticaux (axe des  $z$ ), une vitesse du plateau suivant cet axe est obtenue en imprimant une vitesse identique à tous les actionneurs. Le corollaire de cette constatation est que la somme des forces verticales appliquées sur le plateau sera toujours égale à la somme des efforts dans les vérins dans des conditions statiques.

## 5 Configurations singulières

Ce type de manipulateur présente une configuration singulière si le système constitué par les 6 équations non-linéaires (??) permettant de trouver la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$  et le triplet  $(x, y, z)$  à partir de la donnée des  $z_{si}$  n'admet pas localement une solution unique. Le théorème du rang permet d'affirmer que ceci sera le cas si la matrice Jacobienne de ce système est de rang inférieur à six. Un calcul simple montre alors que cette matrice est simplement la matrice Jacobienne inverse calculée précédemment. La solution théorique au problème de la détermination des configurations singulière est donc de calculer le déterminant de cette matrice et d'en trouver les racines en terme du triplet  $(x, y, z)$  et de la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$ . Mais ce calcul est délicat puisque ce déterminant est une équation non-linéaire complexe. Remarquons que les lignes de la matrice sont en fait les vecteur de Plücker des droites associées aux segments et donc que l'annulation du déterminant revient à exprimer la dépendance linéaire entre ces vecteurs. On peut alors utiliser la géométrie de Grassmann qui fournit des conditions géométriques sur  $n$  droites pour que leurs vecteurs de Plücker soient linéairement dépendants [?]. Cette méthode permet de ramener le problème à un ensemble de sous problèmes géométriques où les lignes associées aux segments s'intersectent ou doivent intersecter d'autres droites. On présente ici différentes conditions géométriques qui conduisent à des configurations singulières.

- 4 lignes intersectent le même point de l'espace. On montre alors que ce point est forcément un des points d'articulations du plateau mobile (où s'intersecte deux segments) et que les deux segments restants doivent alors être coplanaires avec le plateau mobile. La figure ?? présente une telle configuration où le point d'intersection est  $B_1$  et les lignes 3-5 sont coplanaires avec le plateau mobile.

- 4 lignes sont dans un même plan ou intersectent le même point de ce plan. On montre alors que le plan doit être le plan engendré par deux segments ayant un point commun sur le mobile, que le point de ce plan commun aux deux autres segments est un point d'articulation  $B_i$  du plateau mobile et que le dernier segment doit alors être coplanaire avec le plateau mobile et passer par  $B_i$ . La figure ?? présente une telle configuration. Le plan est constitué par les segments 1-2, le point  $B_3$  appartient à ce plan et le segment 5 est coplanaire au plateau mobile et passe par  $B_3$
- 5 lignes intersectent toutes deux lignes gauches (c'est-à-dire non parallèles et qui ne s'intersectent pas)
- les 6 lignes intersectent toutes une ligne de l'espace. On peut montrer alors qu'une solution possible est que la ligne passe par une arête du plateau mobile (qui est intersectée dans tous les cas par 4 des lignes) et que les 2 lignes restantes sont coplanaires avec le plateau mobile (figure ??).

## 6 Equation d'accélération

Les équations reliant les accélérations des actionneurs aux accélérations Cartésiennes du plateau mobile sont obtenues en dérivant l'équation (??) par rapport au temps. Ainsi, on obtient

$$\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{J}}^{-1}\mathbf{v} \quad (39)$$

où  $\ddot{\mathbf{s}} = [\ddot{s}_1, \dots, \ddot{s}_6]^T$  et  $\dot{\mathbf{v}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3]^T$  sont les vecteurs d'accélérations articulaires et Cartésiennes respectivement. Afin d'appliquer cette relation, on doit obtenir une expression pour la dérivée de la matrice Jacobienne inverse  $\dot{\mathbf{J}}^{-1}$ . La dérivation de l'équation (??) conduit à une expression de la  $i$ ème ligne de cette matrice, notée  $\mathbf{k}_i^T$ , c'est à dire

$$\mathbf{k}_i = \frac{1}{\rho_i^2} \left[ (\rho_i \dot{\mathbf{r}}_i^T - \mathbf{r}_i^T \dot{\rho}_i), \rho_i (\dot{\mathbf{G}}_i \mathbf{r}_i + \mathbf{G}_i \dot{\mathbf{r}}_i)^T - \dot{\rho}_i (\mathbf{G}_i \mathbf{r}_i)^T \right]^T, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (40)$$

où

$$\dot{\mathbf{r}}_i = [(\dot{x} + \dot{U}_i), (\dot{y} + \dot{V}_i), \dot{\rho}_i]^T, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (41)$$

et

$$\dot{\mathbf{g}}_i = \mathbf{\Omega} \mathbf{Q} \mathbf{b}'_i = \begin{bmatrix} \dot{U}_i \\ \dot{V}_i \\ \dot{W}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_3 V_i - \omega_2 W_i \\ -\omega_3 U_i + \omega_1 W_i \\ \omega_2 U_i - \omega_1 V_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (42)$$

avec

$$\dot{\mathbf{G}}_i = \mathbf{1} \times \dot{\mathbf{g}}_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (43)$$

et

$$\dot{\rho}_i = \frac{-1}{\rho_i} \left[ (x + U_i - x_{ai})(\dot{x} + \dot{U}_i) - (y + V_i - y_{ai})(\dot{y} + \dot{V}_i) \right], \quad i = 1, \dots, 6 \quad (44)$$

ce qui complète l'équation d'accélération.

## 7 Espace atteignable

Puisque l'espace Cartésien dans lequel évolue le manipulateur est un espace à 6 dimensions (position et orientation), il n'est pas possible de le représenter graphiquement. On utilise donc des coupes de cet espace. En fixant l'orientation du plateau, par exemple, on obtient un espace atteignable qui correspond à un volume dans un espace tridimensionnel représentant les positions que peut atteindre le point  $O'$  du plateau tout en maintenant celui-ci dans l'orientation choisie. Ensuite, on effectue encore des coupes sur ce volume afin d'obtenir des zones bidimensionnelles, facilement visualisables et correspondant à différentes altitudes—coordonnée  $z$ —du plateau.

Le problème est donc réduit à déterminer la région, dans un plan parallèle au plan  $xy$  (base du manipulateur), qui peut être atteinte par le point  $O'$  avec une orientation donnée du plateau. Cette région est formée par l'intersection de 6 couronnes annulaires, c'est à dire de 6 régions définies par la 'différence' entre 2 cercles concentriques. Puisqu'il faut tenir compte des dimensions du plateau [?], les coordonnées des points d'intérêt pour la définition des cercles concentriques,  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , sont définies par

$$x_{ci} = x_{ai} - q_{11}x'_{bi} - q_{12}y'_{bi} - q_{13}z'_{bi}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (45)$$

$$y_{ci} = y_{ai} - q_{21}x'_{bi} - q_{22}y'_{bi} - q_{23}z'_{bi}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (46)$$

$$z_{ci} = z_{ai} - q_{31}x'_{bi} - q_{32}y'_{bi} - q_{33}z'_{bi}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (47)$$

Ainsi, il est possible de déterminer, pour chacun des segments de longueur  $l_i$ , la région du plan défini par  $z = z_w$  qui serait balayée par le point  $B_i$  si le vérin était libre de se déplacer vers le haut sur toute sa course à partir du

point  $C_i$ . Cette région est identique à celle balayée par le point  $O'$  lorsque le vérin peut se déplacer sur toute sa course, vers le haut à partir du point  $A_i$  et que l'orientation du plateau est maintenue [?]. Cette région est limitée par deux cercles concentriques. Les coordonnées du centre du cercle sont données par le couple  $(x_{ci}, y_{ci})$  et les rayons des cercles, pour une altitude  $z = z_w$ , sont calculés de la façon suivante: d'abord, si la condition suivante est vérifiée, c'est à dire

$$|z_w - z_{ci}| \geq l_i + d_i \quad (48)$$

alors la région recherchée est nulle puisque le point  $O'$  ne peut arriver jusqu'au plan  $z = z_w$ , même lorsque le vérin est en pleine extension avec le segment  $l_i$  en position verticale. Par ailleurs, si l'on a

$$|z_w - z_{ci}| > l_i \quad (49)$$

alors, si la région n'est pas nulle—voir condition précédente—elle n'est bordée que par un seul cercle, c'est à dire que la région annulaire est en fait un cercle plein. Ceci est dû au fait que si l'inégalité ?? est vérifiée alors le  $i$ ème segment peut être amené en position verticale lorsque  $z = z_w$ .

Après avoir complété ces vérifications, les rayons des cercles intérieurs, notés  $f_i$ , et extérieurs, notés  $F_i$ , sont déterminés, s'il y a lieu, par les équations suivantes:

$$f_i = \sqrt{l_i^2 - (z_w - z_{ci})^2}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (50)$$

$$F_i = \sqrt{l_i^2 - (|z_w - z_{ci}| - d_i)^2}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (51)$$

La première équation correspond à la position la plus basse du vérin alors que la seconde correspond à la position la plus haute tel que montré à la figure ??.

Lorsque les 6 paires de cercles concentriques ont été déterminées, leur intersection est calculée suivant la méthode présentée en [?]. On obtient alors une coupe de l'espace atteignable dans le plan défini par  $z = z_w$  pour une certaine orientation du plateau. Quelques exemples de telles coupes sont montrés à la figure ?. Les coupes de l'espace atteignable présentées dans cette figure ont été obtenues pour une orientation de référence du plateau, c'est-à-dire, lorsque  $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$ , où  $\mathbf{1}$  désigne la matrice identité. De plus, une représentation tridimensionnelle de l'espace atteignable, pour cette même orientation du plateau, est montrée à la figure ?. On peut remarquer que, à cause de l'arrangement vertical des vérins, l'espace atteignable a

une forme moins aplatie que celle de l'espace atteignable d'un manipulateur parallèle avec segments à longueur variable. C'est un résultat auquel on pouvait s'attendre puisque le mouvement uniforme des vérins se traduit par un mouvement vertical du plateau.

## 8 Cartographie de la raideur

La raideur du manipulateur est une propriété très importante, particulièrement pour les manipulateurs parallèles. En effet, l'existence de cas de singularités particuliers à ce type d'architecture, tels que ceux étudiés à la section ?? peut grandement gêner l'opération du manipulateur si celles-ci se trouvent à l'intérieur de l'espace atteignable. Il est donc primordial d'étudier le comportement de la raideur du manipulateur à l'intérieur de son volume de travail. Un outil informatique a été développé à cette fin en [?]. Il est applicable à tout manipulateur pour lequel on possède une description de l'espace atteignable et une expression pour la matrice de raideur. La description de l'espace atteignable du prototype de manipulateur parallèle présenté ici a été donnée à la section précédente. Par ailleurs, la matrice de raideur peut facilement être calculée à partir de l'expression de la matrice Jacobienne donnée plus haut en utilisant la définition donnée en [?], c'est-à-dire,

$$\mathbf{K} = k\mathbf{J}^{-T}\mathbf{J}^{-1} \quad (52)$$

où le facteur multiplicatif,  $k$ , qui représente la raideur des actionneurs, peut être ignoré dans une première analyse. La relation de raideur s'exprime alors par:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{y} \quad (53)$$

où  $\mathbf{F}$  est le vecteur regroupant les 3 forces et 3 moments appliqués sur le manipulateur en  $O'$  dans l'espace Cartésien et où  $\Delta\mathbf{y}$  représente les 6 petits déplacements correspondants, c'est-à-dire, 3 translations et 3 rotations.

On peut alors obtenir des 'cartes de raideur' pour n'importe laquelle coupe de l'espace atteignable et sur lesquelles on peut tracer le terme de raideur—3 en traction-compression et 3 en torsion—désiré. Des exemples de cartes de raideur pour le prototype étudié ici sont donnés en figures ??, ?. Puisque la troisième colonne de la matrice Jacobienne,  $\mathbf{J}$ , est constante, alors la raideur en  $z$  sera aussi constante et elle n'est donc pas cartographiée ici. Tous les autres termes de raideur sont représentés pour une coupe de l'espace atteignable correspondant au plan  $z = 190$ . mm et une carte de raideur en  $y$  est donnée pour une coupe suivant le plan  $z = 185$ . mm. Si l'on

se réfère à la figure ??(a) la raideur en x augmente lors que l'on s'éloigne en x de la position nominale : les segments sont alors inclinés et une partie de la force articulaire est annulée par la force de réaction du guide du vérin (il en est de même pour les mouvements en y et la raideur  $k_y$ ). Pour les raideurs  $k_{\theta_x}, k_{\theta_y}$  (figures ??(c), ??(d)) une rotation autour de l'axe x (y) revient approximativement à faire sortir ou rentrer ensemble les segments situés respectivement à gauche et à droite de l'axe x (y) du mobile ceci indépendamment de la position sur l'axe x (y) du plateau. Plus la position du plateau augmente sur l'axe y (x) plus les segments sont inclinés et donc une plus grande partie de la force articulaire est annulée par la force de réaction du guide du vérin. On pouvait donc s'attendre à obtenir des lignes d'iso-rigidité parallèles à l'axe x (y) ce qui est approximativement le cas. La carte de rigidité de  $k_{\theta_z}$  est plus difficile à interpréter.

## 9 Conclusion

Cet article a permis de présenter une nouvelle architecture pour un manipulateur parallèle à 6 degrés de liberté. Les caractéristiques géométriques du manipulateur ont d'abord été décrites, puis, le problème cinématique inverse a été résolu. Ensuite, les expressions de la matrice Jacobienne inverse ainsi que de sa dérivée par rapport au temps ont été obtenues. On a alors mis en évidence quelques cas de configurations singulières. Avec la nouvelle architecture, le mouvement du plateau est obtenu non plus en variant la longueur des segments reliant le plateau à la base mais plutôt en variant la position des points d'articulation sur celle-ci. Cela permet d'abord de fixer les vérins sur la base et donc de ramener le centre de gravité du manipulateur plus près de celle-ci. De plus, l'encombrement des segments est réduit puisque ceux-ci ne consistent maintenant qu'en des tiges rigides. La nouvelle architecture est donc très appropriée pour une utilisation sous le mode *poignet actif*. Des raisonnements géométriques simples ont permis d'obtenir une description précise de l'espace atteignable du manipulateur et des exemples de coupes ont été montrés. A cause de l'arrangement vertical des vérins, on note que l'espace atteignable a une forme moins aplatie que dans le cas d'un manipulateur parallèle avec segments à longueur variable. Finalement, la matrice de raideur du manipulateur a été définie et les cartes décrivant le comportement de la raideur à l'intérieur de l'espace atteignable peuvent donc être tracées. Quelques exemples de ces cartes ont été présentés.

## References

- [1] D. Stewart, ‘A platform with six degrees of freedom’, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. **180**, No. 5, pp. 371–378 (1965).
- [2] H. MacCallion and D.T. Pham, ‘The analysis of a six-degree-of-freedom work station for mechanised assembly’, *Proceedings of the 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, Montréal (1979).
- [3] C.F. Earl and J. Rooney, ‘Some kinematic structures for robot manipulator designs’, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. **105**, No.1, pp. 15–22 (1983).
- [4] K.H. Hunt, ‘Structural kinematics of in-parallel-actuated robot arms’, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. **105**, No. 4, pp. 705–712, (1983).
- [5] V.B. Zamanov and Z.M. Sotirov, ‘Structures and kinematics of parallel topology manipulating systems’, *Proceedings of the International Symposium on Design and Synthesis*, pp. 453–458, July 11–13, Tokyo (1984).
- [6] M.G. Mohamed and J. Duffy, ‘A direct determination of the instantaneous kinematics of fully parallel robot manipulators’, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. **107**, No. 2, pp. 226–229, (1985).
- [7] E.F. Fichter, ‘A Stewart platform-based manipulator: general theory and practical construction’, *The International Journal of Robotics Research*, Vol. **5**, No. 2, pp. 157–182, (1986).
- [8] C. Reboulet, ‘Modélisation des robots parallèles’, Chapitre 8 du livre ‘Techniques de la robotique’, Hermès, Paris (1988).
- [9] C. Reboulet et A. Robert, ‘Hybrid control of a manipulator with an active compliant wrist’, *Proceedings of the 3rd ISRR*, pp. 76–80, Gouvieux, France, (1985).
- [10] J.-P. Merlet, ‘Force feedback control of parallel manipulators’, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation Conference*, pp. 1484–1489, Philadelphia, (1988).

- [11] J.-P. Merlet, ‘Parallel manipulators Part I: Theory, design, kinematics, dynamics and control’, Rapport de Recherche INRIA n° 646, France (1987).
- [12] Y. Seguchi, M. Takana and T. Yamaguchi, ‘Motion and dynamics of flexible arm of a mast-type statically determinate truss’, Proceedings of the *International Conference on Computational Engineering Science*, pp. 42.iii.1–42.iii.4, Atlanta, (1988).
- [13] H. Inoue, Y. Tsusaka, and T. Fukuizumi, ‘Parallel manipulator’, Proceedings of the *3rd International Symposium on Robotics Research*, Gouvieux, France, (1985).
- [14] G.S. Thornton, ‘The GEC tetrabot—A new serial-parallel assembly robot’, Proceedings of the *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 437–439, Philadelphia, (1988).
- [15] K.M. Lee and D.K. Shah, ‘Kinematic analysis of a three-degree-of-freedom in-parallel actuated manipulator’, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 4, No. 3, pp. 354–360, (1988).
- [16] K.J. Waldron, M. Raghavan and B. Roth, ‘Kinematics of a hybrid series-parallel manipulation system, part-I: Position kinematics’, A paraître dans *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, (1988).
- [17] D. Kohli, S.-H. Lee, K.-Y. Tsai and G.N. Sandor, ‘Manipulator configurations based on rotary-linear (R-L) actuators and their direct and inverse kinematics’, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 110, No. 4, pp. 397–404, (1988).
- [18] C. Gosselin and J. Angeles, ‘The optimum kinematic design of a planar three-degree-of-freedom parallel manipulator’, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 110, No. 1, pp. 35–41, (1988).
- [19] R. L. Williams II and C. F. Reinholtz, ‘Closed-form workspace determination and optimization for parallel robotic mechanisms’, *Proceedings of the ASME 20th Biennial Mechanism Conference*, Kissimmee, Florida, Sept. 25–28, (1988).

- [20] H. Asada and J.A. Cro Granito, ‘Kinematic and static characterization of wrist joints and their optimal design’, *Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*, pp. 244–250, St-Louis, (1985).
- [21] C. Gosselin and J. Angeles, ‘The optimum kinematic design of a spherical three-degree-of-freedom parallel manipulator’, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. **111**, No. 2, pp.202-207 (1989).
- [22] J-P. Merlet, ‘Manipulateurs parallèles, 3eme partie: Applications’, Rapport de Recherche INRIA , n° 1003, Mars (1989).
- [23] P. Nanua , K.J. Waldron ‘Direct kinematic Solution of a Stewart Platform’, *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Scottsdale, Arizona, May 14-19, pp. 431-437,(1989).
- [24] C. Gosselin, ‘Kinematic analysis, optimization and programming of parallel robotic manipulators’, Ph. D. thesis, McGill University, Montréal, Québec, Canada, (1988).
- [25] J-P. Merlet, ‘Singular configurations and Grassmann geometry’, *The Int. J. of Robotics Research*, Vol. **8**, No. 5, pp.45-56(1989)
- [26] C. Gosselin, ‘Determination of the workspace of 6-dof parallel manipulators’, à paraître dans *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design* (1989).
- [27] C. Gosselin, ‘Stiffness mapping for parallel manipulators’, soumis à *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, (1989).

# A New Architecture for a Six-degree-of-freedom Parallel Manipulator

Jean-Pierre Merlet and Clément Gosselin

## Abstract

In this paper, a new mechanical architecture for a parallel manipulator is proposed. After a brief review of the different existing architectures of parallel manipulators, the geometrical properties of the new system are described. The manipulator differs from other similar six-degree-of-freedom parallel devices mainly by the fact that the motion of the platform is not obtained by varying the length of the legs connecting the platform to the ground but rather by moving the points of attachment of each of the legs to the ground. In other words, the topology of each of the legs, from the base to the platform, is changed from *SPH* to *PSH*, where *P*, *S* and *H* denote prismatic, spherical and universal (two revolute with intersecting axes) joints, respectively. This allows the actuators to be fixed to the base. Moreover, thinner legs having a regular shape can be used which reduces the possibility of mechanical interference between the legs.

The solution of the inverse kinematic problem, which is of major importance in the context of robot control, is given. Expressions for the inverse Jacobian matrix and its time derivative—used to solve the acceleration inversion problem—are then derived. Some singular configurations are described. Furthermore, a description of the workspace is obtained from a geometrical interpretation of the solution of the inverse kinematic problem. Examples of sections of the workspace are included. Finally, the stiffness matrix of the manipulator is defined which allows us to establish stiffness maps over the workspace for any of the stiffness terms. Examples of stiffness maps are included.

Figure 1: Nouvelle architecture proposée pour le manipulateur parallèle à 6 degrés de liberté.

Figure 2: Le prototype

Figure 3: Un des segments du manipulateur avec ses variables dimensionnelles.

Figure 4: Configuration singulière : les lignes 1-2-3-5 intersectent toute le point  $B_1$  (vue perspective et de dessus)

Figure 5: Configuration singulière : les lignes 3-5 coupent le plan contenant les lignes 1-2 au point  $B_3$ . La ligne 5 est coplanaire au plateau mobile (vue perspective et de dessus)

Figure 6: Configuration singulière : les lignes 1-2-3-4-5-6 intersectent toutes l'arête  $B_3B_5$  (vue perspective et de dessus)

Figure 7: Détermination des paires de cercles concentriques dont l'intersection forme une coupe de l'espace atteignable

Figure 8: Exemples de coupes de l'espace atteignable du manipulateur pour une orientation de référence du plateau et dans des plans parallèles au plan  $xy$ . Les aires des coupes sont données en  $\text{mm}^2$

Figure 9: Représentation tridimensionnelle de l'espace atteignable du manipulateur pour une orientation de référence du plateau.

Figure 10: Exemples de cartes de raideur du manipulateur proposé. Différents termes de la matrice de raideur sont représentés pour des coupes de l'espace atteignable dans des plans parallèles au plan  $xy$  pour une orientation de référence du plateau ( $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$ )

Figure 11: Exemples de cartes de raideur du manipulateur proposé. Différents termes de la matrice de raideur sont représentés pour des coupes de l'espace atteignable dans des plans parallèles au plan  $xy$  pour une orientation de référence du plateau ( $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$ )

$i$	$x_{ai}$	$y_{ai}$	$x'_{bi}$	$y'_{bi}$
1	3.38	3.683885	2	0
2	4.88	1.085808	1.732051	-1
3	1.5	-4.769696	1.732051	-1
4	-1.5	-4.769696	-1.732051	-1
5	-4.88	1.085808	-1.732051	-1
6	-3.38	3.683885	2	0

Table 1: Propriétés géométriques du nouveau manipulateur proposé (unité=centimètre).

## List of Figures