

# Contrôle asymptotique non linéaire des fermenteurs anaérobies

Ludovic MAILLERET<sup>1</sup>, Olivier BERNARD<sup>1</sup>, Jean Philippe STEYER<sup>2</sup>

<sup>1</sup>COMORE, INRIA, BP93, 06 902 Sophia-Antipolis cedex, France

<sup>2</sup> LBE, INRA, Avenue des étangs, 11 100 Narbonne, France

ludovic.mailleret@inria.fr, olivier.bernard@inria.fr, steyer@ensam.inra.fr  
http://www-sop.inria.fr/comore/

**Résumé**— Nous proposons ici une loi de commande permettant de contrôler la Demande Chimique en Oxygène (DCO) d'un fermenteur anaérobie. Nous présentons tout d'abord un modèle de ce procédé basé sur deux étapes: l'acidogénèse et la méthanogénèse. Nous développons ensuite une loi de commande globalement asymptotiquement stabilisante, régulant un indicateur biologique de la pollution. Le comportement du système bouclé est illustré sur une simulation et validé expérimentalement sur un procédé pilote.

**Mots-clés**— Bioréacteur continu, contrôle robuste, stabilisation globale, digestion anaérobie, validation expérimentale.

## I. INTRODUCTION

Les modèles de bioréacteurs ne sont que des approximations plus ou moins fidèles de la réalité, rendant le problème de leur contrôle particulièrement ardu. En effet contrairement à la physique classique, régie par des lois bien connues et très fiables, nous ne disposons pas de telles lois pour décrire précisément les systèmes biologiques. Pour pallier cette difficulté, Bastin et Dochain ([1]) ont développé une méthode de modélisation basée sur les bilans de masse. Le principal intérêt de cette approche tient dans la possibilité de construire, sur la base du modèle, des observateurs, indépendamment des cinétiques biologiques internes au procédé.

Les bioréacteurs dédiés au traitement des eaux usées sont des écosystèmes complexes comprenant un grand nombre de populations bactériennes distinctes. De plus, les différents constituants (bactéries ou matière organique) présents au sein du bioréacteur sont mal connus et rarement mesurés.

La régulation de ce type de bioréacteur nécessite donc une description macroscopique fiable des réactions biologiques (bilan de masse), ainsi qu'une loi de commande robuste utilisant des mesures faciles à obtenir en ligne.

Nous allons plus particulièrement nous attacher au problème posé par la fermentation anaérobie, procédé à haut rendement épuratoire mais naturellement instable. La modélisation de ce procédé suppose le regroupement fonctionnel des bactéries en deux populations réalisant deux biodégradations en chaîne. La première population  $X_1$  (bactéries acidogènes) consomme le substrat organique  $S_1$  et produit des Acides Gras Volatils  $S_2$  (AGV). La DCO (Demande Chimique en Oxygène) est représentée par la somme

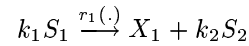
de  $S_1$  et  $S_2$ . La deuxième population  $X_2$  (bactéries méthanogènes) consomme les AGV et produit du méthane ( $CH_4$ ).

Ce document est organisé ainsi: nous présentons tout d'abord un modèle de la fermentation anaérobie. Nous décrivons ensuite une loi de commande et prouvons la stabilité asymptotique globale du système bouclé. Des simulations informatiques et des études expérimentales illustrent finalement la pertinence de notre approche.

## II. BILAN DE MASSE, MODÈLE

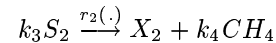
Nous développons un modèle macroscopique de la digestion anaérobie sur la base du schéma réactionnel suivant ([2]):

– Acidogénèse:



La vitesse de réaction est:  $r_1(\cdot) = \mu_1(\cdot)X_1$

– Méthanogénèse:



La vitesse de réaction est:  $r_2(\cdot) = \mu_2(\cdot)X_2$

Le bilan de masse au sein du bioréacteur s'écrit donc:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \mu_1(\cdot)X_1 - \alpha DX_1 \\ \dot{S}_1 = -k_1\mu_1(\cdot)X_1 + D(S_{1in} - S_1) \\ \dot{X}_2 = \mu_2(\cdot)X_2 - \alpha DX_2 \\ \dot{S}_2 = -k_3\mu_2(\cdot)X_2 + k_2\mu_1(\cdot)X_1 + D(S_{2in} - S_2) \end{cases} \quad (1)$$

Où  $D$  est le taux de dilution,  $S_{1in}$  et  $S_{2in}$  les concentrations en substrats organiques  $S_1$  et  $S_2$  dans le flux entrant. Les coefficients  $k_i$  sont les coefficients stœchiométriques associés aux bioréactions,  $\mu_1(\cdot)$  et  $\mu_2(\cdot)$  les taux spécifiques de croissance de  $X_1$  et  $X_2$ . Le paramètre  $\alpha \in ]0, 1[$  modélise le taux de fixation de la biomasse dans le réacteur ( $\alpha = 1$  correspond à un réacteur infiniment mélangé).

$\xi = (X_1, S_1, X_2, S_2)^T$  représente le vecteur état.

La solubilité du méthane étant très faible, nous supposons que le méthane produit est uniquement gazeux et que le flux de méthane sortant est mesuré en ligne:

$$y = \frac{Q_{CH_4}}{k_4} = \mu_2(\cdot)X_2$$

Le principal problème dans la formulation du modèle (1) est de donner des expressions raisonnables aux cinétiques  $\mu_1(\cdot)$  et  $\mu_2(\cdot)$ . Dans la littérature  $\mu_1(\cdot)$  a souvent été modélisé par une loi de Monod,  $\mu_2(\cdot)$  par une loi de Haldane ([2], [3], [4], [5]...).

Nous ne ferons ici aucune hypothèse quant aux expressions analytiques des cinétiques. Nous faisons seulement les hypothèses suivantes, basées sur des constatations biologiques.

*Hypothèse 1 (H1)*

- $\mu_1$  est fonction de  $S_1$ ,  $\mu_1(0) = 0$  et  $\mu_1 > 0$  si  $S_1 > 0$
- $\mu_2$  est fonction de  $S_2$ ,  $\mu_2(0) = 0$  et  $\mu_2 > 0$  si  $S_2 > 0$
- $\mu_1(\cdot)$  et  $\mu_2(\cdot)$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$

Par la suite nous supposons que les conditions initiales sont toutes strictement positives:

$$\forall i \in [1..4], \xi_i(0) > 0 \text{ and } \forall j \in [1..2], S_{j,in} > 0$$

*Propriété 1: Sous l'hypothèse (H1), les trajectoires du modèle (1) restent dans  $\mathbb{R}_+^4$ .*

### III. LOI DE COMMANDE

#### A. Objectifs

Les procédés biologiques de traitement des eaux usées utilisent des microorganismes pour dégrader les composants organiques présents dans des effluents. Le but est de réduire la concentration en polluants en sortie du dispositif et la maintenir en dessous d'une certaine valeur, fixée par des normes environnementales.

On trouve dans la littérature beaucoup d'approches différentes pour le contrôle de fermenteurs anaérobies ([1], [6], [7]...). Ce sont la plupart du temps des contrôleurs de type PID, des retours de sortie linéarisants voire des approches encore plus spécifiques. Cependant la plupart des lois de commande proposées utilisent des capteurs très perfectionnés, la connaissance parfaite des cinétiques, et ne conduisent le plus souvent qu'à des résultats de stabilité locale du système en boucle fermée.

Nous proposons ici une loi de commande permettant la stabilisation globale d'un procédé de digestion anaérobie, indépendamment des cinétiques, et n'utilisant que des mesures technologiquement simples à réaliser.

Cette loi de commande permettra de réguler un équivalent biologique de la DCO, que nous définirons comme la matière organique biodégradable totale, notée  $S_T$  et définie par (cf. Annexe A):

$$S_T = S_1 + \frac{k_1}{k_2} S_2$$

Notons la DCO soluble totale ( $dco_T$ ). Par définition:

$$dco_T = S_1 + k_{dco} S_2$$

D'où:

$$S_T = dco_T + \left(\frac{k_1}{k_2} - k_{dco}\right) S_2$$

*Remarque 1: La connaissance de  $S_T$  implique que  $dco_T$  est dans l'intervalle:  $[\min(1, \frac{k_2 k_{dco}}{k_1}) S_T; \max(1, \frac{k_2 k_{dco}}{k_1}) S_T]$*

Notre objectif est de réguler la variable  $S_T$ , en utilisant la sortie  $y$  et le taux de dilution  $D(\cdot)$  considéré comme une entrée. Réécrivons le système (1) avec ces nouvelles notations:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = (\mu_1(S_1) - \alpha D(\cdot)) X_1 \\ \dot{S}_1 = D(\cdot)(S_{1in} - S_1) - k_1 \mu_1(S_1) X_1 \\ \dot{X}_2 = y - \alpha D(\cdot) X_2 \\ \dot{S}_T = D(\cdot)(S_{Tin} - S_T) - \frac{k_3 k_1}{k_2} y \end{cases} \quad (2)$$

#### B. Loi de Commande

Notre approche se base sur [8]: nous cherchons la loi régissant l'entrée ( $D(\cdot)$ ) pour que  $S_T$  ait la dynamique suivante,  $S_T^* > 0$  étant la consigne:

$$\dot{S}_T = D(\cdot)(S_T^* - S_T) \quad (3)$$

Nous en déduisons:

$$D(\xi) = \frac{k_3 k_1}{k_2 (S_{Tin} - S_T^*)} y \quad (4)$$

Les équations du modèle en boucle fermée deviennent:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \mu_1(\cdot) X_1 - \alpha D(\xi) X_1 \\ \dot{S}_1 = -k_1 \mu_1(\cdot) X_1 + D(\xi)(S_{1in} - S_1) \\ \dot{X}_2 = \alpha D(\xi)(X_2^* - X_2) \\ \dot{S}_T = D(\xi)(S_T^* - S_T) \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{Avec } X_2^* = \frac{k_2 (S_{Tin} - S_T^*)}{\alpha k_3 k_1}$$

Faisons l'hypothèse suivante quant à la consigne et aux cinétiques.

*Hypothèse 2 (H2)*

- $0 < S_T^* < S_{1in}$
- $\mu_1(\cdot)$  fonction strictement croissante sur  $[0, S_T^*]$
- $\mu_2(\cdot)$  fonction strictement croissante sur  $[0, \frac{k_2}{k_1} S_T^*]$

Cette hypothèse reste très raisonnable: en pratique nous choisissons une consigne  $S_T^*$  de faible valeur.

Prouvons maintenant la stabilité asymptotique globale du modèle en boucle fermée.

*Proposition 1: Sous les hypothèses (H1, H2), il existe un unique point d'équilibre  $\xi^*$  dans  $\mathbb{R}_{+*}^4$  pour (5). De plus  $\xi^*$  est globalement asymptotiquement stable sur  $\mathbb{R}_{+*}^4$ .*

Nous prouvons d'abord deux lemmes.

*Lemme 1: Sous l'hypothèse (H1), le système (5) impose la convergence de  $S_T$  vers  $S_T^*$  et de  $X_2$  vers  $X_2^*$ .*

*Preuve du Lemme 1:*

Nous montrons dans l'annexe B que:

$$\int_{t=0}^{+\infty} D(\xi(\tau)) d\tau = +\infty$$

Ce qui prouve, en intégrant  $\dot{S}_T$  et  $\dot{X}_2$  dans (5):

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S_T(t) = S_T^* \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} X_2(t) = X_2^*$$

Soit:  $\Omega = \{\xi \in \mathbb{R}_{+*}^4, \mathbf{S}_T = \mathbf{S}_T^*, \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2^*\}$ . Notons que le lemme 1 impose la convergence de toutes les orbites vers  $\Omega$ .

D'autre part, sur  $\Omega$ ,  $D(\xi)$  s'exprime:

$$D(\xi) = \frac{\mu_2(S_2)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \mu_2\left(\frac{k_2}{k_1}(S_T^* - S_1)\right) \quad (6)$$

*Lemme 2: Sous les hypothèses (H1, H2) le système bouclé (5) sur  $\Omega$  est tel que la variable  $S_2$  ne peut pas s'annuler.*

*Preuve du Lemme 2:*

Considérons  $Z_1 = S_1 + k_1 X_1$ , on a d'après (5):

$$\dot{Z}_1 \geq D(\xi)(S_{1in} - Z_1)$$

D'où:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Z_1(t) \geq S_{1in}$$

Donc, sur l'ensemble  $\Omega$ , on a:

$$S_1 + \frac{k_1}{k_2} S_2 = S_T^* \text{ et } S_1 + k_1 X_1 \geq S_{1in}$$

D'où:

$$X_1 \geq \frac{1}{k_1}(S_{1in} - S_T^*) > 0 \quad (7)$$

Soit  $\epsilon > 0$  suffisamment petit, en utilisant (6) et (1), on a pour le système bouclé:

$$S_2 = \epsilon \Rightarrow \dot{S}_2 = \mu_2(\epsilon)\left(\frac{1}{\alpha}(S_{2in} - \epsilon) - k_3 X_2^*\right) + k_2 \mu_1(S_1) X_1$$

Comme  $S_1 = S_T^* - \frac{k_1}{k_2} \epsilon > 0$ , en utilisant (7), il existe  $A_\epsilon > 0$  ( $A_\epsilon$  fonction décroissante de  $\epsilon$ ) tel que:

$$S_2 = \epsilon \Rightarrow \dot{S}_2 = \mu_2(\epsilon)\left(\frac{1}{\alpha}(S_{2in} - \epsilon) - k_3 X_2^*\right) + A_\epsilon$$

Or  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \mu_2(\epsilon) = 0$  Donc pour un  $\epsilon$  suffisamment petit on a:

$$S_2 = \epsilon \Rightarrow \dot{S}_2 > 0$$

Et  $S_2$  ne s'annule donc pas sur  $\Omega$ . ■

*Preuve de la Proposition 1:*

Réécrivons sur  $\Omega$  le système réduit en  $X_1$  et  $S_1$ , avec le changement de temps  $t' = \int_0^t D(\tau) d\tau$  ([9]):

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt'} = (\phi(S_1) - \alpha) X_1 \\ \frac{dS_1}{dt'} = (S_{1in} - S_1) - k_1 \phi(S_1) X_1 \end{cases} \quad (8)$$

Avec:  $\phi(S_1) = \frac{\alpha \mu_1(S_1)}{\mu_2(\frac{k_2}{k_1}(S_T^* - S_1))}$

L'hypothèse (H2) étant vérifiée, on montre que  $\phi(S_1)$  est une fonction strictement croissante sur  $[0, S_T^*]$ . Le système (8) est considéré sur  $\Omega$  donc:  $S_1 \in [0, S_T^*]$ .

Le système (8) correspond à un chemostat classique qui a un unique équilibre strictement positif et globalement asymptotiquement stable (GAS) ([10]). Nous concluons

donc qu'il existe dans  $\mathbb{R}_{+*}^4$  un unique équilibre  $\xi^*$  pour le système bouclé. Et  $\xi^* = (X_1^*, S_1^*, X_2^*, S_2^*)^T$  s'exprime:

$$\xi^* = \left( \frac{S_{1in} - \phi^{-1}(\alpha)}{k_1 \alpha}, \phi^{-1}(\alpha), X_2^*, \frac{k_2}{k_1}(S_T^* - \phi^{-1}(\alpha)) \right)^T$$

En appliquant le corollaire 4.3 de [11], on montre que  $\xi^*$  est globalement attractif sur  $\mathbb{R}_{+*}^4$ :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi(t) = \xi^*$$

Calculons la matrice jacobienne du système bouclé (5) (avec le changement de temps  $t' = \int_0^t D(\tau) d\tau$ ) localement autour de  $\xi^*$  (dans les coordonnées  $X_1, S_1, X_2, S_T$ ). Remarquons que la matrice jacobienne est triangulaire supérieure par blocs:

$$\mathcal{J}^* = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

On cherche les valeurs propres de  $\mathcal{J}^*$ , racines du polynôme caractéristique:

$$P_{\mathcal{J}^*}(\lambda) = \det(A - \lambda Id) \det(C - \lambda Id)$$

Avec:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & X_1^* \frac{\partial \Psi}{\partial S_1}(S_1^*, S_T^*) \\ -k_1 \alpha & -1 - k_1 X_1^* \frac{\partial \Psi}{\partial S_1}(S_1^*, S_T^*) \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec:  $\Psi(S_1, S_T) = \frac{\alpha \mu_1(S_1)}{\mu_2(\frac{k_2}{k_1}(S_T - S_1))}$

Il faut remarquer que:  $\frac{\partial \Psi}{\partial S_1}(S_1^*, S_T^*) = \frac{\partial \Phi}{\partial S_1}(S_1^*) > 0$  par définition de la fonction  $\Phi(S_1)$  qui est croissante, notamment autour de  $S_1^*$ .

On a donc:  $\text{trace}(A) < 0$  et  $\det(A) > 0$ , ce qui, étant donné l'expression de  $C$ , assure la stabilité locale du point d'équilibre  $\xi^*$  pour le système (5).

On a montré que  $\xi^*$  est globalement attractif sur  $\mathbb{R}_{+*}^4$  et localement stable.

On conclut donc que  $\xi^*$  est GAS sur  $\mathbb{R}_{+*}^4$ . ■

*Remarque 2: La démonstration n'est basée sur aucune formulation analytique des taux de croissance  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , ce qui est particulièrement important pour la robustesse du contrôleur.*

*Remarque 3: La DCO soluble totale atteint, à l'équilibre, la valeur  $dco_T^*$ , telle que:*

$$dco_T^* = \phi^{-1}(\alpha) + \frac{k_{dco} k_2}{k_1} (S_T^* - \phi^{-1}(\alpha))$$

C. Effet d'un feedback  $D = \gamma Q_{CH_A}$

Par la suite nous utiliserons la notation:

$$\bar{S}_2 = \text{argmax}_{S_2}(\mu_2(S_2))$$

*Hypothèse 3 (H3)*

- $\mu_1(\cdot)$  strictement croissante sur  $[0, \min(S_{1in}, \frac{k_1}{k_2} \bar{S}_2)]$
- $\mu_2(\cdot)$  strictement croissante sur  $[0, \min(\frac{k_2}{k_1} S_{1in}, \bar{S}_2)]$

Remarquons que cette hypothèse tiendra, dans la Proposition 2, le même rôle que l'hypothèse (H2) dans la Proposition 1.

*Proposition 2: Considérons le système (1) et supposons que (H1, H3) sont vérifiées. Considérons le retour de sortie défini par:*

$$D(\xi) = \gamma Q_{CH_4} = \gamma k_4 y \quad (9)$$

Avec  $\gamma$ , tel que:

$$\gamma \in \left] \frac{k_1 k_3}{k_2 k_4 S_{Tin}}, \frac{k_1 k_3}{k_2 k_4 (S_{Tin} - \min(S_{1in}, \frac{k_1}{k_2} \bar{S}_2))} \right[ \quad (10)$$

Alors, il existe un unique point d'équilibre  $\xi^i$  dans  $\mathbb{R}_{+*}^4$ , et  $\xi^i$  est globalement asymptotiquement stable.

*Preuve de la Proposition 2:*

La preuve se déduit de la Proposition 1.

*Remarque 4: Avec la loi de commande (9), il suffit de diminuer (resp. augmenter) le gain  $\gamma$  pour diminuer (resp. augmenter) la matière organique biodégradable en sortie. Ce réglage peut s'effectuer en ligne sans affecter le comportement du système bouclé.*

#### IV. SIMULATIONS

Dans cette section nous avons choisi les valeurs des paramètres donnés par [2] pour simuler le modèle bouclé. Pour illustrer la robustesse du feedback, un bruit blanc multiplicatif ( $\eta$ ) d'écart type 0.4 a été ajouté à la mesure du débit de méthane:

$$y = \frac{q_{CH_4}}{k_4} (1 + \eta)$$

Nous choisissons la consigne  $S_T^* = 2 \text{ g DCO/l}$ . Avec les cinétiques données par [2], les hypothèses (H1, H2) de la Proposition 1 sont vérifiées.  $\mu_1(S_1)$  et  $\mu_2(S_2)$  sont définies par:

$$\mu_1(S_1) = \frac{\mu_{1m} S_1}{K_M + S_1} \text{ et } \mu_2(S_2) = \frac{\mu_{2m} S_2}{K_M + S_2 + (S_2/K_I)^2}$$

Les résultats sont présentés Figure 1. Nous avons ajouté un filtre linéaire passe-bas dans la boucle de feedback, afin de filtrer les hautes fréquences. Malgré le bruit, le contrôleur est efficace et la DCO soluble totale reste dans un intervalle raisonnable. La vitesse de convergence (non réglable) semble suffisante et le contrôleur est robuste aux variations de la matière organique biodégradable totale en entrée ( $S_{Tin}$ ).

#### V. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

##### A. Le procédé

La validation expérimentale de la loi de commande a été effectuée sur un fermenteur anaérobie à lit fixe ([12]), situé à Narbonne, au Laboratoire de Biotechnologie de l'Environnement (LBE) de l'INRA. Le réacteur, de volume  $V = 0.982 \text{ m}^3$ , est nourri avec des vinasses issues des industries viticoles locales. Le réacteur est muni d'un grand nombre de capteurs et actionneurs reliés à un système informatique permettant l'acquisition, le traitement et le stockage des données relatives au procédé. Le système est pourvu d'une interface logicielle permettant le calcul et l'application de lois de commande complexes.

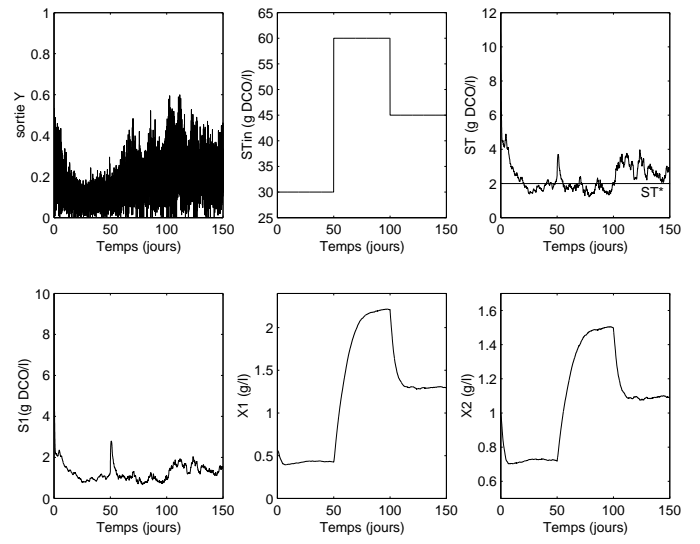


FIG. 1 – Simulations du système bouclé, bruit de 40 % sur la sortie

##### B. Validation expérimentale, Discussion

Nous exposons ici l'implémentation du feedback (9) sur le procédé. Deux transitoires pour l'entrée  $D$  et la variable contrôlée  $S_T$  sont présentés figure 2. Le comportement de  $S_T$  (premier ordre à gain variable) est compatible avec le comportement attendu, et valide donc notre approche théorique.

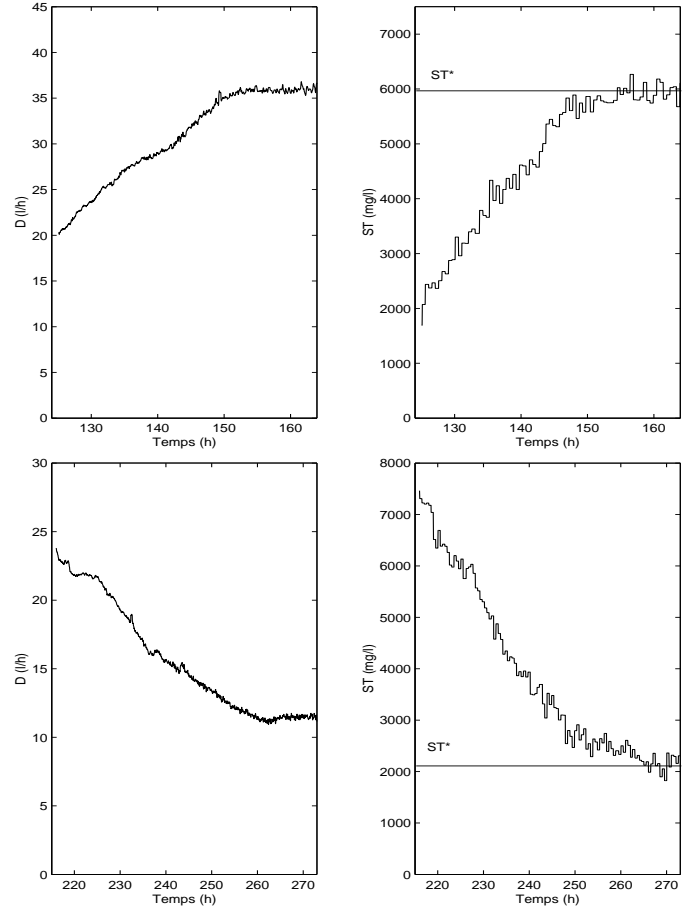


FIG. 2 – Comportement de  $D$  et  $S_T$  durant deux transitoires

De plus, pendant les expériences, quelques pannes se sont

produites. Le comportement du procédé en boucle fermée face à ces pannes a été particulièrement sain. En effet, la plupart des pannes se sont accompagnées en sortie d'une baisse du flux de méthane. La loi de commande diminue alors la dilution, ce qui diminue à nouveau le flux sortant de méthane.

Ainsi, si une panne diminuant  $Q_{CH_4}$  se produit, le feedback tend à ramener la dilution à zéro, ce qui est la situation la plus sûre pour les fermenteurs anaérobie (lessivage des biomasses impossible).

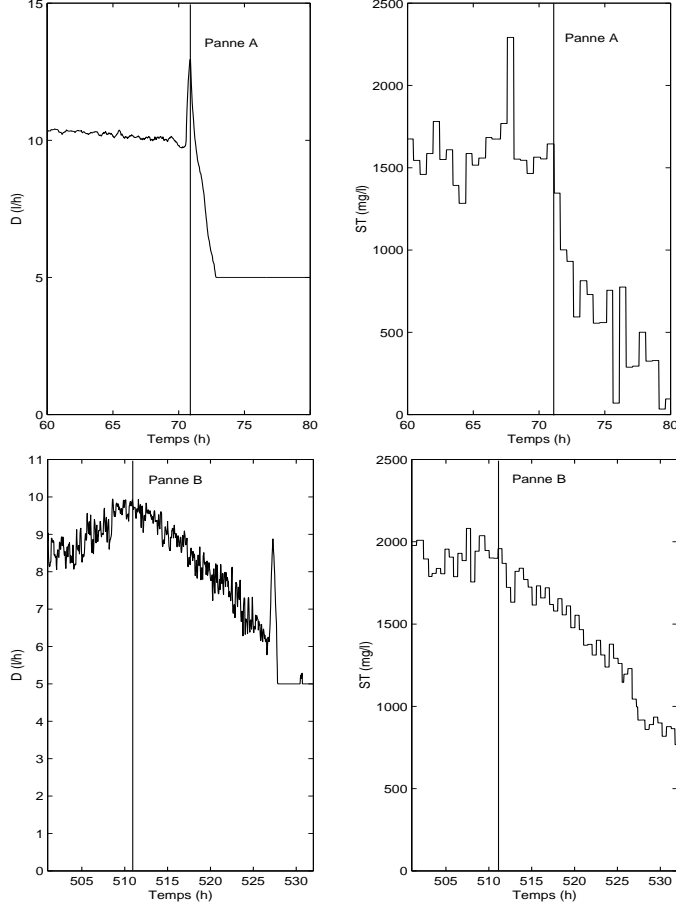


FIG. 3 – Comportement de  $D$  et  $ST$  face aux pannes.

Nous montrons ce phénomène sur deux types de pannes sur la figure 3. La première (panne A) est un dysfonctionnement dans l'analyse du gaz en sortie. La seconde (panne B) est le remplissage du réacteur avec de l'eau. Remarquons que dans les deux cas la loi de commande calculée diminue la dilution jusqu'à sa valeur minimale (limitation technologique à 5 l/h). Le technicien dispose alors du temps nécessaire pour effectuer les réparations sur le procédé.

Notons que des contrôleurs de type PI ou PID (en supposant qu'une mesure de la DCO soit disponible) appliqués à  $ST$  auraient eu l'action contraire: augmenter la dilution afin d'augmenter  $ST$ , au risque de lessiver le fermenteur.

## VI. CONCLUSION

Nous avons proposé ici un contrôleur non-linéaire permettant la régulation asymptotique de la matière organique biodégradable en sortie d'un fermenteur anaérobie à lit fixe.

La loi de commande est simple et fiable: il s'agit d'un retour de sortie statique, basé sur une mesure technologiquement simple. Le système bouclé admet un unique équilibre, globalement asymptotiquement stable, et ne requiert pas une identification précise du procédé (notamment des cinétiques, point crucial en biotechnologies). Il est en effet possible de modifier en ligne la consigne pour atteindre la valeur désirée de la matière organique biodégradable à l'équilibre (cf. remarque 4).

De plus, cette loi de commande est très robuste au bruit et supporte bien les variations de matière organique biodégradable en entrée. Des tests expérimentaux nous ont permis de valider le comportement du système bouclé et d'exhiber ses réactions particulièrement saines face aux pannes. Enfin, si cette loi de commande reste pour l'instant une commande à action uniquement proportionnelle, une version adaptative (action proportionnelle et intégrale) est actuellement en développement.

**Remerciements:** Ce travail a été réalisé avec le soutien du projet européen IST-2000-28156 TELEMAT (Telemonitoring and Advanced Telecontrol of High Yield Wastewater Treatment Plants).

## ANNEXES

### A. MATIÈRE ORGANIQUE BIODÉGRADABLE

Notons  $\tilde{S}_1 = \frac{k_1}{k_2} S_2^\circ$  et expliquons le sens biologique de cette quantité. Nous voulons montrer que celle-ci est la quantité de DCO ( $S_1$ ) nécessaire pour obtenir, après acidogénèse totale, la quantité d'AGV  $S_2^\circ$ . Nous allons donc considérer un procédé d'acidogénèse en batch ( $D = 0$ ). La bioréaction ne sera ainsi pas affectée par les effets de la dilution.

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \mu_1(S_1)X_1 \\ \dot{S}_1 = -k_1\mu_1(S_1)X_1 \\ \dot{S}_2 = k_2\mu_1(S_1)X_1 \end{cases} \quad (11)$$

Nous prenons donc les conditions initiales:

$$X_1(0) > 0, S_1(0) = \tilde{S}_1, S_2(0) = 0$$

Remarquons les intégrales premières du système:

$$\frac{d}{dt}(S_1 + \frac{k_1}{k_2}S_2) = 0 \text{ et } \frac{d}{dt}(k_1X_1 + S_1) = 0$$

On a donc:

$$\forall t > 0, S_1(t) + \frac{k_1}{k_2}S_2(t) = \tilde{S}_1 \text{ et } k_1X_1(t) + S_1(t) = k_1X_1(0) + \tilde{S}_1$$

Supposons que l'hypothèse (H1) soit vérifiée, l'équilibre du système est défini par:

$$S_1^* = 0, S_2^* = \frac{k_2}{k_1}\tilde{S}_1, X_1^* = X_1(0) + \frac{\tilde{S}_1}{k_1}$$

Une étude géométrique simple assure que cet équilibre est GAS, d'où:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S_2(t) = \frac{k_2}{k_1}\tilde{S}_1 = S_2^\circ$$

Ce qui montre donc que la dégradation totale par acidogénèse de  $\tilde{S}_1$  produit la quantité d'AGV  $S_2^\circ$ . ■

Nous introduisons donc la Matière Organique Biodégradable totale, notée  $S_T$ :

$$S_T = S_1 + \frac{k_1}{k_2} S_2$$

$$\text{B. PREUVE DE: } \int_{t=0}^{+\infty} D(\xi(\tau)) d\tau = +\infty$$

En considérant les changements de variables  $Z_1$  et  $Z_2$ , nous montrons tout d'abord que l'état du système est borné.

$$Z_1 = S_1 + k_1 X_1 \text{ et } Z_2 = S_2 + k_3 X_2 - k_2 X_1$$

Nous montrons, sous (H1) que les dérivées de l'état (par rapport au temps) sont des fonctions lipschitziennes du temps: il faut considérer les dérivées secondes de l'état (par rapport au temps), fonctions  $C^0$  de l'état borné, donc bornées, leurs primitives étant donc lipschitziennes en temps.

$$\text{Nous prouvons finalement que: } \int_0^{+\infty} D(\xi(\tau)) d\tau = +\infty$$

Nous allons démontrer ce résultat par l'absurde: supposons que  $\int_0^{+\infty} D(\xi(\tau)) d\tau$  est borné.

On sait que:  $\exists a > 0, X_2 \geq a$ . Une condition nécessaire pour que  $\int_0^{+\infty} D(\xi(\tau)) d\tau$  soit borné est donc:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S_2(t) = 0 \quad (12)$$

Utilisons le lemme de Barbalat ([13]).

Supposons que l'équation (12) est vraie. Comme  $\dot{S}_2$  est une fonction lipschitzienne du temps, en appliquant le lemme on a:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{S}_2(t) = 0$$

Donc, en utilisant (5):

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu_1(S_1(t)) X_1(t) = 0$$

Ce qui conduit à:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S_1(t) = 0 \text{ ou } \lim_{t \rightarrow +\infty} X_1(t) = 0$$

Nous avons donc deux cas à étudier:

◇ Cas:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_1(t) = 0$

D'après le système (5), on a:

$$\forall t > 0, X_1(t) = X_1(0) e^{\int_0^t \mu_1(S_1(\tau)) d\tau} e^{-\int_0^t D(\xi(\tau)) d\tau}$$

Donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_1(t) = 0$  implique au moins que:

$$\int_0^{+\infty} D(\xi(\tau)) d\tau = +\infty$$

Ce qui est absurde.

◇ Cas:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} S_1(t) = 0$

Nous avons donc:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (S_1(t) + \frac{k_1}{k_2} S_2(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} S_T(t) = 0 \quad (13)$$

Or nous savons que:  $\exists b > 0, S_T \geq b$ . L'équation (13) est donc absurde.

On a donc montré que  $\int_0^{+\infty} D(\xi(\tau)) d\tau$  n'était pas borné, comme  $\forall \tau, D(\xi(\tau)) \geq 0$ , on a prouvé que:

$$\int_{t=0}^{+\infty} D(\xi(\tau)) d\tau = +\infty$$

## RÉFÉRENCES

- [1] G. Bastin et D. Dochain. *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*. Elsevier, 1990.
- [2] Olivier Bernard, Z. Hadj-Sadok, D. Dochain, A. Genovesi, et J.-P. Steyer. Dynamical model development and parameter identification for an anaerobic wastewater treatment process. *Biotech. Bioeng.*, 75:424–438, 2001.
- [3] J.E. Bailey et D.F. Ollis. *Biochemical engineering fundamentals, second edition*. McGraw-Hill chemical engineering series, 1986.
- [4] F.E. Mosey. Mathematical modelling of the anaerobic digestion process: regulatory mechanisms for the formation of short-chain volatile acids from glucose. *Water Science and Technology*, 15:209–232, 1983.
- [5] S.P. Graef et J.F. Andrews. Mathematical modeling and control of anaerobic digestion. *Water*, 70:101–127, 1974.
- [6] E. Heinzle, I.J. Dunn, et G.B. Rhyhner. Modeling and control for anaerobic wastewater treatment. *Advances in Biochemical Engineering and Biotechnology*, 48:79–114, 1993.
- [7] Perrier M. et D. Dochain. Evaluation of control strategies for anaerobic digestion processes. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 7:309–321, 1993.
- [8] L. Mailleret et O. Bernard. A simple robust controller to stabilise an anaerobic digestion process. *8th International Conference on Computer Applications in Biotechnology, Modelling and Control of Biotechnological Processes*, pages 213–218, 2001.
- [9] J. Hofbauer et K. Sigmund. *The Theory of Evolution and Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1988.
- [10] H.L. Smith et P. Waltman. *The theory of the chemostat: dynamics of microbial competition*. Cambridge University Press, 1995.
- [11] H.R. Thieme. Convergence results and a poincaré-bendixson trichotomy for asymptotically autonomous differential equations. *Journal of Mathematical Biology*, 30:755–763, 1992.
- [12] J.P. Steyer, J.C. Bouvier, T. Conte, P. Gras, et P. Sousbie. Evaluation of a four year experience with a fully instrumented anaerobic digestion process. *1st International Water Association Conference on Instrumentation, Control and Automation*, 2001.
- [13] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Macmillan Publishing Company, 1992.