THÈSE

présentée à

l'Université de Nice – Sophia Antipolis

en vue d'obtenir le titre de

Docteur en Science

Spécialité *Sciences de l'Ingénieur*

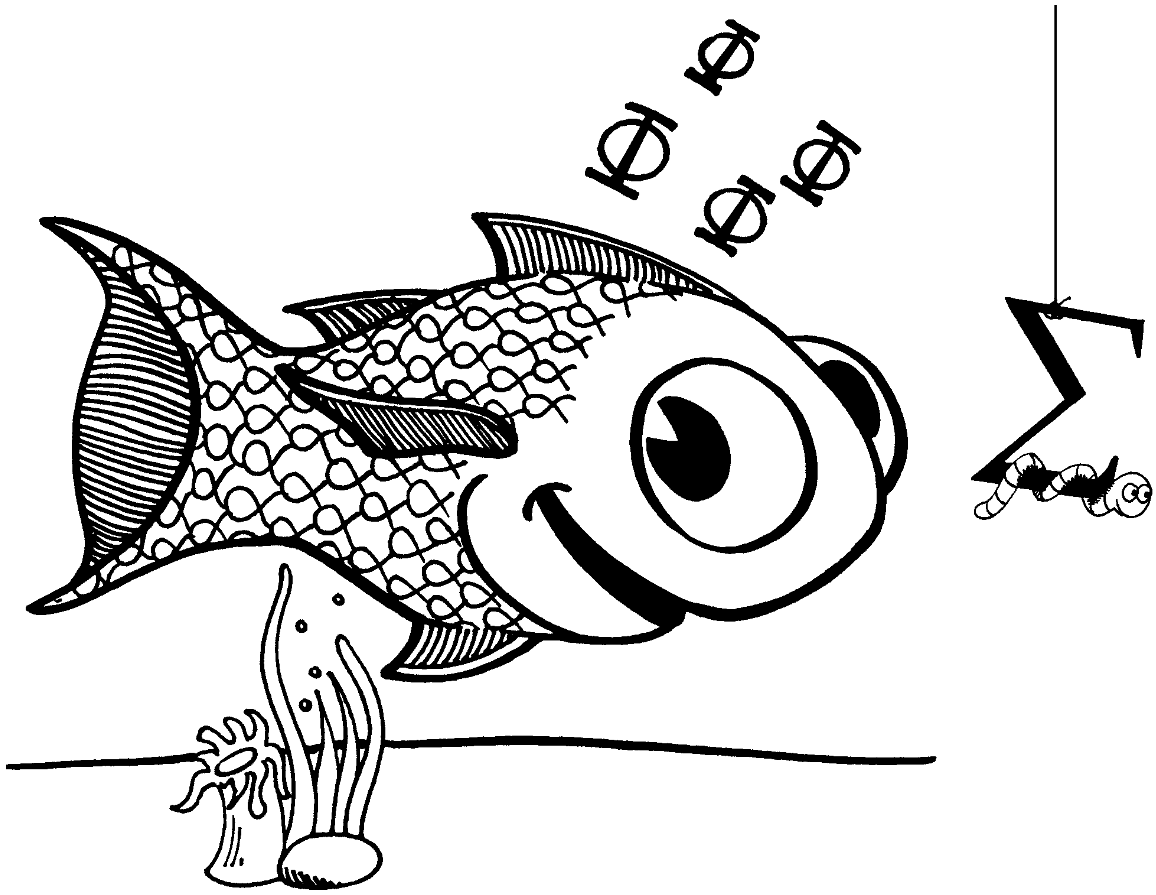
Modèles de contrôle en gestion des pêches

par Suzanne TOUZEAU

Soutenue le 6 mars 1997 devant le jury composé de :

MM.	Paul	NIVAL	*Président*
	Jordi	LLEONART	*Rapporteur*
	Claude	LOBRY	"
	Gauthier	SALLET	"
	Jean-Luc	GOUZÉ	*Directeur*
	Pierre	BERNHARD	*Examinateur*
	Henri	FARRUGIO	"
Mme	Dominique	PELLETIER	*Examinatrice*

Modèles de contrôle en gestion des pêches



Un poisson mathématique – par Theo Engell-Nielsen.

Remerciements

J'aimerais avant tout témoigner ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Jean-Luc Gouzé (COMORE, INRIA Sophia Antipolis). Pendant mes trois années de thèse et des poussières, j'ai pu apprécier sa disponibilité, ses compétences et sa rigueur. C'est lui qui m'a montré l'intérêt d'un travail interdisciplinaire, tout en mettant en garde contre ses effets secondaires : il est toujours un peu bancal d'être à cheval sur plusieurs disciplines. Il a toujours été là pour « discuter science » ; travailler avec lui a été pour moi très enrichissant. Je lui sais également gré de son aide et ses conseils pour la rédaction de ce mémoire.

Côté halieutique, j'ai bénéficié du co-encadrement de Dominique Pelletier (MAERHA, IFREMER Nantes). Nos discussions ont été essentielles tout au long de ma thèse. C'est elle qui m'a véritablement présenté le monde de l'halieutique, chose impossible simplement à travers des livres et des articles. Ses commentaires sur ce mémoire furent précieux. Je voudrais aussi la remercier pour son amitié et son soutien, en regrettant juste qu'elle n'ait pas pu assister à ma soutenance.

Je voudrais exprimer ma gratitude à chacun des autres membres du jury, mes rapporteurs tout particulièrement. Merci à Jordi Lleonart (ICM Barcelone : Institut des Sciences de la Mer) pour avoir accepté de se plonger dans ce mémoire un peu abrupt pour un halieute même modélisateur, en français qui plus est. Je lui suis reconnaissante pour son intérêt dans notre approche de l'halieutique, qui m'encourage à faire un post-doc dans son équipe. Un très grand merci à Claude Lobry (UNSA : Univ. de Nice – Sophia Antipolis, pour avoir lu et commenté ma thèse en un temps très limité, mais aussi pour avoir s'être intéressé et avoir soutenu mes travaux. Je remercie également grandement Gauthier Sallet (INRIA Metz), troisième rapporteur (par ordre alphabétique), qui s'est penché sur ma thèse et ses poissons malgré un emploi du temps chargé.

Je suis très sensible à l'honneur que m'a fait Paul Nival (Station Zoologique de Villefranche/mer, Univ. Paris 6) en acceptant d'être le président de mon jury de thèse. Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Pierre Bernhard (ESSI, UNSA), qui après m'avoir accueillie comme doctorante dans l'institut qu'il dirigeait, a accepté de prendre part au jury. Toute ma gratitude également à Henri Farrugio (IFREMER Sète), à qui je promets de ne plus qualifier les baleines de poissons.

Trop d'équations pour les uns, des problématiques un peu obscures pour les autres, j'espère néanmoins que ce mémoire n'aura pas été trop indigeste. Merci enfin à Patricia Lachaume qui m'a efficacement guidée dans toutes les démarches pour la soutenance de ma thèse.

J'aimerais souligner que j'ai eu grand plaisir à travailler à l'INRIA ces dernières années. C'est pourquoi j'adresse mille mercis : à mes collègues de MIAOU et de COMORE pour leur soutien scientifique tout autant que moral et logistique pendant ma thèse ; aux « filles de la Doc » qui arrivent même à dénicher de vieux bouquins épuisés sur les poissons ; au Semir qui trouve toujours une alternative à « je vais balancer ma babasse par la fenêtre » ; au BPAS et particulièrement à Fabrice, interlocuteur privilégié des thésards et leurs problèmes ; au Bureau des Missions où il fait bon passer pour se détendre, voire même se défouler un peu (et non Laetitia et Nathalie, malgré tous vos efforts vous n'aurez pas réussi à me perdre en mission).

Et puis merci à ma famille et tous mes amis, camarades thésards ou non, INRIAis ou géographiquement plus éloignés, pour leur soutien pendant ces trois ans et tout particulièrement pendant les derniers et difficiles mois, la dernière ligne droite avant de devenir Dr. Suzanne. Grâce à eux j'ai pu terminer à « compter mes poissons » dans de bonnes conditions.

Til sidst tak til Theo for hans matematiske fisk og en særlig varm tak til mit pus for hans støtte under hele afslutningen af min afhandling.

Table des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction

Introduction

Contenu

La problématique halieutique

Longtemps on a considéré la mer comme une source de richesses inépuisable et la pêche comme une activité de cueillette. Pourtant depuis la fin du XIX^{e} siècle, on observe une diminution des rendements, en même temps qu'une augmentation de la pêche (si l'on excepte les périodes de guerre).

La surexploitation des stocks halieutiques, liée à une augmentation importante de l'effort de pêche et simultanément à des progrès technologiques (sonars, etc.) considérables, l'introduction des zones économiques exclusives (ZEE) pour les pays possédant des façades maritimes, ainsi que l'augmentation du coût de l'énergie ont été trois facteurs déterminants pour remettre en cause la rentabilité des entreprises de pêche, et pour précipiter une prise de conscience : *les ressources de la mer ne sont pas inépuisables.* Surcapacité de pêche, secteur économique surendetté, stocks surexploités : beaucoup de superlatifs pour décrire une situation difficile.

La *nécessité d'une politique de gestion des pêches* est aujourd'hui reconnue. Son but est d'assurer un développement durable de la ressource, compromis entre la maximisation des revenus de la pêche et la pérennité des stocks. Elle doit d'un côté d'éviter l'épuisement des ressources marines, et de l'autre permettre de tirer un maximum de bénéfices de la mer, sous forme d'emplois directs ou indirects, de production alimentaire, d'exportation de technologies, etc... Ces deux aspects ne sont pas nécessairement antagonistes, surtout dans une perspective à long terme, mais le passage d'une situation de surexploitation à une situation stabilisée est en général source de problèmes pendant une période de transition.

Les moyens dont on dispose pour mettre en place des politiques de pêche sont des réglementations locales, nationales et internationales, spécifiques à une espèce sur une zone géographique, en termes de quotas sur les captures, de limitations sur les tailles et forme des mailles des chaluts, ou sur la puissance et le tonnage des flottilles de pêche, de zones protégées...

Une des premières mesures de gestion est apparue dès 1946 sur la plie, espèce côtière de la Mer du Nord : pour garantir la reproduction de l'espèce, les aires de fraie et les nourriceries ont été interdites à la pêche et une taille minimale de maille a été introduite pour les filets. Depuis, beaucoup d'autres mesures ont été mises en place, sous forme de limitations des captures (quotas) dans l'Atlantique Nord et la Mer du Nord, sur l'effort de pêche en Méditerranée.

Pour mettre en place cette gestion des stocks halieutiques, les « décideurs » s'appuient le plus souvent sur les études de scientifiques halieutes. L'*halieutique* est la science étudie la relation entre l'homme et les populations qu'il exploite par la pêche. Par des avis scientifiques sur les mesures de gestion à mettre en place et par des études destinées à mieux connaître et comprendre le fonctionnement du système pêche, elle cherche à améliorer la situation des pêches.

À cette fin, des modèles mathématiques spécifiques à ces populations marines exploitées ont été développés ; en particulier des modèles quantitatifs pour le diagnostic (VPA, cf. annexe A) et la prévision, en vue de fournir des avis sur les principaux stocks exploités. En comparaison, peu de modèles détachés des contraintes de gestion ont été élaborés dans un but heuristique.

Actuellement, on assiste à une remise en cause des modèles d'évaluation classiques, dont le diagnostic s'avère parfois incorrect et qui n'ont pas permis de prévoir à temps certaines catastrophes : e.g chute des stocks de hareng de Mer du Nord, de l'anchois du Pérou dans le milieu des années 70. La situation présente est critique : surexploitation des principaux stocks et surcapacité de pêche, dues essentiellement aux décisions politiques imprudentes en matière de gestion de la ressource, et ce malgré les recommandations des scientifiques.

On constate aussi une certaine impuissance des mesures de gestion classiques, quotas sur les captures et limitations d'effort. Ainsi des modèles de gestion alternative, prenant en compte la ressource et ses relations avec son environnement d'une part, les pêcheurs et leurs contraintes économiques d'autre part sont élaborés ; plus spécifiquement en Mer du Nord et sur le Golfe du Lion.

Notre approche

Notre approche du domaine halieutique est originale, car elle introduit un formalisme et des outils issus de l'automatique. Le problème majeur qu'engendre cette démarche est lié à sa pluridisciplinarité : il faut comprendre la problématique halieutique et ses enjeux avant de pouvoir résoudre certains problèmes pertinents par des techniques de l'automatique ; il faut en outre savoir dégager des résultats obtenus, les points intéressants par leur interprétation biologique.

L'*automatique* est une science qui étudie et contrôle des systèmes dynamiques. L'*approche système* est une caractéristique de cette science qui va de la théorie à l'application. Un système est représenté par plusieurs variables : des entrées qui servent à le contrôler, des sorties que l'on observent et des variables internes décrivant son état. Cette approche se prête bien au cadre halieutique ; on peut par exemple pour le système «stock exploité» assimiler l'entrée à l'effort de pêche, la sortie à la capture et l'état à la biomasse du stock.

Les objectifs principaux en automatique sont de comprendre et modéliser le fonctionnement de tels systèmes, afin de les contrôler, i.e. d'élaborer des lois d'entrée de manière à ce qu'ils suivent un comportement donné. L'automatique dispose d'une théorie bien adaptée pour des systèmes régis par des lois physiques « exactes », souvent linéaires (en première approximation). Elle s'applique essentiellement à des processus industriels, comme par exemple pour l'asservissement de moteurs, la régulation de réacteurs chimiques, le pilotage automatique de véhicules...

Mais il est plus compliqué de mettre la biologie en équations. La dynamique des populations marines exploitées fait intervenir un grand nombre de phénomènes élémentaires dont la modélisation n'est pas évidente. La mortalité par exemple est due à la pêche, aux autres espèces prédatrices, au cannibalisme éventuel, à la propagation de maladies, aux conditions climatiques, à la présence de nourriture... Toutes ces interactions font que la condition d'isolement d'un système est peu respectée. Comme on ne sait pas toujours quantifier ces effets, il est difficile de savoir lesquels négliger. En outre la plupart des phénomènes intervenant dans la dynamique de population sont non linéaires, ce qui complique l'étude et le contrôle de ces systèmes.

Le but des études que nous avons menées est plus d'expliquer que de prédire ou de diagnostiquer. C'est pourquoi nous avons développé des modèles simples, où il est possible de maîtriser les mécanismes introduits dans la dynamique du stock. Nous avons utilisé des techniques de contrôle qui peuvent sembler peu sophistiquées, mais qui ont l'avantage d'être interprétées aisément. Certains choix de modélisation en découlent.

Nos outils

Aucun livre ou presque ne traite des applications de l'automatique à l'écologie, si l'on excepte la théorie du contrôle optimal, utilisée en pêche par Clark [9]. Le choix des outils que nous avons employés est donc original pour ce type d'étude.

Nous avons fait appel à certains outils classiques en automatique. Le *critère du cercle* dans le chapitre III, a permis d'étudier la stabilité d'un modèle de population bouclé par un terme de reproduction très général ; nous avons en outre étendu le résultat habituel au cas d'un système avec plusieurs équilibres. Le *contrôle optimal* employé dans la section IV.2 dans le cadre linéaire quadratique a donné quelques interprétations biologiques intéressantes.

Des techniques moins classiques, issues des *systèmes coopératifs*, ont été appliquées pour l'étude de stabilité du modèle avec pré-recrutés dans la section II.2. Et une méthode par *domaine invariant sous contrôle* est exposée, pour résoudre les problèmes de régulation de la section IV.3 ; pour les deux systèmes pêche considérés, la résolution est essentiellement graphique.

Choix de modélisation

Certaines questions se sont posées, préalablement à la modélisation des stocks halieutiques. Tout d'abord à quel niveau de description s'arrêter, quels phénomènes prendre en compte ? Nous avons choisi de nous limiter à des modèles monospécifiques, sans composante géographique. Ces restrictions sont motivées par notre approche, afin de conserver une certaine maîtrise sur la dynamique, pour comprendre ce qu'il se passe.

Nous avons en outre écarté les interactions du stock avec son milieu et les perturbations environnementales qui très souvent sont introduites sous forme de variables aléatoires. D'où le choix de *modèles déterministes*.

Un autre choix, qui suscite bien des polémiques est le suivant : temps continu ou temps discret ? L'expérience du projet Comore est plus grande sur les modèles en temps continu, ce qui a évidemment influencé le choix. Certes les phénomènes principaux intervenant sur la dynamique du stock sont généralement saisonniers : la ponte, la pêche. Cela se prête bien à une description en temps discrète annuelle, qui en outre, simplifie la mise en place de classes d'âge. Mais se posent les problèmes suivants : le passage dans la classe supérieure se fait-il avant ou après la pêche, comment répercuter une réduction de la saison de pêche... Car peu de phénomènes ont lieu de manière ponctuelle par rapport au temps, ils ont une certaine durée. Si l'on veut modéliser leur dynamique et étudier leur superposition, le temps continu est plus adapté. Le reproche principal qui lui est fait par les biologistes est « l'étalement numérique » intervenant dans le cas de modèles avec classes d'âge. En effet, l'introduction à un temps donné de quelques individus juvéniles donne l'instant suivant des individus dans tous les groupes d'âge, même les adultes matures, ce qui est irréaliste d'un point de vue biologique. Néanmoins ces adultes générés spontanément sont en faible quantité et l'on peut négliger cet étalement si l'on considère un stock halieutique où, au cours de l'année, tous les âges sont représentés. D'où le choix de *modèles en temps continu*.

Choisir ensuite les phénomènes à prendre en compte et à modéliser sur la population, ainsi que leur formulation mathématique, se fait selon le but recherché et les besoins. Il en est ainsi par exemple du choix d'un modèle structuré en âge ou en stades, ou alors simplement représenté par sa biomasse totale : si l'on retient certains termes de mortalité spécifiques aux juvéniles, une structure est nécessaire. Aussi dans certains cas, nous n'utiliserons pas les modèles halieutiques classiques. À chaque fois cependant, nous essaierons d'exprimer clairement les hypothèses retenues et les limites qu'elles imposent aux modèles.

À la recherche des données

La validation des divers modèles sur des données est souhaitable, mais assez difficile à réaliser. En halieutique, on évolue dans un monde incertain où l'observation et l'expérimentation directes sont pratiquement impossibles. On ne voit pas la ressource, on ne peut pas la dénombrer directement ; sauf grâce à quelques méthodes, acoustiques par exemple, mais non généralisées. Il faut donc estimer l'état des stocks au travers d'autres données disponibles : les efforts et captures commerciaux ou les indices d'abondance issus de campagnes scientifiques (échantillonnages expérimentaux planifiés).

Plusieurs flottilles issues de pays différents exploitent les mêmes stocks avec divers engins, ce qui ne facilite pas la collecte de données extensives. Par conséquent on dispose très rarement de toutes les données relatives à un stock. En outre, on ne dispose le plus souvent que d'un relevé par an et ce sur une période assez courte, ce qui donne des jeux de données de longueur 12, 20, ce qui est très petit par rapport à ceux usuellement traités en automatique.

Les données dont on dispose sont souvent bruitées. Les relevés fournis par les pêcheurs sont parfois imprécis (voire même illisibles) et ils dépendent de la tactique de pêche, les rejets en mer, ne tiennent pas compte des conditions climatiques... Et se posent encore des problèmes de compatibilité entre données. En effet, il est difficile d'évaluer l'effort de pêche, qui n'est pas exprimé en une unité universelle, mais dans une unité spécifique à chaque métier : longueur de ligne, traits de chalut, heures en mer, tonnage du bateau... Ces unités ne sont pas toujours standardisées, elles ne tiennent pas toujours compte de l'impact des progrès techniques (une heure de mer il y a 5 ans et actuellement ne sont pas équivalentes) et il est complexe d'établir des tables de conversion.

Présentation du mémoire

Le premier chapitre de ce mémoire, *Modélisation de systèmes halieutiques* présente les modèles halieutiques classiques utilisés pour l'évaluation de la ressource, leur formalisation en termes automatiques et la base d'un système de pêcherie plus complet, dans lequel sont développées toutes les étapes du fonctionnement du système : de l'élaboration de stratégies de gestion à l'exploitation des stocks halieutiques.

Le second chapitre étudie plus en détails *Un modèle avec pré-recrutés*. Il s'agit d'un modèle structuré en stades, pour lequel on a mis l'accent sur la modélisation des phénomènes intervenant sur les juvéniles. Généralement ce stade n'est pas exploité et ne fait donc pas partie du stock (phase exploitable) ; les modèles halieutiques classiques lui substituent une relation stock-recrutement, qui est une fonction reliant le recrutement, i.e. l'entrée des jeunes individus dans le stock, au stock fécond. Les propriétés de ce modèle ainsi que son lien avec les relations stock-recrutement sont abordés.

Le chapitre suivant, *Stabilité d'un modèle avec recrutement généralisé*, étudie la stabilité d'un modèle structuré en stades pour une classe de fonction stock-recrutement dépendant du temps, ce qui ajoute une dimension supplémentaire par rapport aux relations classiques.

Le quatrième chapitre est dédié à des applications de *Contrôle sur des modèles halieutiques*, essentiellement de régulation. On cherche à maintenir l'effort et la capture d'une pêcherie à peu près constants, de manière à réduire les fluctuations des revenus et des coûts des pêcheurs. Deux approches sont développées : par contrôle optimal et par domaine invariant.

Le dernier chapitre présente l'*Identification d'un stock halieutique*, le stock de flétan du Pacifique, et introduit la notion d'identifiabilité sur un contre-exemple.

Notice typographique

Nous utilisons dans ce document quelques règles typographiques, pour mettre en relief et alléger la présentation.

> ☞ Cet environnement sert à introduire des explications ou compléments de manière plus intuitive pour certains résultats théoriques. ▮

> REMARQUES / EXEMPLE : Il est parfois utilisé pour introduire des remarques ou des exemples permettant d'illustrer quelques résultats. ▮

Interprétation *– C'est ainsi que sont mises en évidence dans le corps du texte, les interprétations biologiques et discussions des divers résultats.*

Sont encadrés certains résultats faisant office de conclusions intermédiaires.

◆ Ce symbole renvoie à des développements figurant en annexe.

Modélisation de systèmes halieutiques

Chapitre I

Modélisation de systèmes halieutiques

Contenu

Introduction

En halieutique, les modèles utilisés pour l'évaluation des ressources prennent rarement en compte la totalité du cycle de vie d'une population marine exploitée. Souvent ne sont considérés que les individus susceptibles d'être exploités, qui constituent le *stock*. Le stock est donc plus une *unité de gestion* qu'une unité biologique. En sont exclus les larves et alevins, trop petits ou absents des lieux de pêche potentiels, et éventuellement de vieux poissons qui quittent les lieux de pêche, ou deviennent inaccessibles aux engins de pêche... Cette phase exploitable est ainsi limitée par le recrutement d'une part et la réforme de l'autre. Le recrutement correspond à l'entrée des jeunes individus dans le stock, tandis que l'âge de réforme intervient lorsque les individus ne sont plus exploitables.

Par rapport à la modélisation de processus industriels (moteurs, réacteurs chimiques, etc.), qui constituent le cadre d'étude des systèmes automatiques, les « systèmes pêche » présentent quelques difficultés particulières. Les stocks halieutiques ne suivent pas de lois ou de principes fondamentaux facilement quantifiables, comme c'est le cas en physique ou en chimie (e.g. les lois de conservation de l'énergie, etc.). Il est ainsi difficile de traduire sous forme d'un modèle mathématique le *comportement du stock* : par exemple, il n'est pas évident de traduire en équations la mortalité subie par le stock.

Il est en outre nécessaire de bien définir l'entité étudiée et de faire quelques hypothèses assez fortes afin d'en permettre la modélisation. Le stock est considéré comme un *ensemble d'individus uniforme et isolé*. Cela suppose l'uniformité des caractéristiques individuelles, ou de manière plus réaliste le brassage des individus, et cela exclut tout échange avec d'autres populations. On s'affranchit ainsi des comportements individuels et l'on peut considérer le stock comme unité de modélisation.

La première partie de ce chapitre a pour but de dresser un aperçu de la modélisation en halieutique. Elle ne constitue bien évidemment pas une revue exhaustive, mais elle présente différents résultats classiques, qui ont servi de base à nos travaux. Nous présentons tout d'abord quelques *modèles classiquement utilisés pour l'évaluation des stocks*, puis nous décrivons plus précisément le terme de *recrutement*.

La seconde partie du chapitre est consacrée au « *système pêche* », c.-à-d. à la description de stocks exploités sous forme automatique, avec entrées et sorties... Après avoir décrit quelques systèmes halieutiques simples, nous exposons un système de pêcheries plus complexe, issu d'une réunion sur la *modélisation de stratégies de gestion* (Dublin, 1994 [18]).

◆ Un glossaire halieutique – automatique est présent en annexe A afin de faciliter la compréhension de ce chapitre.

I.1 Modèles classiques en halieutique

Nous présentons ici quelques modèles issus de la littérature et utilisés pour l'évaluation des stocks en halieutique . Ces modèles décrivent tous l'évolution au cours du temps du stock, i.e. de la phase exploitable de la population. Ils sont divisés en deux grands groupes. Les *modèles globaux* représentent le stock sous forme d'une unique variable ; ils décrivent toute la biomasse mais supposent qu'elle est entièrement accessible à la pêche. Les *modèles structuraux* distinguent plusieurs stades (classes d'âge, de taille...) sur le stock et leur associent à chacun une variable dynamique. Les modèles décrits ci-dessous sont regroupés selon ce critère et leur exposé a essentiellement été réalisé à partir du rapport de Laurec et Le Guen [25].

Dans le cas des modèles structuraux, il est nécessaire d'exprimer le *recrutement*, soit le terme d'entrée dans le premier stade du stock ; il est étudié dans la section suivante (cf. section I.2).

Il existe aussi des modèles plus complexes où, à la dynamique du stock, on couple une dynamique de l'effort de pêche, fondée le plus souvent sur des critères économiques ; on les appelle des *modèles bio-économiques* et ils font l'objet du dernier point de cette section.

I.1.1 Approche globale

L'approche globale consiste à représenter le stock par une seule variable dynamique, telle sa biomasse (masse totale du stock) ou son abondance (effectif total du stock). Les modèles globaux ne tiennent compte d'aucune structure démographique.

L'hypothèse de base de ces modèles est qu'à un état de stock donné, correspond un équilibre stable non nul avec le milieu. Un équilibre instable ne suffirait pas, car même si on le supposait atteint, les populations marines sont soumises à de fortes perturbations dans leur milieu naturel et rien ne garantirait leur pérennité.

a) Modèle de Verhulst–Pearl

C'est le modèle de base pour un *stock vierge*, i.e. non exploité, appelé aussi modèle logistique. Il est issu des travaux de Verhulst [49] et de Pearl [33].

$$\frac{dB(t)}{dt} = r\left(1 - \frac{B(t)}{k}\right)B(t)$$

où k et r sont des constantes strictement positives :

k : biomasse à l'équilibre, ou capacité de charge	(en masse)
r : taux de croissance	(en unité de temps^{-1})

Dans ce modèle, le stock possède un point d'équilibre instable zéro et un point d'équilibre stable pour $B = k$. Cette propriété est nécessaire à la survie de l'espèce considérée.

La structure du modèle fait que B demeure positive si elle l'est au départ : quand $B = 0$ $dB/dt = 0$. De ce fait, on ne peut pas obtenir de biomasse négative, ce qui n'aurait aucun sens. La figure I.1 montre la dynamique d'un tel modèle, pour différentes conditions initiales de biomasse : les valeurs d'équilibre 0 et k, ainsi que B_1, B_2 $(0 < B_1 < B_2 < k)$ et B_3 $(B_3 > k)$.

Remarque : Ces équations sont aussi valables en nombre. On peut remplacer la biomasse par l'effectif du stock, autre variable positive caractéristique. ∎

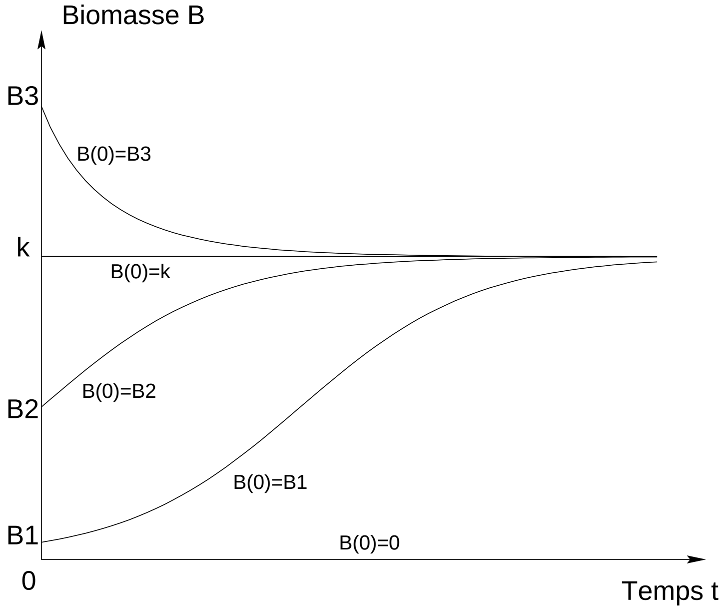


FIG. I.1 *Dynamique d'un modèle logistique pour différentes conditions initiales de biomasse.*

b) Modèle de Graham–Schaefer

On introduit une *pêcherie* sur le stock vierge précédent. La capture réalisée par unité de temps est supposée proportionnelle et au stock et à l'effort déployé pendant cette unité de temps. La constante de proportionnalité est la capturabilité q. On obtient le modèle dit de SCHAEFER ou GRAHAM–SCHAEFER [16, 43] :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = rX\left(1 - \dfrac{X}{k}\right) - qUX \\ \dfrac{dY}{dt} = qUX \end{cases}$$

en reprenant les notations précédentes et en introduisant les suivantes :

U : intensité de pêche	(en unité d'effort×unité de temps^{-1})
Y : capture	(en nombre ou en masse)
q : capturabilité	(en unité d'effort^{-1})
X : effectif ou biomasse	(en nombre ou en masse)

REMARQUES Ces équations sont valables et en poids et en nombre : X est soit la biomasse, soit l'abondance du stock considéré. La capture suit cette mesure.

Si l'on considère le pêcheur comme un prédateur, ce modèle se rapproche du modèle dit de LOTKA–VOLTERRA, modèle type des systèmes proies–prédateurs [28]. ▮

Équation aux captures (approche globale et structurale) La capture constitue intrinsèquement une grandeur cumulée : ce sont les poissons pêchés pendant un intervalle de temps donné. La quantité qUX est au contraire un grandeur instantanée, le *taux de capture* selon SCHAEFER, et représente les poissons pêchés par unité de temps, i.e. la *capture instantanée*. Or on considère souvent l'équation aux captures sur un intervalle de temps donné Δt.

À condition que le stock n'évolue pas pendant cette période et en notant E l'effort de pêche déployé sur cette période, l'équation aux captures devient :

$$Y = qEX \qquad \text{avec : } E = \int_{\Delta t} U(t)\, dt$$

L'avantage de cette formalisation classique est que la production Y n'apparaît plus sous forme de variable dynamique, mais comme une variable de sortie, ce qui est plus réaliste dans ce cas. Son inconvénient majeur est qu'elle est dépendante d'un pas de temps, car elle donne la *capture intégrée*.

☞ Considérer la capture comme un *produit du stock* est en effet plus proche de la réalité. La capture représente la production du stock, résultat de son exploitation par les pêcheurs. En outre une situation d'équilibre du «système stock–capture dynamique», soit une situation où la capture n'évoluerait plus (stock épuisé ou plus de pêche), ne présente pas un grand d'intérêt.

Lorsque l'on prend $Y = qEX$, il ne faut cependant pas oublier de spécifier la période considérée pour évaluer l'effort et la capture ; souvent on utilise des modèles en temps discret (surtout pour les modèles structuraux) et naturellement le pas de temps « 1 an » est sous-entendu. ▮

➥ Dans ce document, nous conservons l'équation aux captures instantanée, mais en l'exprimant d'une manière similaire à la formulation intégrée. On aura donc :

$$Y_1 = qE_1X$$

Y_1 représentant la capture *instantanée* (capture / unité de temps) ;
E_1 étant l'effort *instantané* ou l'intensité de pêche (effort / unité de temps) ;

que souvent on notera de manière un peu abusive : $Y = qEX$, pour rejoindre la notation classique intégrée.

Dynamique et équilibres La dynamique de ce modèle est la même que celle d'un modèle logistique (cf. figure I.1), seulement l'équilibre non nul sous exploitation est décalé. À condition que l'effort E^* fixé soit compris entre 0 et r/q, il existe une valeur de stock à l'équilibre, inférieure à k :

$$X^* = k - \tfrac{qk}{r}E^*$$

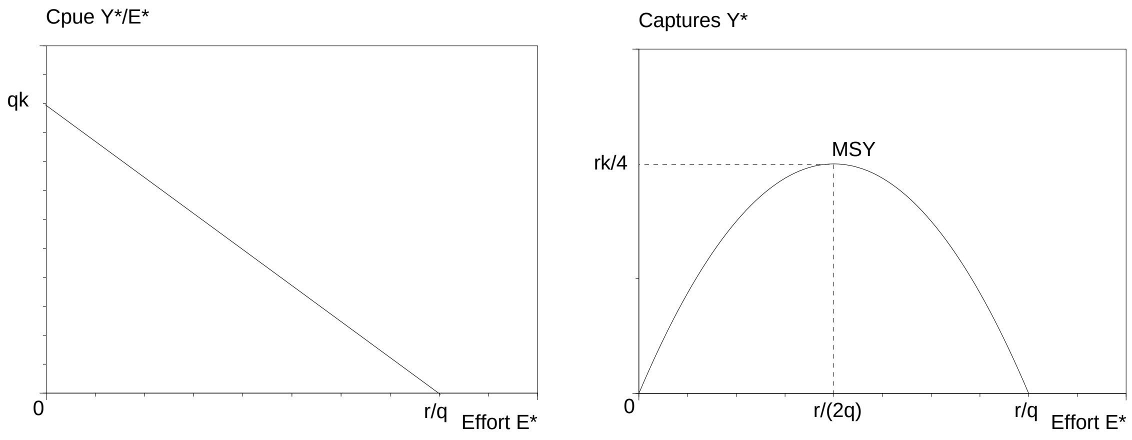
La figure I.2 représente la capture et la capture par unité d'effort à l'équilibre en fonction de l'effort :

$$cpue = Y/E = qX \text{ (en nombre ou masse par unité d'effort)}$$

qui donnent une bonne idée du rendement de la pêche.

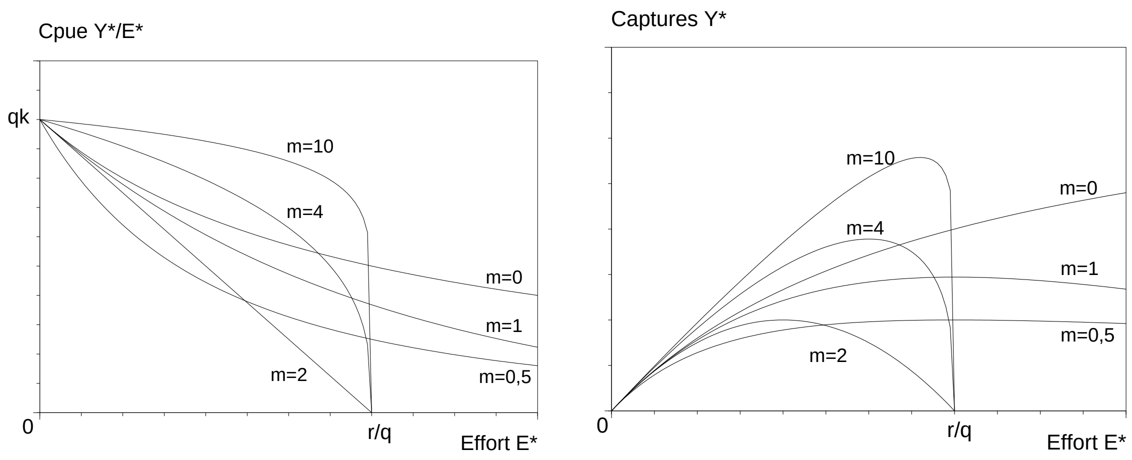
☞ La décroissance en fonction de l'effort des cpue à l'équilibre peut ne pas sembler évidente au premier abord. Mais les cpue sont proportionnelles au stock. À stock constant, les cpue sont constantes elles aussi. Et à l'équilibre, elles sont proportionnelles au stock équilibré X^*, et celui-ci est plus faible si on augmente l'effort de pêche E^*, tout en restant à l'équilibre. ▮

La capture instantanée équilibrée présente un maximum, appelé production maximale équilibrée, ou en anglais Maximum Sustainable Yield : $MSY = rk/4$. L'effort correspondant $r/(2q)$ est qualifié, de manière un peu simpliste, d'optimal ; en effet, le critère implicite retenu consiste à maximiser la capture réalisée par unité de temps à l'équilibre. La figure I.5 présente un critère un peu plus réaliste, car il intègre la notion de coût, mais toujours sur un modèle statique.



(a) Cpue en fonction de l'effort (b) Captures en fonction de l'effort

FIG. I.2 *Caractéristiques du modèle de* SCHAEFER *à l'équilibre ; mise en évidence du MSY (Maximum Sustainable Yield).*



(a) Cpue en fonction de l'effort (b) Captures en fonction de l'effort

FIG. I.3 *Caractéristiques du modèle de* PELLA–TOMLINSON *à l'équilibre, pour diverses valeurs de m :* 0; 0,5; 1; 2; 4; 10.

c) Modèle de Pella–Tomlinson

Le modèle de PELLA–TOMLINSON [34] correspond en fait à une variante du modèle de SCHAEFER. Il introduit un paramètre m ($m \neq 1$) au modèle, positif et sans dimension :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \begin{cases} rX(1 - (\frac{X}{k})^{m-1}) - qEX & \text{pour : } m > 1 \\ rX((\frac{k}{X})^{1-m} - 1) - qEX & \text{pour : } 0 \leqslant m < 1 \end{cases} \\ Y = qEX \end{cases}$$

Le cas $m = 2$ correspond au modèle de SCHAEFER. Pour $m = 1$ le taux d'accroissement naturel $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ n'a aucun sens. On le transforme pour obtenir le *modèle exponentiel* suivant :

$$\frac{dX}{dt} = rX \ln \frac{k}{X} - qEX$$

Dans tous les cas, ces modèles ont toujours deux équilibres, 0 instable et X^* strictement positif et stable. La figure I.3 reprend, comme précédemment la figure I.2, quelques caractéristiques de ces modèles à l'équilibre, pour diverses valeurs de m.

I.1.2 Approche structurale

Les modèles précédents donnent une vision très globale de l'évolution d'un stock. Mais pour parvenir à étudier l'impact de changements du diagramme d'exploitation (e.g. effet d'un changement de maille sur les mortalités par pêche), il faut dépasser l'approche globale et se pencher sur les mécanismes de la « boîte noire » du stock. Cela devrait également permettre un meilleure description du système, grâce à la prise en compte de la croissance pondérale et de la reproduction.

Comme leur nom l'indique, les modèles structuraux supposent une structure sur le stock. Il est ainsi possible d'étudier l'évolution de différents stades du stock. En outre, ils sont explicatifs et détaillent les différents processus affectant le stock.

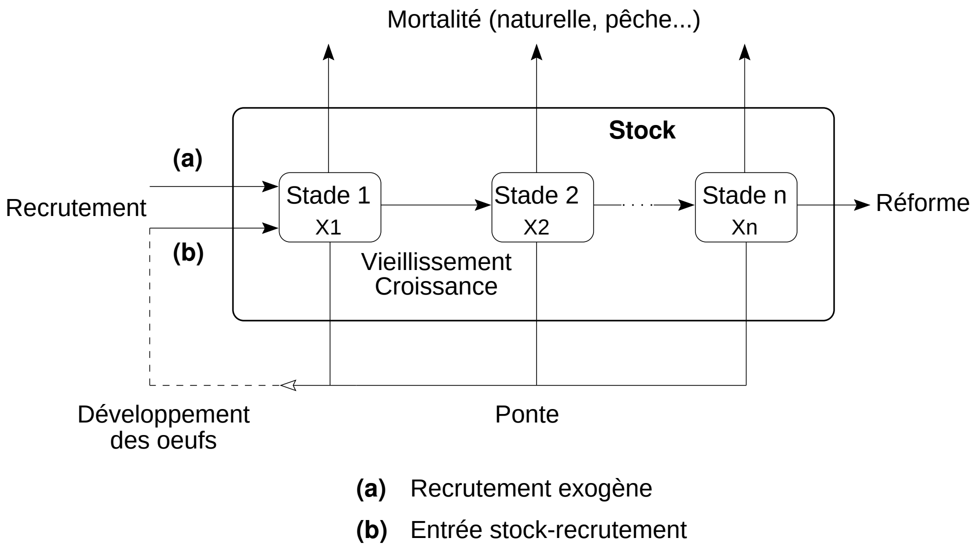


FIG. I.4 *Schéma d'un stock halieutique structuré en stades.*

a) Formulation générale

Le schéma général des modèles structuraux est représenté sur la figure I.4. Y sont décrits les phénomènes essentiels influant sur la phase recrutée : mortalité, vieillissement... Le recrutement, qui constitue l'apport de nouveaux individus dans le stock, n'est pas détaillé ici et fait l'objet de la section I.2.

Le stock est constitué de plusieurs cohortes ; chacune regroupe tous les poissons qui ont rejoint le stock au même moment. Dans les modèles structuraux, on suit le devenir d'une cohorte. Les lois d'évolution qui la gouvernent sont de manière générale :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{N(t)}\dfrac{dN(t)}{dt} = -Z(t) = -(F(t)+M(t)) & \text{Effectifs} \\ \dfrac{dC(t)}{dt} = F(t)N(t) & \text{Captures} \\ B(t) = W(t)N(t) & \text{Biomasse} \\ \dfrac{1}{W(t)}\dfrac{dW(t)}{dt} = G(t) & \text{Poids (croissance)} \\ \dfrac{dY(t)}{dt} = F(t)W(t)N(t) & \text{Rendements} \end{cases}$$

où :
- $N(t)$: nombre de survivants de la cohorte à l'instant t
- $B(t)$: biomasse de la cohorte à l'instant t
- $W(t)$: poids moyen des individus de la cohorte à l'instant t
- $Z(t)$: taux de mortalité totale instantané pris à l'instant t
- $F(t)$: taux de mortalité par pêche instantané pris à l'instant t
- $M(t)$: taux de mortalité naturelle instantané pris à l'instant t
- $G(t)$: taux de croissance instantané pris à l'instant t
- $C(t)$: capture en nombre entre l'instant initial et l'instant t
- $Y(t)$: capture en masse entre l'instant initial et l'instant t

Selon les lois retenues, on obtient divers modèles, dont les modèles de BEVERTON–HOLT et de RICKER.

b) Modèle de Beverton–Holt

Dans le modèle de base de BEVERTON–HOLT [7], la mortalité naturelle est supposée constante et égale à M. La mortalité par pêche est supposée constante et égale à F au-delà de l'âge à la première capture t_c, et nulle auparavant. L'évolution des effectifs d'une cohorte est donc, si l'on note R le recrutement et t_r l'âge au recrutement :

$$\begin{aligned} &\text{Entre } t_r \text{ et } t_c \;: && N(t) = R\exp^{-M(t-t_r)} \\ &\text{Au-delà de } t_c \;: && N(t) = N(t_c)\exp^{-(F+M)(t-t_c)} \end{aligned}$$

La croissance linéaire de chaque individu est décrite par une fonction explicite, celle de VON BERTALANFFY [50]. Si $L(t)$ est la longueur moyenne d'un individu à l'instant t, on a :

$$L(t) = L_\infty(1 - \exp^{-K(t-t_0)})$$

BEVERTON et HOLT supposent en outre que la croissance pondérale est isométrique, d'où :

$$W(t) \propto L(t)^3 \Rightarrow W_\infty(1 - \exp^{-K(t-t_0)})^3$$

REMARQUE : Même si cette modélisation donne des résultats satisfaisants, comme il s'agit d'une courbe ajustée, il est souvent abusif de vouloir attribuer aux coefficients K, L_∞ et t_0 une quelconque signification biologique. ∎

Calculs de production Sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, où $t_1 \geqslant t_c$, la capture en nombre est égale à :

$$C_{t_1 \to t_2} = \frac{F}{F+M} N(t_1)(1 - \exp^{-(F+M)(t_2-t_1)})$$

et la capture pondérale correspondante est :

$$Y_{t_1 \to t_2} = F \int_{t_1}^{t_2} N(t)\, W(t)\, dt = F\, N(t_1)\, W_\infty \sum_{n=0}^{3} \Omega_n \frac{\exp^{-nK(t_1-t_0)} \left(1 - \exp^{-(F+M+nK)(t_2-t_1)}\right)}{F+M+nK}$$

avec : $\Omega_0 = 1,\ \Omega_1 = -3,\ \Omega_2 = 3,\ \Omega_3 = -1$.

Pour calculer la production globale d'une cohorte, il suffit de choisir $[t_c, +\infty[$ comme intervalle. Par souci de réalisme, on pourrait fixer un âge maximal (longévité t_l) plutôt que prendre l'infini comme borne supérieure ; surtout si un phénomène de réforme intervient. Mais le modèle est ainsi fait que la contribution des grands âges est facilement négligeable (décroissance exponentielle) ; on adopte donc cette solution, qui permet d'éviter le choix d'une borne, et qui en outre simplifie un peu les calculs. On a alors comme capture totale sur la cohorte :

$$C = \frac{F}{F+M} R\ \exp^{-M(t_c-t_r)}$$

$N(t_c) = R \exp^{-M(t_c-t_r)}$ est l'effectif de la cohorte à l'âge de première capture. Tous ces poissons vont mourir au bout d'un temps infini et C est la fraction de $N(t_c)$ étant morte par pêche. La capture pondérale correspondante est :

$$Y = F\, R\, W_\infty\ \exp^{-M(t_c-t_r)} \sum_{n=0}^{3} \Omega_n \frac{\exp^{-nK(t_c-t_0)}}{M+F+nK}$$

c) Modèle de Ricker

La particularité du modèle de Ricker [37, 39] est d'être *discrétisé*. On considère que la cohorte traverse au cours de sa vie, des périodes successives sur lesquelles ses caractéristiques sont constantes : taux de croissance, mortalité naturelle et par pêche. Cela consiste en fait à approcher les fonctions de mortalité, croissance et pêche au cours du temps par des fonctions en escalier ; si les intervalles de discrétisation ne sont «pas trop grands», l'estimation est bonne.

Ce modèle est donc plus souple que celui de Beverton–Holt, car les hypothèses de constance des mortalités naturelle et par pêche sont trop contraignantes : elles ne dépendant pas de l'âge et excluent notamment tout phénomène saisonnier. La fonction de croissance a alors aussi une forme plus générale. Sur chaque intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 1, \dots, n)$, les coefficients de mortalité naturelle et par pêche sont supposés constants et égaux à M_i et F_i. De même pour le facteur de croissance G_i. On parle ainsi de vecteurs mortalité et croissance.

L'évolution des effectifs se traduit de la manière suivante :

$$N(t_r) = N(t_1) = R \qquad \text{(recrutement comme condition initiale)}$$
$$N(t) = N(t_i) \exp^{-(M_i+F_i)(t-t_i)} \qquad \text{pour : } t \in [t_i, t_{i+1}]$$

Si l'âge de première capture est par exemple t_2, alors on a $F_1 = 0$. La croissance est régie par :

$$W(t) = W(t_i) \exp^{G_i(t-t_i)} \qquad \text{pour : } t \in [t_i, t_{i+1}]$$

Généralisation à un stock On voit qu'il est assez simple pour ce modèle de considérer simultanément plusieurs cohortes. Il suffit d'utiliser la discrétisation du temps comme des pseudo-classes d'âge. Ces dernières ont une durée qui n'est pas nécessairement égale à une unité de temps ; mais pour pouvoir superposer les cohortes, les classes d'âge doivent toutes être de durée égale Δt.

On suppose que les taux caractéristiques sont plutôt des fonctions de la classe d'âge, indicée par $_a$, et non du temps. Ainsi on obtient le modèle de stock suivant, pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} N_a(t) &= N_{a-1}(t_i) \exp^{-(M_{a-1}+F_{a-1})(t-t_i)} \qquad \text{avec : } R(t_i) = N_0(t_i) \\ N_m(t) &= N_{m-1}(t_i) \exp^{-(M_{m-1}+F_{m-1})(t-t_i)} + N_m(t_i) \exp^{-(M_m+F_m)(t-t_i)} \end{aligned}$$

Il en est de même pour la croissance, toujours pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$W_a(t) = W_{a-1}(t_i) \exp^{G_{a-1}(t-t_i)}$$

F_{a-1} est la mortalité de la $a^{\text{ème}}$ classe, G_{a-1} son taux de croissance. On fait parfois dépendre F_{a-1} de l'intervalle de temps i : cela permet de faire varier le diagramme d'exploitation au cours du temps.

Remarques : On suppose qu'il y a m classes et qu'une fois dans la dernière, on y reste : c'est la classe des poissons d'âge m et plus (accumulation).

Pour simuler le stock sur l'intervalle de temps $[t_0, t_n]$, il faut non seulement connaître les conditions initiales : $N_a(t_0)$ et $W_a(t_0)$ pour tout $a \in \{1, \ldots, m\}$, mais aussi les conditions aux limites : $R(t_i)$ et $W_0(t_i)$ pour tout temps t_i. On peut simplifier en considérant que la croissance est indépendante de la cohorte ; ainsi $W_0(t_i) = W_0$ est une constante et $W_a(t_0)$ se calcule :

$$\begin{aligned} W_a &= W_a(t_i) \qquad \forall i \,,\, a \\ &= W_0 \exp^{(G_0+\ldots+G_a)\Delta t} \end{aligned}$$

Souvent on choisit de considérer le modèle de Ricker uniquement aux instants t_i, ce qui donne un *modèle en temps discret*. ▮

Calculs de production La capture totale réalisée pendant l'intervalle de temps$i$, soit $[t_i, t_{i+1}]$, est :

$$C_i = \sum_{a=1}^{m} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_{a-1}\, N_a(t)\, dt = \sum_{a=1}^{m} \frac{F_{a-1}}{F_{a-1}+M_{a-1}} \left[N_{a-1}(t_i) - N_a(t_{i+1})\right]$$

La capture pondérale associée est :

$$Y_i = \sum_{a=1}^{m} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_{a-1}\, W_a(t)\, N_a(t)\, dt = \sum_{a=1}^{m} \frac{F_{a-1}}{F_{a-1}+M_{a-1}-G_{a-1}} \left[B_{a-1}(t_i) - B_a(t_{i+1})\right]$$

Remarque : Souvent, on prend à la place d'une croissance exponentielle par morceau, un poids moyen W_{a-1} constant pour chaque classe d'âge a. Ainsi les calculs de capture pondérale sont plus simples :

$$Y_i = \sum_{a=1}^{m} W_{a-1} \frac{F_{a-1}}{Z_{a-1}} [N_{a-1}(t_i) - N_a(t_{i+1})]$$

▮

I.1.3 Les modèles « bio-économiques »

Nous présentons ici quelques modèles couplant la dynamique du stock avec l'économie, des premiers pas à Clark (1976), qui fait encore référence en la matière. Les aspects biologie/écologie et économie interviennent en gestion des pêches, qui est un domaine éminemment pluridisciplinaire. Les modèles bio-économiques intègrent généralement beaucoup de paramètres, vu le nombre de processus qu'ils prennent en compte. Cela les rend plus réalistes, mais d'utilisation et d'application plus difficiles.

Dynamique de l'effort Dans les premiers, Schaefer [43] s'est intéressé à modéliser la *dynamique du pêcheur*. À la suite de l'étude statique à l'équilibre du très classique modèle halieutique, dit de Schaefer (cf. I.1.1), il a couplé la dynamique de ce stock à celle de l'effort de pêche. En reprenant les notations du paragraphe I.1.1, le modèle qu'il obtient et dont il étudie la dynamique est le suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= rX(1 - X/k) - qXE \\ \frac{dE}{dt} &= aE(X - b) \end{aligned}$$

où X est l'abondance du stock, E l'effort de pêche (effort instantané, ou intensité), a et b des paramètres supplémentaires. a correspond au taux de croissance de l'effort, l'interprétation de b, niveau de stock critique, suit.

Interprétation *– L'intensité de pêche évolue selon un critère économique assez simple, fondé sur la théorie du facteur « marginal » qui suppose que le coût de la dernière unité d'effort appliquée est égal à ce qu'elle produit. Ainsi, tant que la pêcherie est rentable, les pêcheurs sont attirés et ils augmentent leur effort. Par suite, la population décroît et la capture par unité d'effort aussi. Jusqu'à ce que finalement la population atteigne un niveau b où les cpue sont si faibles, que les coûts engendrés par une unité d'effort supplémentaire sont supérieurs aux bénéfices que produiraient la capture correspondante. Au-dessous du niveau b, les pêcheurs ont tendance à quitter la pêcherie.*

Smith [46] s'est lui aussi penché sur un tel modèle, dans le cadre d'une étude plus vaste sur l'*économie de la production à partir de ressources naturelles*. Le contenu économique de ce modèle y est approfondi.

Optimum bio-économique Gordon [15] s'est intéressé à la théorie économique de la pêcherie. Il a entre autres introduit la notion d'équilibre bio-économique et d'optimum bio-économique. Ces notions s'appliquent toutes deux à un stock équilibré. L'*équilibre bio-économique* d'une pêcherie non contrôlée est atteint lorsque la population est à l'équilibre et que le gain net est nul ; soit pour cette deuxième condition, lorsque la valeur des débarquements équilibrés L est égale aux coûts totaux engendrés C. L'*optimum bio-économique* est un optimum « social », au sens où il maximise le gain des pêcheurs $L - C$. Ce point correspond toujours à un équilibre biologique, pour la capture et l'effort de pêche.

On peut illustrer cette théorie par un exemple très simple, représenté sur la figure I.5, où :

- les coûts sont proportionnels à l'effort : $C = aE$;
- la valeur d'une unité de capture est constante : $L = bY$;
- l'équilibre biologique du stock est donné par le modèle de Schaefer.

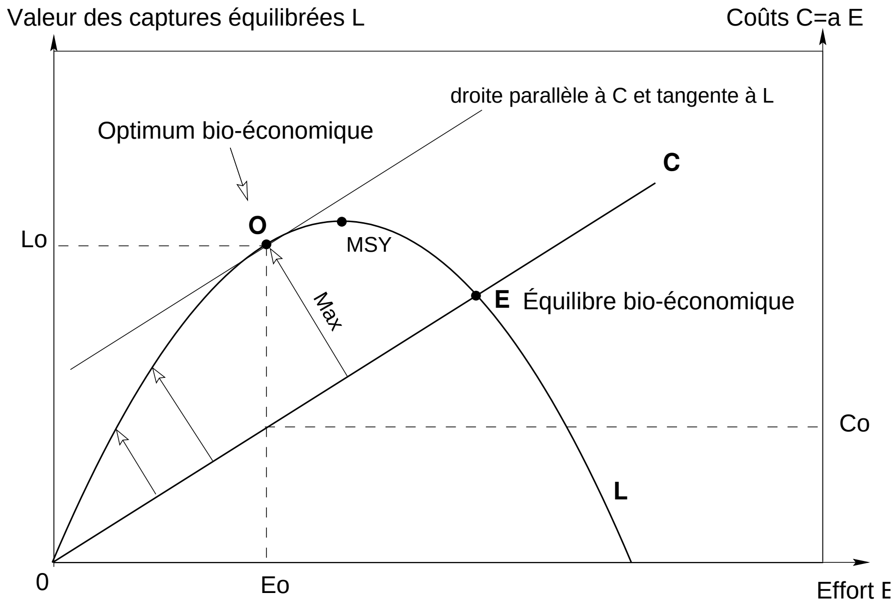


FIG. I.5 *Illustration de l'équilibre et de l'optimum bio-économique selon* GORDON *à partir d'un modèle de stock de* SCHAEFER *à l'équilibre.*

Gestion optimale Dans son ouvrage, CLARK [9] développe et analyse des modèles classiques de pêcheries, ou plus généralement de ressources renouvelables exploitées. Il étudie essentiellement le couplage de ces modèles dynamiques avec des modèles économiques et détermine des *politiques de gestion optimales*. Les critères d'optimisation retenus sont économiques (maximiser les gains, la capture...) et les techniques font appel au contrôle optimal (Principe du Maximum).

I.2 Le recrutement

Les modèles structuraux exposés dans la section précédente,présentent aussi une difficulté majeure : il faut boucler la boucle, exprimer le recrutement. Le recrutement est le terme d'entrée dans la première classe, qui assure le renouvellement du stock au cours du temps. Un modèle ainsi bouclé s'appelle un *modèle auto-régénérant*. S'il existe des données de capture sur les différents stades du stock, permettant d'estimer leur effectif et de caler de tels modèles, elles sont rares sur les stades antérieurs. Il faut néanmoins déterminer le recrutement.

Certains modèles font appel à un recrutement constant ou purement stochastique (un bruit), afin de rendre compte de l'influence des fluctuations environnementales ; le recrutement est alors une entrée exogène. Une autre manière de faire est d'introduire une *relation stock-recrutement*, qui détermine le recrutement à partir de l'effectif ou la biomasse du stock fécond. Tous ces concepts sont résumés dans la figure I.4 et la description des relations classiques de stock-recrutement est l'objet de la première partie de cette section.

Prendre un recrutement constant ou sous forme d'un bruit n'est pas très satisfaisant, car cela nie toute relation entre le stock et sa progéniture. Mais l'utilisation de relations stock-recrutement a aussi ses *limites*, comme le montre la suite de cette section.

I.2.1 Les relations stock-recrutement classiques

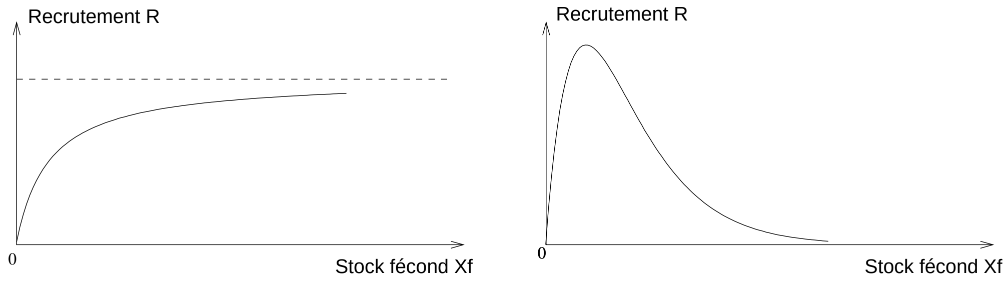
Les deux relations classiques les plus utilisées sont celle de Ricker, et celle de Beverton–Holt. Elle sont représentées dans la figure I.6. Beverton–Holt justifient leur courbe par des hypothèses de compétition pour la nourriture [8], alors que Ricker explique la décroissance de sa relation pour de grands stocks féconds par de la prédation parentale des œufs et juvéniles [38], ou tout au moins de la compétition entre les âges adultes et larvaire.

Selon Ricker [41, 40] :

> « *[...] des deux courbes les plus utilisées, celle de Ricker convient mieux quand le cannibalisme des adultes sur les jeunes constitue un important mécanisme régulateur, ou lorsqu'une forte densité a pour effet d'allonger la période nécessaire au jeune poisson pour traverser une phase de particulière vulnérabilité de taille, ou lorsqu'il y a décalage dans la réponse d'un prédateur ou parasite devant l'abondance des jeunes poissons qu'il consomme, avec surcompensation pour la plus faible densité des espèces proies. La courbe de Beverton–Holt est probablement appropriée, lorsque le niveau d'abondance est freiné par les disponibilités de nourriture ou d'habitat, ou lorsqu'un prédateur est en mesure de régler sur le champ et de façon soutenue son activité prédatrice, en fonction de l'abondance des proies en cause.* »

Élaboration de ces relations stock-recrutement Si l'on se penche plus précisément sur l'élaboration de ces deux relations, on s'aperçoit que le mécanisme est le même : la mortalité des pré-recrutés est modélisée en temps continu, sous la forme d'une équation différentielle. À l'instant 0 a lieu la ponte, à l'instant T le recrutement. Considérant que le nombre d'œufs déposés à l'instant 0 est proportionnel au stock fécond à ce même instant, en intégrant l'équation différentielle entre 0 et T, on obtient le nombre de larves ayant survécu : i.e. le recrutement.

La différence entre les deux relations réside dans les termes de mortalité des pré-recrutés. Les deux modélisations différentes dérivent assez directement des hypothèses de compétition entre les pré-recrutés pour Beverton–Holt et de cannibalisme parental pour Ricker. En



(a) BEVERTON–HOLT $R = \frac{aX_f}{b+X_f}$ (b) RICKER $R = aX_f \exp^{1-X_f/b}$

FIG. I.6 *Relations stock-recrutement classiques.*

plus d'un taux de mortalité linéaire, BEVERTON et HOLT supposent une mortalité densito-dépendante :

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = -\alpha - \beta P \text{ sur } [0, T]$$

tandis que RICKER introduit une mortalité stock-dépendante :

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = -\alpha - \beta S \text{ sur } [0, T]$$

où P représente le nombre de pré-recrutés, S le stock fécond à l'instant 0 et où α et β sont des paramètres.

Cette étape est reprise et décrite pour ces deux modèles stock-recrutement dans l'ouvrage de CLARK [9, pp217–218, 229–230] et de manière un peu plus synthétique par HILBORN & WALTERS [17, pp257–261].

Sur cet intervalle de temps $[0, T]$, le nombre de reproducteurs et éventuellement de prédateurs du stock est implicitement supposé constant, la ponte est ponctuelle. L'élaboration de ces relations stock-recrutement passe donc par l'introduction d'une dynamique continue sur un modèle construit avec un pas de temps plus grand. Cela est plus adapté à un contexte de dynamique de stock discrète. Dans ce cas en effet, sur chaque pas de temps, les variables sont supposées constantes ; en outre les événements prennent place dans le modèle à des instants échantillonnés (i.e. à chaque pas de temps), ce qui est cohérent avec une ponte ponctuelle. Néanmoins l'hypothèse de constance des variables autres que celle décrivant les pré-recrutés, et ce pendant tout le développement de ces derniers, est assez forte.

Il existe d'autres relations stock-recrutement (modèle de DERISO [11], généralisé ensuite par SCHNUTE [44] – modèles dépensatoires [17], etc...), mais les plus «classiques» sont celles de BEVERTON–HOLT et RICKER présentées ci-dessus. De manière générale, ces relations sont très utilisées, car elles sont pratiques et synthétiques. Comme l'on dispose généralement de peu ou pas de données sur les stades précédant le recrutement, elles constituent un outil fort utile pour l'évaluation des stocks [36].

I.2.2 Limites des relations stock-recrutement

Cependant, la confrontation de ces modèles aux données expérimentales est souvent décevante, comme le montrent par exemple les figures I.7 et I.8.

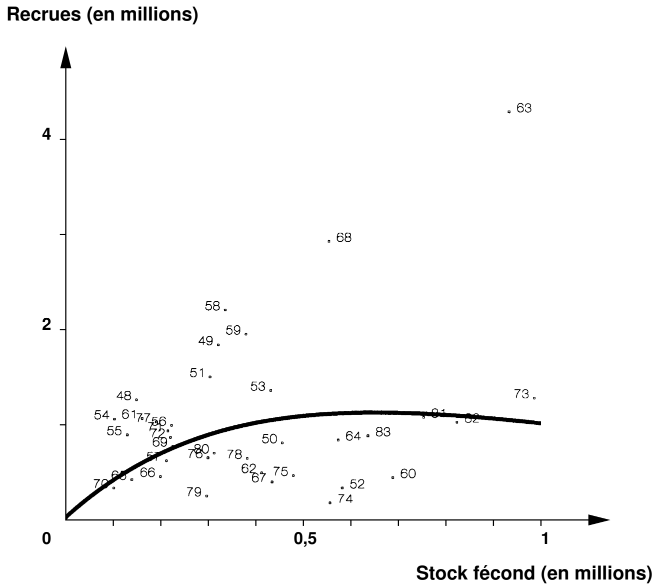


FIG. I.7 *Exemple d'ajustement d'une courbe de* RICKER *sur des données stock-recrutement de saumon rouge de Rivers Inlet (données du Ministère des Pêches et des Océans – Canada). D'après [17, p268].*

Cela peut s'expliquer par l'*effet de l'environnement* sur les pré-recrutés : divers facteurs physiques et biologiques peuvent influer fortement sur l'évolution de ces stades particulièrement sensibles (petite taille...) ; par exemple la température de l'eau, le vent, la présence de nourriture sur les nourriceries... Et ils sont aussi soumis à des interactions avec d'autres espèces vivantes. Il n'est pas possible d'intégrer ou de modéliser ces phénomènes de manière générale. Mais sur un stock particulier, il est parfois possible de mettre en évidence l'influence marquée d'un ou plusieurs facteurs sur le recrutement (voir par exemple les actes du colloque sur les « *Effects of ocean variability on recruitment and an evaluation of parameters used in stock assessment models* », Vancouver 1987 [4], dont est issu l'article synthétique [53] à ce propos).

Il ne faut pas non plus négliger le fait que les données ayant trait au recrutement ne sont pas parfaites : la *précision des mesures* n'est pas très bonne et le nombre d'études sur les stades œufs–larves limité, vu les difficultés (coûts...) qu'elles engendrent.

Sans dire pour autant que ces effets sont prépondérants, ils peuvent néanmoins masquer la relation entre le stock fécond et sa progéniture, ce qui conduit au « paradoxe du stock-recrutement» [42], où empiriquement on n'observe pas de relation. C'est pourquoi dans certains cas, des recrutements exogènes, recrutement constant ou aléatoire, sont utilisés.

Intuitivement il doit pourtant y avoir une relation entre le stock fécond et le recrutement. Le stock fécond revient en première approximation au nombre d'œufs pondus (cf. par exemple [8, 42] pour la relation entre stock et œufs). Mais elle n'est pas directe, car entre ces deux stades il y a une évolution. Exprimer une relation stock-recrutement revient en fait à intégrer l'histoire du développement des œufs en une simple relation.

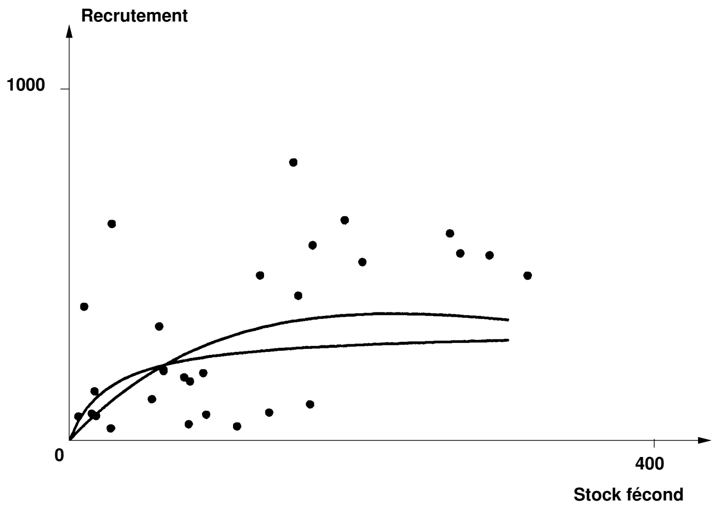


FIG. I.8 *Exemple d'ajustement de courbes de* RICKER *et* BEVERTON–HOLT *sur des données stock-recrutement de hareng d'Islande (données de* JAKOBSSON *1980 [21]). D'après [17, p276].*

C'est pourquoi il peut être intéressant d'intégrer les premiers stades de développement dans les modèles, sous une forme moins résumée que dans les relations stock-recrutement. PAULIK [31] s'était attaché à prendre en compte les premiers stades de développement, sous une forme statique : il combinait des fonctions de production des œufs, mortalité des œufs et mortalité larvaire. L'aspect dynamique était absent de sa modélisation.

Chez FISHER [14], les fonctions de survie des œufs et de croissance des larves sont examinées en détail au cours d'une année, puis sont combinées et introduites dans un modèle dynamique en temps discret (au niveau de la 1ère classe). Mais comme le pas de temps du modèle est d'un an (FISHER s'intéresse principalement à introduire la taille dans son modèle), on perd de vue la dynamique des larves : l'échelle de temps est trop grande.

Dans le chapitre II nous nous sommes attachés à intégrer de manière *dynamique* les pré-recrutés dans un modèle en temps continu, qui a l'avantage de ne pas présenter ce problème d'échelle de temps.

I.3 Formalisation du «système pêche»

Dans cette section, nous allons reprendre la modélisation des stocks halieutiques par l'*approche système* issue de l'automatique. L'automatique est une discipline qui propose une manière pratique d'aborder les systèmes dynamiques, ainsi que des outils de stabilisation, de contrôle... Quelques notions sont présentés ci-dessous, mais on peut se reporter à la littérature pour plus de renseignements : en français le cours d'Andréa Novel & Cohen de Lara [10] et le manuel de Faurre & Robin [13]; en anglais les ouvrages de Beltrami (orienté modélisation) [5] ou de Kwakernaak & Sivan (orienté contrôle) [23].

Les systèmes classiques de l'automatique sont essentiellement des processus chimiques ou physiques industriels : réacteurs chimiques, pilotes automatiques... À partir des lois régissant ces systèmes, on en construit un modèle afin de pouvoir les contrôler (asservissement de température, suivi de trajectoires...). L'application de ce formalisme à des systèmes biologiques n'est pas aussi évidente, comme nous l'avons précisé dans l'introduction de ce chapitre. En effet, il n'existe pas de lois biologiques comme celles qui régissent la physique. Mais il est possible d'appliquer en biologie la théorie des systèmes dynamiques [32].

De plus en halieutique le stock est, outre l'entité dotée d'un sens physique et biologique, une unité de gestion. Néanmoins, la pêche se prête plutôt bien au formalisme entrée/sortie de l'automatique, comme le montrent la deuxième partie de cette section ainsi que la section suivante I.4.

I.3.1 Quelques notions d'automatique

L'automatique peut être définie comme la science qui étudie le fonctionnement des systèmes. Elle comprend la théorie du contrôle et des systèmes dynamiques [10].

Un système au sens automatique est isolé du monde extérieur. Les éléments qui le constituent sont organisés, interagissent entre eux et évoluent de façon dynamique. On le représente usuellement par un schéma-bloc, comme le montre la figure I.9. Un système est décrit à l'aide de variables qui traduisent son organisation. Ces variables sont les entrées, les sorties et, dans l'approche d'état que nous employons tout au long de ce mémoire, les variables d'état (appelées aussi variables internes).

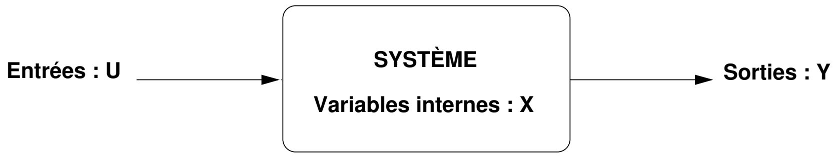


FIG. I.9 *Schéma-bloc d'un système automatique.*

- Les *variables internes* (= vecteur X) caractérisent l'état du système; certaines peuvent ne pas être accessibles et l'on doit se contenter de les estimer.
- Les *entrées* (= vecteur U) sont, de manière générale, maîtrisées ou connues et sont utilisées pour contrôler le système. Sinon, on les appelle plutôt des perturbations (bruits de mesure,...).
- Les *sorties* (= vecteur Y) sont mesurées. Combinées avec la connaissance des entrées, elles permettent de reconstituer tout ou une partie de l'état du système.

Le modèle issu d'un système d'état a la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = f(X(t), U(t), t) \\ Y(t) = g(X(t), U(t), t) \end{cases}$$

☞ On note souvent $dX(t)/dt = \dot{X}(t)$. ▮

À partir de ce modèle générique, on peut distinguer plusieurs phases dans l'étude du système : la modélisation et l'analyse, l'identification éventuelle, puis le contrôle. On peut se reporter à la figure I.10 pour la description de ces différents cas d'étude.

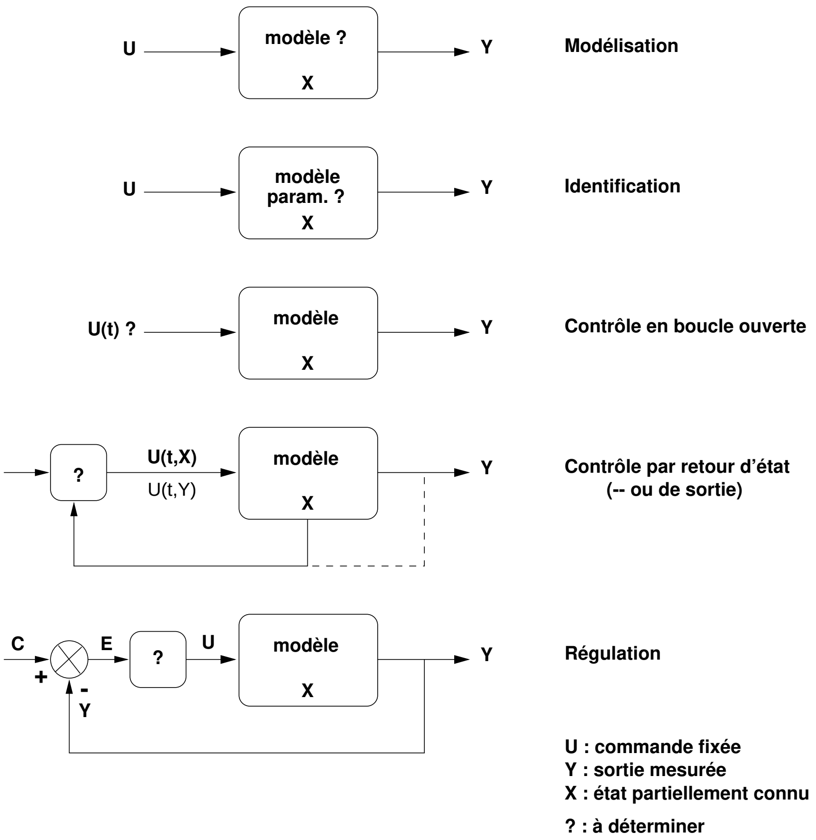


FIG. I.10 *Représentation de différents cas d'étude d'un système.*

➤ La *modélisation* consiste à donner la forme des fonctions f et g décrivant au mieux l'objet considéré. On parle de modèle de connaissance lorsqu'il est établi à partir de lois physiques et qu'il est proche de la réalité. Mais on considère souvent un modèle de représentation, simplifié mais qui permet d'étudier plus facilement le système.

➤ L'*analyse* consiste à étudier les propriétés du système ainsi modélisé. Essentiellement la stabilité autour du point de fonctionnement, car c'est un facteur très important dans toute étude industrielle.

➤ Les fonctions f et g comportent des paramètres ; l'*identification* permet de déterminer les valeurs de ces paramètres.

➤ Ensuite il est possible de *contrôler* le système, i.e. d'élaborer une loi d'entrée sur f, de manière à obtenir le comportement voulu. Si le contrôle dépend des autres variables du système, états ou sorties, on dit qu'il est en boucle fermée ou *feedback* ; il a alors la forme suivante :

$$U = U(t, X) \qquad \text{ou} \qquad U = U(t, Y)$$

Sinon il s'agit d'un contrôle en boucle ouverte :

$$U = U(t)$$

Il peut y avoir plusieurs façons pour atteindre ce but ; le *contrôle optimal* consiste à chercher la « meilleure » façon, au sens d'un critère donné, i.e. celle qui optimise ce critère.

S'il y a une *consigne*, c.-à-d. si l'on veut que la sortie suive un signal dit de consigne, on parle plutôt de *régulation*. Il s'agit alors de déterminer un régulateur qui, à partir de l'erreur $E = Y - C$ entre la consigne et la sortie, synthétise la loi d'entrée U de manière à ce que la sortie du système suive la consigne C.

I.3.2 Application au « système pêche »

a) Système stock exploité

Le système que l'on considère tout d'abord décrit le comportement d'un stock de poissons exploité. Pour décrire l'état du stock, on peut choisir comme variable l'abondance du stock ou sa biomasse X ; X est un vecteur si le stock est structuré en âge ou en stades.

L'*entrée naturelle* sur ce système est l'effort de pêche : c'est ce qui est appliqué au stock et il est plus ou moins maîtrisable. En d'autres termes, l'effort est une commande (i.e. un contrôle) sur le système. Il en résulte une capture qui constitue la sortie du système (cf. figure I.11).

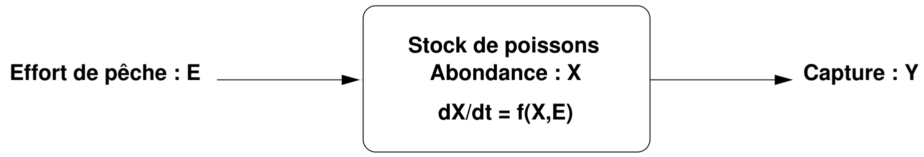


FIG. I.11 *Schéma d'un système pêche simple : un stock exploité.*

Parfois, on trouve dans la littérature [9, 20] que la capture est prise comme variable de contrôle (entrée) sur le stock. Formellement, cela ne pose pas réellement de problèmes ; pour $Y = qEX$ par exemple, où q est la capturabilité, on peut prendre :

$$dX/dt = \phi(X, Y) = f(X, \frac{Y}{qX})$$

sauf si le stock est épuisé ou très faible, car alors il ne sera pas possible « d'appliquer » sur le stock une capture non nulle.

Néanmoins les pêcheurs n'appliquent pas une valeur de capture sur le stock, mais bien un effort. Et ce même dans le cas le moins favorable où la capture par unité d'effort est relativement constante (e.g. unité d'effort = trait de chalut au-dessus d'un banc de poissons tel que : capture = capacité du filet) ; en effet, il suffit que le stock perde, même partiellement, son accessibilité pour qu'à la même unité d'effort corresponde une capture plus faible. La variable de sortie est un produit du stock commandé, c'est un terme que l'on observe et mesure. La capture est donc clairement une sortie du système pêche. On pourrait en déduire d'autres, comme par exemple la capture par unité d'effort (cpue), ou si l'on connaît la loi de formation des prix, les revenus des pêcheurs...

EXEMPLE :
1ère étape : modélisation – analyse
On choisit le modèle de Schaefer pour déterminer les fonctions f et g.

$$\begin{cases} \dot{X} = rX(1 - \frac{X}{k}) - qEX \\ Y = qEX \end{cases}$$

On a vu que ce modèle assure la positivité des variables X, abondance du stock, et E, effort de pêche ; en outre il possède deux points d'équilibre, zéro qui est instable et X^* qui est stable :

$$X^* = k - E^* qk/r$$

(cf. section I.1.1)
2ème étape : identification
On identifie les paramètres r, k et q à partir par exemple de données efforts/captures issues de relevés de pêche (cf. chapitre V).
3ème étape : contrôle
Cet exemple illustre le contrôle optimal. On choisit de maximiser la capture sur un horizon de 10 ans. Il faudrait poser le problème plus précisément avec ses contraintes pour se lancer dans une résolution précise. Mais cela consiste à pêcher à un niveau soutenable pendant les premiers temps, puis à la fin, à augmenter l'effort au maximum pour pêcher tout ce qu'il reste. On peut se reporter à l'ouvrage de CLARK [9] pour plus de détails. ∎

b) Système pêcheurs–stock

On peut considérer un modèle de pêcherie plus complet où l'on représente à la fois la dynamique du stock et celle des pêcheurs, comme SCHAEFER [43] par exemple l'avait réalisé (cf. I.1.3). Mais par rapport à ce modèle, on rajoute une consigne qui provient d'instances gouvernementales par exemple.

Nous allons représenter les pêcheurs par leur effort global E et le stock de poissons par son abondance X. Le système global « pêcheurs–stock » est représenté dans la figure I.12. On peut le décomposer en deux sous-systèmes.

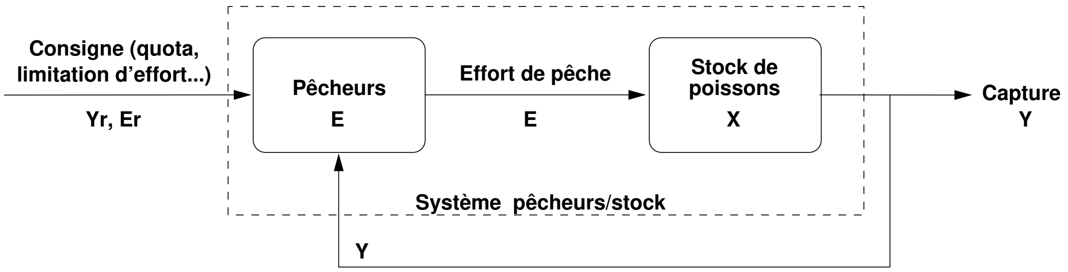


FIG. I.12 *Schéma d'un système halieutique « pêcheurs–stock ».*

Sur le premier sous-système « pêcheurs », il y a :
1° deux entrées, la consigne quotas Y_r (ou limitation d'effort E_r) et la capture Y ;
2° une sortie égale à la variable d'état, l'effort de pêche E.

Sur le second sous-système «stock», il y a :

1° une entrée, l'effort E ;
2° une sortie, la capture Y ;
3° une variable d'état,l'abondance du stock X.

➥ L'association de ces deux sous-systèmes donne un système global bouclé «pêcherie». Si l'on analyse ce système, il y a :

1° une entrée, la consigne quotas Y_r (ou limitation d'effort E_r) ;
2° une sortie, la capture Y ;
3° deux variables d'état, l'effort de pêche E et l'abondance du stock X ;
4° un bouclage de la sortie sur l'entrée.

EXEMPLE : On peut modéliser ce système de la manière suivante : on choisit un modèle de SCHAEFER pour le stock et l'on distingue trois composantes de la dynamique de l'effort, chacune pondérée par un poids l_i :

- La première correspond à un critère de rentabilité et est similaire à celle avancée par SCHAEFER [43] : tant que les revenus des captures (pY) sont supérieurs aux coûts (cE) engendrés par l'effort correspondant, l'effort croît ; sinon, il diminue.
- Les deux autres composantes correspondent aux limitations. La deuxième tend à faire augmenter l'effort si les quotas Y_r ne sont pas atteints, et l'inverse en cas de dépassement. Et la troisième tend aussi à augmenter l'effort tant qu'il est inférieur à sa valeur limite recommandée E_r, et inversement s'il la dépasse.

Le modèle ainsi obtenu est :

$$\begin{cases} \dot{E} = l_1(pY - cE) + l_2(Y_r - Y) + l_3(E_r - E) \\ \dot{X} = rX\left(1 - \dfrac{X}{k}\right) - qEX \\ Y = qEX \end{cases}$$

En jouant sur les coefficients l_i, on obtient divers comportements du pêcheur vis-à-vis dune mesure de gestion. Zéro n'est généralement plus un équilibre du système (sauf si $l_2 = l_3 = 0$, dans ce cas voir [43]) et E pour des stocks très faibles. Une étude plus approfondie serait nécessaire et l'on pourrait contrôler ce système en ajustant les pondérations l_i et les consignes E_r, Y_r selon le type de comportement recherché. ∎

c) Commentaires

Les deux types de système sont repris dans la suite du document, pour différentes applications. Dans la section IV.3 par exemple, pour une régulation de la pêche par une méthode de domaines invariants.

Les modèles halieutiques classiques représentent généralement un simple « système stock exploité». C'est le cas de tous les modèles présentés dans les sectionsI.1.1 et I.1.2. Les modèles bio-économiques, dont la section I.1.3 donne quelques exemples, en introduisant des contraintes économiques sur la pêche, sont souvent proches du «système pêcheurs–stock» décrit ci-dessus. La plupart de ces modèles n'ont pas été développés récemment, mais une *tendance actuelle* en halieutique consiste à intégrer des *stratégies de gestion* dans la modélisation ; ce qui implique une formulation explicite ou non du comportement des pêcheurs. La section suivante en est un exemple.

I.4 Un système de pêcheries

Nous présentons ci-dessous un modèle de pêcherie plus complet, avec des stratégies de pêche, qui est issu d'un groupe de travail auquel nous avons participé à Dublin en 1994. Ce modèle rejoint les modèles bio-économiques au sens où il intègre une stratégie du pêcheur qui cherche à maximiser sa capture sous des contraintes de quotas ; à terme la partie économique devrait être affinée. Mais sa spécificité est qu'il veut prendre en compte un cycle complet, de l'élaboration de la mesure de gestion (quotas) aux captures ; cette partie néanmoins n'est pas encore implémentée.

Après l'exposé de certains résultats issus de la réunion, une proposition personnelle est détaillée et mise sous forme d'un système automatique.

I.4.1 Exposé du modèle initial avec stratégies de pêche

En février 1994 s'est déroulée une réunion sur la *Modélisation de stratégies de gestion de pêcheries* [18], coordonnée par J. W. Horwood (MAFF, Lowestoft, UK), réunissant des halieutes de divers pays (essentiellement Europe Occidentale) et à laquelle j'ai pris part. Les objectifs scientifiques de cette réunion étaient de :

1. prendre connaissance des travaux issus d'autres pêcheries sur la modélisation de systèmes de gestion ;
2. déterminer les modèles de dynamique des populations et pêcheries en Mer du Nord et Méditerranée ;
3. déterminer les sorties caractéristiques de ces études afin de pouvoir comparer les différentes stratégies de gestion.

En accord avec les propositions 663/664 de la Communauté Européenne [2], qui préconisent et proposent certaines applications spécifiques de nouveaux outils [1] tels :

- la gestion par l'effort de pêche,
- stratégies et quotas sur plusieurs années,
- stratégies intégrant des modèles plurispécifiques ;

il a été décidé de développer des études dans un contexte plurispécifique avec des quotas sur plusieurs années.

Pour les points 1 et 3, on peut se reporter au compte-rendu [18]. À propos du point 2, les spécificités de pêcheries méditerranéennes (limitations de l'effort, pas de quotas, grandes variétés de pêcheries...) ont été abordées, mais ni approfondies ni véritablement implémentées lors de cette réunion. La réalisation principale est un protocole de gestion de la Mer du Nord, n'intégrant pas encore les processus de décision pour les mesures de gestion.

Protocole de gestion de la Mer du Nord

Il s'agit là de mettre en place un modèle de simulation, prenant en compte plusieurs espèces, plusieurs flottilles agissant sur les stocks de manière différente, une mesure de gestion par quotas étant donnée.

Modélisation des stocks exploités Trois espèces de gadidés sont prises en considération : la morue, l'églefin et le merlan. La dynamique de chacun de ces stocks est traduite par un modèle de Ricker (poids constant par intervalle, cf. section I.1.2), muni d'une relation stock-recrutement de Ricker (cf. section I.2.1).

$$N(i,a,y+1) = N(i,a-1,y)\exp^{-M(i,a-1,y)-F(i,a-1,y)}$$
$$N(i,m,y+1) = N(i,m-1,y)\exp^{-M(i,m-1,y)-F(i,m-1,y)} + N(i,m,y)\exp^{-M(i,m,y)-F(i,m,y)}$$

avec : $N(i,0,y) = a_i N_f(i,y)\exp^{1-N_f(i,y)/b_i}$

$N_r(i,y) = \sum_{a=1}^{m} \phi(i,a) N(i,a,y)$

où :

N	: effectif,	a, b	: coefficients de recrutement,
N_r	: stock fécond,	i	: espèce,
M	: mortalité naturelle,	a	: âge (de 0 à m),
F	: mortalité par pêche,	y	: année,
ϕ	: proportion féconde,	f	: flottille.

En outre divers paramètres (mortalité par pêche, mortalité naturelle, poids individuels) sont stochastiques, pour traduire les *fluctuations annuelles* et des interactions biologiques. Ils sont construits de la manière suivante : un bruit additif ou multiplicatif vient perturber les variables déterminées de manière empirique. Soit pour un paramètre P quelconque :

$$P(f,i,a,y) = P_{\text{empirique}}(f,i,a) \overset{+}{\times} \text{bruit } \varepsilon$$

EXEMPLE : Mortalité naturelle

$$M(i,a,y) = \begin{cases} M_{\text{emp.}}(i,a)(1+\varepsilon_1(i)) & \text{si } y = 1993 \\ \chi M(i,a,y-1) + (1-\chi) M_{\text{emp.}}(i,a)(1+\varepsilon_2(i,y)+\varepsilon_3(i,a,y)) & \text{si } y > 1993 \end{cases}$$

où les bruits ε suivent tous trois la loi uniforme $U[-0,1;0,1]$. ❚

Les *conditions initiales* $N(i,a,0)$ d'effectifs pour les classes d'âge a des espèces i sont déterminées à partir de résultats de VPA (Virtual Population Analysis, cf. glossaire en annexe A) [35, 24] et/ou de campagnes scientifiques. Les *coefficients* de mortalité naturelle, de maturité et les poids individuels sont déterminés empiriquement (source CIEM [1]) pour chaque âge, espèce et flottille. De même pour la sélectivité qui intervient pour relier la mortalité par pêche à l'effort :

$$F(f,i,a,y) = S(f,i,a,y)\, q(f,i)\, [\,(1+x)\, E(f,y)\,] \tag{I.1}$$

avec :

S	: sélectivité,
q	: capturabilité,
x	: fraction non déclarée,
E	: effort de pêche.

x sert à exprimer le fait que les efforts déclarés par les pêcheurs sont souvent sous-estimés. Au niveau des captures, non seulement il peut y avoir un *biais* dans la déclaration des captures débarquées, mais une partie des captures en mer est aussi rejetée. Il faut donc prendre en compte plusieurs types de captures, qui suivent néanmoins la même forme d'équation. Nous ne ferons pas cette distinction ici, de même que nous ne faisons pas apparaître les bruits ; pour plus de précisions, se reporter au compte-rendu.

La façon dont intervient l'effort de pêche dans l'équation (I.1) permet d'avoir des *interactions techniques* entre les espèces : l'effort ne dépend pas de i, il est donc appliqué sur les trois stocks à la fois, d'où une flottille pêche simultanément les différentes espèces. Les *interactions biologiques* ne se traduisent pas par des termes de prédation au niveau du modèle de stock dynamique, mais par des variables stochastiques supplémentaires intégrées dans le coefficient de mortalité naturelle.

1. CIEM : Conseil International pour l'Exploration de la Mer

Impact des mesures de gestion par quotas La capture pondérale réalisée par la flotte f sur l'espèce i pendant l'année y est :

$$C(f,i,y) = \sum_{a=0}^{m_i} W(f,i,a,y)\, F(f,i,a,y)\, N(i,a,y)\, \frac{1-\exp^{-M(i,a,y)-F(i,a,y)}}{M(i,a,y)+F(i,a,y)} \tag{I.2}$$

avec : $F(i,a,y) = \sum_f F(f,i,a,y)$,
$N(i,a,y)$ effectif de la classe d'âge a de l'espèce i l'année y.

Pour limiter ces captures, des quotas Q sont alloués, par flottille, espèce et année (les TAC : Total Allowable Catches, sont les quotas par espèce et année) . L'élaboration de ces quotas n'a pas été décrite lors de cette réunion et il ne s'agit pas pour le moment de gestion pluriannuelle. La *procédure de gestion* suit néanmoins le schéma suivant.

Chaque année :
A- On détermine les quotas : $Q(f,i,y)$.
B- Les valeurs de l'effort de pêche $E(f,y)$ de chaque flottille sont calculées de l'une des manières suivantes :

① $E(f,y)$ tels que : $\forall f \ \min_i [\,C(f,i,y) - Q(f,i,y)\,] = 0$.

***Interprétation** – Cela signifie que chaque flottille pêche au moins le quota qui lui est alloué pour chaque espèce.*

② $E(f,y)$ minimisent : $\sum_f \sum_i [\,C(f,i,y) - Q(f,i,y)\,]^2$

***Interprétation** – Dans ce cas, les captures sont les plus près possible des quotas, au sens des moindres carrés ; i.e. la somme des carrés des écarts entre les captures et les quotas associés, pour chaque espèce et chaque flottille, est minimale.*

I.4.2 Une nouvelle proposition

Dans le modèle ci-dessus, le lien entre la mortalité par pêche et l'effort de pêche n'est pas très clair, au sens où il ne permet pas de séparer ce qui vient du pêcheur et ce qui vient du stock. Il est vrai qu'en l'état, il n'y a pas de véritable dynamique de l'effort. Néanmoins pour développer des stratégies de pêche plus complexes, il est nécessaire de bien isoler ce que les pêcheurs maîtrisent et ce qui caractérise le poisson.

a) De l'effort à la mortalité par pêche : capturabilité et sélectivité

L'effort que l'on considère est un *effort de pêche nominal*, pris du point de vue du pêcheur : c'est l'ensemble des moyens humains et techniques déployés en une unité de temps (une année). Il ne dépend donc que de la flottille f et de l'année y.

⇨ effort de pêche : $E(f,y)$

On fait l'hypothèse que la *capturabilité* est une caractéristique du poisson. Par rapport à la définition de Laurec & Le Guen [25], elle regroupe donc l'accessibilité (présence sur les lieux de pêche) et la vulnérabilité propre du poisson ; cette dernière est liée au comportement du poisson face à un engin quelconque, comme par exemple sa capacité à fuir et trouver un refuge (cf. glossaire en annexe A). La capturabilité dépend de l'espèce i, de l'âge a du poisson et éventuellement de l'année y. C'est sa probabilité d'être capturé par une unité d'effort effectif sans interactions d'autres espèces ou groupes d'âge.

⇨ capturabilité : $q(i, a, y)$

Pour relier la *mortalité par pêche* F à l'effort nominal, il faut tout d'abord pondérer ce dernier par deux coefficients :

- l'efficience de la flottille, qui traduit l'impact de la stratégie ou de la tactique de pêche ;
- l'efficacité de l'engin choisi, soit la « partie pêcheur » de la vulnérabilité selon LAUREC & LE GUEN.

Ces deux termes sont caractéristiques de la flottille face à sa cible. Mais comme on considère plusieurs stocks structurés, il faut aussi tenir compte de l'espèce j et de la taille l de la cible. On définit ainsi la *sélectivité* (ou efficacité sélective) de la flottille, qui est un taux de correction (compris entre 0 et 1) de l'effort nominal, défini chaque année pour chaque « cible espèce/âge » des flottilles.

⇨ sélectivité : $S(f, j, l, y) \ \in [0, 1]$

Lorsque qu'une flottille cible une espèce et une taille données, elle pêche aussi d'autres espèces et des individus d'autres groupes d'âge, et ce quelle que soit la flottille. Cela correspond aux *interactions techniques* entre les stocks décrites précédemment. On peut modéliser ces interactions sous forme de taux ou *proportions de captures et âges accessoires*, propres à chaque flottille et pouvant varier au cours des années.

⇨ proportion d'espèce i capturée lorsque l'on cible l'espèce j : $d_{ij}(f, y)$
proportion d'âge a capturée lorsque l'on cible la taille l de l'espèce i : $k_{al}(f, y, i)$

REMARQUES : Les relations taille/âge dépendent de l'espèce considérée, c'est pour cela que la proportion k_{al} est fonction du stock i. Par contre, on considère que les proportions d'espèces accessoires capturées sont indépendantes de la taille cible.

On considère que k_{al} et d_{ij} ne sont pas maîtrisés par les pêcheurs : d_{ij} est plus ou moins un indice de mélange des stocks, alors k_{al} dépend essentiellement de la croissance du poisson. Ils sont donc influencés par l'état du stock. Par contre, les pêcheurs peuvent modifier leur sélectivité, selon les stocks qu'ils ciblent et l'engin qu'ils utilisent. ▮

On a ainsi fait le lien entre l'effort nominal et la *mortalité par pêche* $F(f, i, a, y)$ qui s'exprime ainsi :

$$F(f, i, a, y) = q(i, a, y)\, E(f, y) \sum_j \sum_l S(f, j, l, y)\, d_{ij}(f, y)\, k_{al}(f, i, y) \tag{I.3}$$

Par rapport à l'équation originale (I.1), les termes propres au stock : capturabilité q, et les termes maîtrisés par les pêcheurs : effort E et sélectivité S, sont bien séparés. De même les interactions entre les âges (k) et les stocks (d) par rapport à une cible espèce/taille sont clairement mis en évidence.

On peut simplifier ce modèle avec les hypothèses suivantes :

- La capturabilité q ne varie pas au cours du temps et est donc indépendante de l'année y.
- Chaque flottille ne recherche qu'une seule cible : le profil espèces/tailles est inclus dans la définition de la sélectivité, qui caractérise la pêcherie ; il peut néanmoins varier au cours du temps. Dans ce cas, le terme de métier est plus adapté que le terme de flottille.

L'équation (I.3) devient alors :

$$F(f,i,a,y) = q(i,a)\, d_i(f,y)\, k_a(f,i,y)\, E(f,y)\, S(f,y) \tag{I.4}$$

où : $d_i(f,y)$: proportion d'espèce i capturée par la flottille f l'année y
$k_a(f,i,y)$: proportion d'âge a de l'espèce i pêchée par la flottille f l'année y

b) Intégration de mesures de gestion

Comme précédemment on ne se penche pas sur l'élaboration des mesures de gestion, mais plutôt sur leur impact sur les pêcheurs. On choisit une *gestion par quotas pluriannuels* attribués par flottille et espèce. Outre cet aspect pluriannuel, l'originalité de cette proposition est qu'elle intègre une *dynamique de l'effort*. Par exemple, si l'on décide de quotas sur 5 ans, on obtient :

$$\begin{aligned} E(f,y+1) = E(f,y) &+ \phi(E(f,y)\,,\, C(f,i,y)\,,\, E(f,y-1)\,,\, C(f,i,y-1), \dots) \\ &+ \sum_i \psi_i(Q(f,i,y+1) - Q(f,i,y)\,,\, Q(f,i,y) - C(f,i,y)) \end{aligned} \tag{I.5}$$

ϕ traduit la dynamique propre de la flottille : elle tient compte des contraintes économiques de la flottille, de la disparition de bateaux, de l'expérience des années antérieures... On peut s'inspirer en première approche du modèle de SCHAEFER [43], qui introduit un critère très simple de rentabilité.

ψ_i traduit l'application de la consigne quotas pour l'espèce i. C'est une fonction croissante de chacune de ses variables et elle combine les deux effets suivants : elle augmente lorsque le quota de l'année $y+1$ est plus important que celui de y, ou lorsque les captures ont été plus faibles que les quotas attribués l'année y. Lorsque les quotas n'ont pas été modifiés l'année $y+1$ et que les captures ont exactement consommé les quotas de l'année y, ψ_i est nulle : $\psi_i(0,0) = 0$.

On pourrait de la même manière modifier la sélectivité de manière adaptative, en faisant évoluer la cible des flottilles selon les captures réalisées... Il faudrait néanmoins une réflexion plus approfondie sur le sujet.

c) Formalisation du système complet

Précédemment, nous avons étudié la dynamique des stocks, des pêcheurs, le lien entre les deux ainsi que l'impact des mesures de gestion (quotas) sur les pêcheurs. Par rapport au modèle complet envisagé, il manque donc toute la phase d'élaboration des quotas. Elle est composée des étapes suivantes :

- Tout d'abord, l'*estimation* des effectifs des classes d'âge de chaque stock est faite, à partir des captures et éventuellement des efforts observés. Observés donc entachés d'erreur, d'où l'introduction d'une correction entre captures effectives et observées. Cette erreur inclut à la fois la justesse et la précision des mesures (et les rejets éventuels). On peut utiliser la VPA comme modèle d'évaluation (cf. annexe A).

– Certaines *règles de gestion* sont ensuite appliquées afin d'élaborer les quotas pour chaque espèce pour les r années à venir. Pour cela, il faut clairement définir les objectifs de gestion : maintenir les stocks au-dessus d'un niveau minimal par exemple, sans trop réduire les efforts. L'estimation des tailles des stocks, ainsi que des captures et efforts observés est aussi fort utile. Elle permet de prévoir dans d'assez bonnes conditions l'impact des mesures de gestion à venir.
– Enfin, il faut *répartir* les quotas par espèce entre les diverses flottilles. Cette dernière étape peut être qualifiée de politique. Elle n'est pas du ressort des scientifiques, bien qu'il y ait des instances où on demande leur avis sur cela.

Le schéma de la figure I.13 résume ce cycle complet, en mettant en évidence les interactions entre les diverses « boîtes » : stocks, pêcheurs, gestion... Notons qu'il serait encore valable pour une gestion par l'effort de pêche.

Description du schéma fonctionnel de pêcheries

La figure I.13 illustre le fonctionnement du système de pêcheries avec stratégies de gestion décrit ci-dessus. On a choisi de représenter **deux flottilles**, f_1 et f_2, et **deux stocks** i_1 et i_2. Chaque flottille pêche les deux espèces, soit en tant que stock cible, soit sous forme de captures accessoires. On peut par exemple considérer que f_1 a pour cible i_1 mais récolte aussi un peu de i_2, tandis que f_2 exploite les deux stocks i_1 et i_2. Chaque flottille est en outre soumise à des **quotas sur les captures**, élaborés de selon des **stratégies de gestion**.

Les *stratégies de gestion* sont définies à l'avance pour r années, à partir d'observations sur les r années écoulées. Les grandeurs observées sont les captures par flottille, espèce, âge et année, ainsi que les efforts par flottille et année. Elles sont entachées d'erreur, car d'une part ce ne sont pas des mesures exactes, d'autre part on doit tenir compte de l'échantillonnage, des captures non débarquées (rejet, vente en mer), etc. Les étapes d'élaboration des quotas sont exposées dans le paragraphe c). La répartition par flottille, décision « POLITIQUE », n'est pas évoquée.

Une période de gestion dure r années, pendant lesquelles pêcheurs et stocks interagissent : l'exploitation et les populations évoluent d'une année sur l'autre, tandis que la gestion consiste uniquement à relever les données de capture et d'effort. Il serait possible de prévoir un réajustement des mesures de gestion d'une année sur l'autre, pour qu'elles demeurent adaptées à la situation de la pêcherie.

Les *interactions pêcheurs–stocks* sont décrites en détail dans le paragraphe a). La sélectivité étant plus ou moins contrôlable par le pêcheur, elle est intégrée dans la boîte DYNAMIQUE DES PÊCHEURS. La dynamique de l'effort est abordée dans le paragraphe b).

En revanche les coefficients d et k constituent la réponse des stocks aux cibles (espèces et tailles) des pêcheurs, c'est pourquoi ils sont intégrés dans la boîte DYNAMIQUE DES STOCKS. Le coefficient d donne la proportion d'espèces secondaires capturées par les flottilles ; c'est plus ou moins un indice de mélange des deux stocks, d'où l'influence éventuelle de l'abondance de chacun des stocks sur ce coefficient.

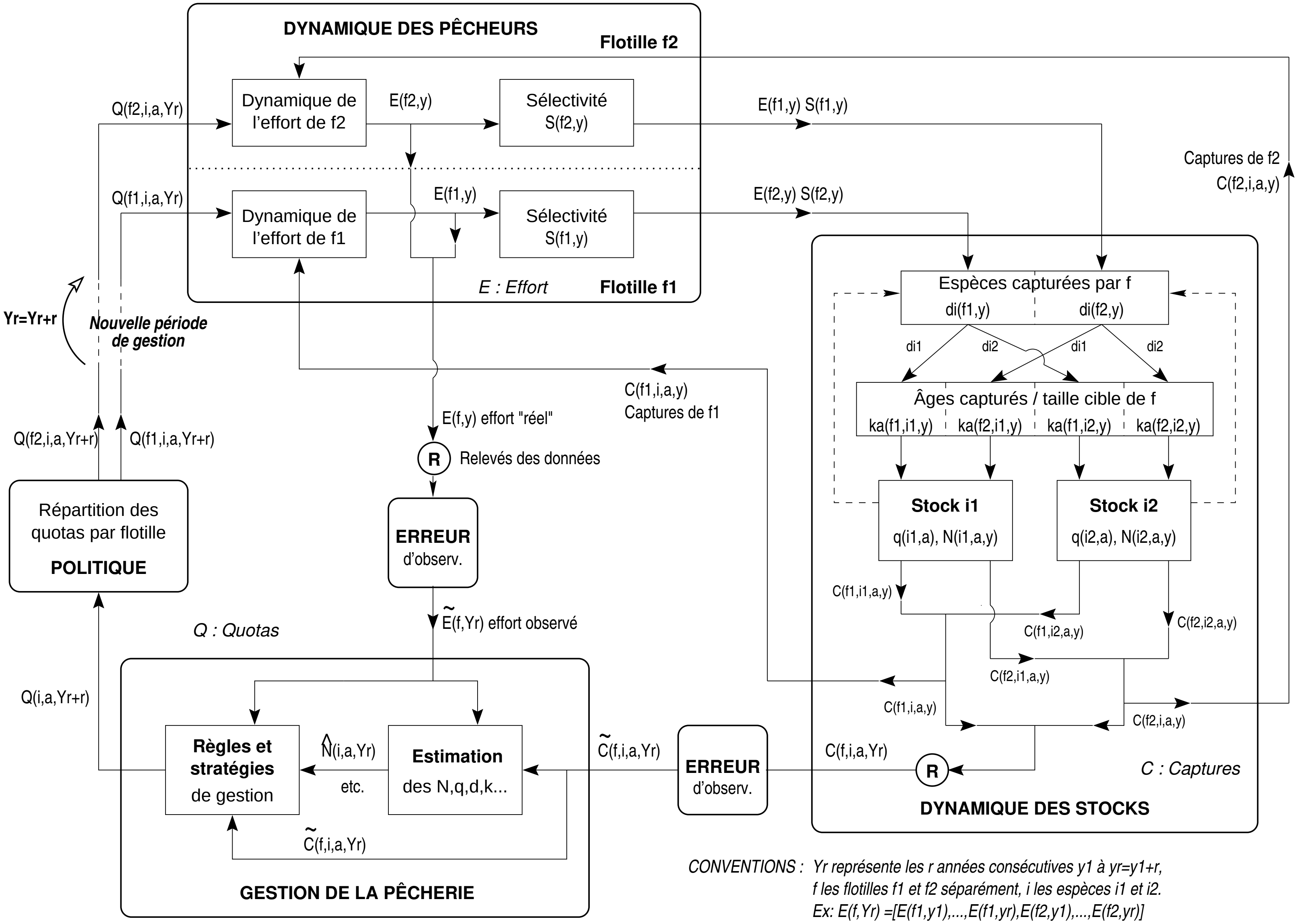


FIG. I.13 *Schéma fonctionnel d'un système halieutique avec stratégies de gestion.*

CONVENTIONS : Sur le schéma, Yr représente les r années consécutives d'une période de gestion : $Yr = (y_1, y_2, \ldots, y_r = y_1 + r)$. De même f représente les flottilles f_1 et f_2, i les espèces i_1 et i_2. Par exemple, $C(f, i, a, Yr)$ comprend les captures de chaque flottille, par espèce et par classe d'âge, pour les r années de la période de gestion considérée.

Un arc débouchant de deux flèches ou plus contient l'information de chacune des flèches d'origine. Conformément aux règles classiques en automatique, plusieurs flèches partant d'un même point contiennent la même information que la flèche origine.

Une variable quelconque avec tilde (e.g. $\tilde{X}$) est une variable observée et entachée d'erreur, à cause par exemple d'un échantillonnage. Une variable avec chapeau (e.g. $\hat{X}$) est une variable estimée. ▌

I.4.3 Comparaison des deux modélisations

Dans les deux cas présentés ci-dessus, les stratégies de gestion que l'on peut explorer sont un peu limitées, du fait même de la modélisation. Le modèle de RICKER discret permet pas d'élaborer des stratégies saisonnières ou spatiales : le pas de temps est l'année, tous les stocks sont accessibles simultanément. On pourrait éventuellement prendre un pas de temps plus petit afin de prendre en compte certains phénomènes saisonniers.

Dans le modèle initial, les «flottilles» considérées sont : consommation humaine, industrielle et rejet. Les sélectivités sont prises comme paramètres du modèle et ne sont pas contrôlées par les pêcheurs. On ne peut donc pas agir de manière sélective sur certains engins mais uniquement sur l'effort global de chaque flottille (cf. équation (I.1)). Les flottilles ne peuvent pas évoluer ; mis à part la parie dynamique des stocks, le modèle est relativement figé, pas assez adaptatif.

Avec le modèle modifié, on peut plus facilement implémenter un changement d'engin ou de cible : le profil espèce/taille caractéristique de f est modifié, ainsi donc que sa sélectivité et les proportions $d_i(f, y)$ et $k_{al}(f, i, y)$. Un changement de tactique peut aussi augmenter l'efficience de la flottille et donc sa sélectivité... En séparant bien ce qui est maîtrisé par le pêcheur (E et S) de ce qui ne l'est pas (q, k et d), ces diverses stratégies sont plus faciles à mettre en œuvre (cf. équation (I.4)). En outre, intégrer une dynamique du pêcheur est plus réaliste, vu que leur comportement est dicté non seulement par les quotas imposés, mais aussi par leurs propres contraintes économiques.

I.4.4 Conclusion et perspectives

Ce type de proposition présente un intérêt certain en halieutique, car il constitue un *outil d'aide à la gestion*. Il permet en effet d'explorer diverses stratégies et de mettre en évidence leurs principales faiblesses et leurs avantages respectifs. Il permet aussi d'étudier et de sélectionner, parmi les différentes composantes intervenant dans la pêcherie, celles qui ont l'influence souhaitée. Il constitue donc une étape très utile pour une gestion efficace.

Implémenter un schéma fonctionnel tel celui décrit dans la figure I.13 sur une pêcherie ou un type de pêcherie donné n'est certes pas évident, vu la taille du système et la complexité des interactions entre ses diverses composantes. Il existe cependant certains exemples concrets de telles pêcheries, comme par exemple le modèle développé par LLEONART ET AL. [26], qui intègre trois grandes composantes dynamiques en interaction : le stock à un niveau écologique, le marché et les pêcheurs à un niveau économique.

Si la pêcherie que l'on veut modéliser semble a priori trop complexe, on peut étudier au préalable des sous-systèmes simples, afin de bien comprendre tous les mécanismes qu'elle engendre. Il ne faut pas non plus perdre de vue qu'il est illusoire de vouloir reproduire la réalité en équations, et que la notion de système *réaliste* est relative aux objectifs que l'on veut atteindre par ce système.

Ces remarques étant faites, le développement de tels systèmes de pêcheries plus complets, en tant qu'outils d'aide à la gestion, nous paraît être un axe de recherche intéressant. En outre, il permet de mettre en évidence certains problèmes de contrôle intéressants, sur les tactiques de pêche et les règles de gestion par exemple.

Un modèle avec pré-recrutés

Chapitre II

Un modèle avec pré-recrutés

Contenu

Introduction

Nous avons vu dans la section I.2.2 qu'une des difficultés des modèles structuraux est d'exprimer le recrutement. Le prendre constant ou sous forme d'un bruit n'est pas satisfaisant et généralement les relations stock-recrutement, trop résumées, ne donnent pas de résultats concluants. C'est pourquoi nous nous sommes penchés sur la modélisation de « ce qui se passe avant le recrutement », sans faire intervenir aucun forçage environnemental, mais en introduisant une véritable dynamique sur cette phase pré-recrutée. Ainsi, nous avons rajouté une classe supplémentaire à un modèle dynamique de stock structuré, comprenant les poissons du stade œuf au stade recruté.

Comme les phénomènes intervenant sur les pré-recrutés sont rapides et ne s'étendent pas sur de nombreuses années, il faut choisir un pas de temps assez petit. Pour ne pas avoir ce problème d'échelle de temps, une solution est d'utiliser un modèle en temps continu. Pour encore mieux traduire le fait que la dynamique des pré-recrutés est rapide par rapport à celle du stock, nous avons intégré deux échelles de temps dans notre système.

Après une *présentation* de ce modèle avec pré-recrutés, nous abordons dans ce chapitre quelques propriétés du modèle : sont étudiés la *stabilité* des équilibres par des méthodes de systèmes coopératifs, puis le caractère *lent-rapide* du système grâce à la théorie des perturbations singulières. Enfin, nous essayons d'exprimer une *relation stock-recrutement* à partir de ce modèle, en dégageant le nombre de recrutés et le stock fécond au cours du temps et en tentant de les mettre en relation ; ainsi nous pouvons replacer les résultats obtenus dans un cadre plus classique.

II.1 Présentation du modèle

Nous avons choisi de représenter le stock par un modèle structuré «classique» à n classes, en lui adjoignant un stade 0 regroupant les pré-recrutés (œufs, larves, juvéniles). Plus précisément, il s'agit d'un modèle en temps continu de dimension (n+1), où chaque stade est décrit par l'évolution de son effectif X_i.

Afin de modéliser les termes de mortalités intervenant au niveau des pré-recrutés, nous nous sommes inspirés des hypothèses utilisées par RICKER et BEVERTON–HOLT pour élaborer leurs relations. La dynamique du stock est elle très simplifiée. En première approche, nous considérons que l'effort de pêche instantané E (ou plus exactement l'intensité de pêche) est maintenu constant et intégré dans le terme de mortalité totale m_i, pour tout $i = 1, \ldots, n$, de la manière suivante :

$$m_i = m'_i + q_i E$$

avec :

m_i	: taux de mortalité totale de la classe i	(en temps$^-1$)
m'_i	: taux de mortalité naturel de la classe i	(en temps$^-1$)
E	: effort de pêche instantané	(en unité d'effort×temps$^-1$)
q_i	: capturabilité de la classe i	(en unité d'effort$^-1$)

Ce modèle est décrit dans la figure II.1 ci-dessous.

II.1.1 Description du modèle

À une structure linéaire très simple de modèle structuré, on greffe au niveau du stade pré-recruté 0 un terme de ponte linéaire, permettant de boucler le système, ainsi que des termes non linéaires de mortalité spécifiques aux pré-recrutés.

Structure linéaire Chaque stade i (0 à n) du stock est soumis à mortalité externe, due à la pêche et aux causes «naturelles». La mortalité naturelle regroupe les maladies, les actions de l'environnement, des autres espèces ou stocks... ; i.e. tout sauf l'exploitation humaine et les interactions au sein du stock. Nous supposons que cette mortalité est linéaire (taux constant m_i), ce qui signifie que la proportion de poissons qui meurent par unité de temps est indépendante du temps, de l'effectif de la population... Le vieillissement est lui aussi linéaire ; le taux de passage α d'une classe à l'autre est constant et ne dépend pas de la

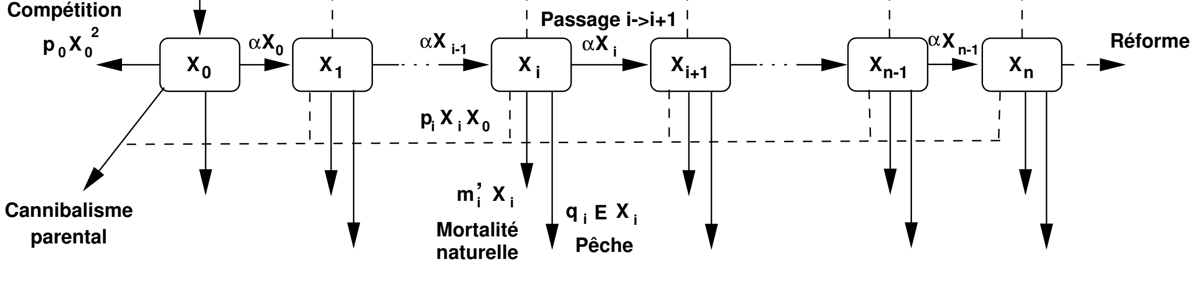


FIG. II.1 *Schéma du modèle avec pré-recrutés (II.1,II.2).*

classe i. Cela signifie que le *temps de résidence* dans une classe i est le même pour toutes les classes et est égal à $1/\alpha$. On peut donc considérer qu'il s'agit d'un modèle en classes d'âge, de durée pas nécessairement égale à un an.

☞ REMARQUE : L'hypothèse de mortalité linéaire est celle faite pour le modèle en cohortes de BEVERTON–HOLT (cf. section I.1.2). Au lieu de discrétiser ce modèle selon le temps (coefficients constants sur un pas de temps) pour une cohorte, comme RICKER l'a fait, nous l'avons discrétisé en stades pour le stock entier, puis introduit des coefficients de passage d'un stade à l'autre. Le temps moyen passé par tout individu dans chaque stade est égal à $1/\alpha$. ▮

Bouclage linéaire (ponte) La ponte est supposée continue au cours du temps, ce qui simplifie le modèle. Le nombre d'œufs viables (par unité de temps) introduits dans le stade 0 est donné par la somme des $(f_i l_i X_i)$, où f_i est la proportion d'individus féconds, et l_i le nombre moyen d'œufs viables émis par un tel individu par unité de temps. L'hypothèse de ponte continue est réaliste ; les périodes de ponte d'une espèce peuvent intervenir plusieurs fois par an, et même durant toute l'année (cas des mers tropicales où les saisons sont peu marquées).

Termes non linéaires (mortalités spécifiques) Les termes de mortalité spécifiques aux juvéniles dérivent des hypothèses faites par Beverton–Holt (compétition inter-juvéniles pour la nourriture ou l'habitat) et Ricker (cannibalisme parental) lors de l'élaboration de leurs relations stock-recrutement (cf. section I.2.1). Les juvéniles sont soumis à du cannibalisme parental par le stade i $(p_i X_i X_0)$, qui s'exprime par un terme de prédation type Lotka–Volterra. La mortalité densito-dépendante $(p_0 X_0^2)$ peut traduire la compétition inter-juvéniles pour la nourriture ou l'habitat en environnement limité.

Deux échelles de temps Comme les phénomènes intervenant au niveau des pré-recrutés sont très rapides, on souhaite que leur dynamique puisse suivre une échelle de temps plus rapide que celle du stock. Pour cela on introduit un autre paramètre dans le modèle, $\varepsilon \in]0,1]$, sans dimension. Lorsque ε est très petit, la dynamique des pré-recrutés est beaucoup plus rapide que celle du stock. D'où l'apparition de deux échelles de temps. Cette propriété du système est détaillée dans la section II.3 ; elle permet essentiellement de simplifier l'étude du système.

II.1.2 Formulation mathématique

Le modèle mathématique est donc un système de $n+1$ équations différentielles, dont seule la première équation $\dot{X}_0$ comporte des termes non linéaires :

$$\dot{X}_0(t) = \underbrace{-\alpha X_0(t)}_{\text{passage}\to 1} + \frac{1}{\varepsilon}\Bigg(-\underbrace{m_0 X_0(t)}_{\text{mort. lin.}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_i l_i X_i(t)}_{\text{ponte } i\to 0} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i X_i(t) X_0(t)}_{\text{prédation de } i\to 0} - \underbrace{p_0 X_0(t)^2}_{\text{compétition}} \Bigg) \quad \text{(II.1)}$$

$$\dot{X}_i(t) = \underbrace{\alpha X_{i-1}(t)}_{\text{passage } i-1\to i} - \underbrace{\alpha X_i(t)}_{\text{passage } i\to i+1} - \underbrace{m_i X_i(t)}_{\text{mort. lin.}} \qquad (i = 1, \ldots, n) \quad \text{(II.2)}$$

avec :

m_i	: taux de mortalité externe	(en temps$^-1$)
α	: taux de passage	(en temps$^-1$)
p_0	: paramètre de compétition juvénile	(en temps$^-1$.nombre$^-1$)
f_i	: proportion de matures dans la classe i	(sans dimension)
l_i	: efficacité reproductive de la classe i	(en temps$^-1$)
p_i	: taux de prédation de la classe i sur la classe 0	(en temps$^-1$.nombre$^-1$)
ε	: $\varepsilon = 1$ (une échelle de temps) ou $0 < \varepsilon \ll 1$ (deux échelles de temps)	(sans dimension)

☞ Remarques : Le terme de mortalité m_0 ne rend compte que de la mortalité naturelle, car par définition même du stade 0, il n'est pas soumis à pêche.

Par ailleurs, le terme $-\alpha X_n$ intervenant dans $\dot{X}_n$ peut surprendre. En effet, n étant la dernière classe d'âge du système on ne comprend pas pourquoi il y aurait passage dans la classe supérieure. On peut le voir de deux manières. La première consiste à le considérer comme un terme de mortalité supplémentaire, n étant la dernière classe, et alors m_n perd un peu de son sens biologique : c'est $m_n + \alpha$ qui représente la mortalité naturelle. La seconde manière est de considérer qu'après la classe n intervient un phénomène de réforme : les poissons, trop grands ou trop vieux, quittent le stock ; ils ne sont plus capturables, n'interagissent plus avec les juvéniles (ni ponte, ni cannibalisme), voire même s'éloignent géographiquement ; leur évolution après réforme n'est pas modélisée. ❚

II.1.3 Positivité des variables

Notons tout d'abord que, par leur définition (taux de mortalité...), tous les paramètres qui interviennent au niveau du modèle sont positifs. Certains peuvent être nuls. Mais pour que le modèle représente bien une population structurée, il faut qu'il y ait vieillissement d'une classe à l'autre et donc que le coefficient de passage soit strictement positif. En outre, sous peine d'extinction garantie, il faut que de nouveaux individus intègrent la population : le bouclage du modèle par la ponte est nécessaire. D'où :

$$\begin{array}{rl} \text{Pour tout } i & m_i,\, l_i,\, f_i,\, p_i \geqslant 0 \\ \text{et en outre :} & \left| \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ \sum_{i=1}^{n} l_i f_i > 0 \end{array} \right. \end{array} \tag{II.H$_0$}$$

Nous considérons par la suite que cette hypothèse II.H$_0$ est vérifiée.

Le modèle (II.1,II.2) n'a pas de sens pour des valeurs de X_i négatives strictement, car ce sont des effectifs, des nombres d'individus. La structure du modèle garantit néanmoins que si les effectifs initiaux sont positifs, ils le resteront au cours du temps. En effet le champ est rentrant sur les bords de l'orthant positif :

$$X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{X}_i = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} f_i l_i X_i(t) & \text{(a) si } i = 0 \\ \alpha X_{i-1}(t) & \text{(b) si } i = 1, \dots, n \end{cases}$$

☞ Considérons qu'à l'instant t, l'effectif X_i de la classe i ($i = 1, \dots, n$) est nul et que tous les autres sont positifs. Alors sa dérivée est égale au cas (b) de l'équation ci-dessus. Si $X_{i-1}(t) = 0$, X_i restera nul tant que X_{i-1} sera nul. Si en revanche $X_{i-1}(t) > 0$, alors X_i croît et devient positif. Ainsi au bout d'un petit intervalle de temps δt, à l'instant $t + \delta t$, soit X_i devient positif, soit il reste nul. En aucun cas il ne devient strictement négatif.

De même pour X_0. Supposons qu'à l'instant t, $X_0(t)$ est nul et que tous les autres X_i sont positifs. Sa dérivée est donnée par le cas (a) ci-dessus. D'où à $t + \delta t$, δt étant petit, X_0 demeure nul ou croît, mais en aucun cas ne devient négatif strictement. ❚

II.2 Étude de stabilité

Nous nous penchons tout d'abord sur la stabilité locale du ou des points d'équilibre. Étudier la stabilité locale de (II.1,II.2) revient à étudier la stabilité de ce système linéarisé autour du point d'équilibre considéré. Puis nous passons à la stabilité globale. Pour mener à bien cette étude, nous sommes amenés à faire l'hypothèse que notre système est *coopératif* [45].

II.2.1 Équilibres

Cherchons les équilibres du système (II.1,II.2). Quelles que soient les valeurs des paramètres, il admet un équilibre trivial : $X_0 = X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0$. Cet équilibre correspond à une population épuisée et de ce fait, s'il est unique, le modèle ne présente pas un grand intérêt .

Il est possible d'obtenir un autre équilibre non trivial, pour des valeurs d'effectifs positives, à condition que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

$$p_0 + p_1 + p_2 \cdots + p_n \neq 0 \tag{II.H$_1$}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i l_i \pi_i > \alpha_0 \tag{II.H$_2$}$$

$$\text{avec : } \alpha_0 = \varepsilon\alpha + m_0$$

$$\pi_i = \frac{\alpha^i}{\prod_{j=1}^{i}(\alpha + m_j)}$$

Dans le cas où tous ces coefficients p_i sont nuls, on obtient un système linéaire qui n'a d'équilibre non nul que s'il est dégénéré ; il existe alors une infinité d'équilibres. Mais l'intérêt de l'étude résidant dans les termes non-linéaires, la *condition de non linéarité* semble naturelle.

Interprétation *– La première condition (II.H$_1$) signifie que le modèle doit avoir au moins un terme non linéaire, les coefficients p_i marquant les deux phénomènes non linéaires intervenant sur le système : la compétition intra-juvénile et la prédation parentale.*

La seconde, (II.H$_2$) traduit une condition de survie *: il faut que les coefficients de ponte soient assez grands par rapport à la mortalité naturelle de la classe 0 et son vieillissement ; les π_i sont simplement des termes sans dimension pris dans l'intervalle $]0,1]$. On voit bien que, pour que le stock ne s'épuise pas, il faut qu'il y ait toujours un nombre suffisant de juvéniles afin d'assurer le recrutement. Si les juvéniles meurent trop vite, ou alors passent trop rapidement dans la classe 1 (par rapport à la vitesse de la ponte), le stock ne peut se maintenir. Il est donc nécessaire qu'il y ait un nombre suffisant d'œufs pondus par unité de temps.*

Si ces conditions (II.H$_1$,II.H$_2$) sont vérifiées, alors on en en plus le point d'équilibre suivant, dont chaque composante est positive :

$$\mathcal{X}^* \begin{cases} X_0^* = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} l_i f_i \pi_i - m_0 - \alpha\varepsilon}{p_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i \pi_i} \\ X_i^* = \pi_i X_0^* \end{cases} \tag{II.3}$$

Les conditions (II.H$_1$) et (II.H$_2$) déterminent la nature du système : linéaire ou non linéaire, 1 ou 2 équilibres. Le tableau II.1 résume tous les cas possibles. Par la suite, nous ne considérerons ni le cas où le système est linéaire, vu que l'intérêt de l'étude réside précisément dans ces termes, ni le cas où le système est dégénéré.

Hypothèse	*de non linéarité* **vraie**: $p_0+p_1+p_2\cdots+p_n \neq 0$	*de non linéarité* **fausse**: $p_0+p_1+p_2\cdots+p_n = 0$
de survie (II.H_2) **vraie**: $\sum_{i=1}^n f_i l_i \pi_i > \alpha\varepsilon + m_0$	Système non linéaire, avec 2 équilibres: zéro et $\mathcal{X}^*$.	Système linéaire, avec 1 seul équilibre nul.
de survie (II.H_2) **fausse**: $\sum_{i=1}^n f_i l_i \pi_i < \alpha\varepsilon + m_0$ .... ou .... $\sum_{i=1}^n f_i l_i \pi_i = \alpha\varepsilon + m_0$	Système non linéaire, avec 1 seul équilibre nul. .... dégénéré.	Système linéaire, avec 1 seul équilibre nul. .... dégénéré.

TAB. II.1 *Nature et équilibre(s) du modèle avec pré-recrutés selon les hypothèses (II.$H_{1,2}$).*

D'un point de vue biologique, il est intéressant qu'il existe cet autre point d'équilibre, car cela peut éviter l'extinction du stock, inévitable si par exemple le seul point d'équilibre est zéro et qu'il est stable. Afin de voir plus précisément quel est le comportement du système par rapport aux points d'équilibre, une étude de stabilité est nécessaire.

II.2.2 Stabilité locale

Tout d'abord, nous allons étudier la stabilité locale des deux points d'équilibre mis en évidence ci-dessus, ce qui consiste à analyser la stabilité du modèle linéarisé autour de chacun de ces points.

a) Stabilité locale de $\mathcal{X}^*$

On suppose que les conditions (II.H_1,II.H_2) sont vérifiées afin d'avoir un point d'équilibre non nul $\mathcal{X}^*$ (II.3). On linéarise autour de ce point et on obtient le système suivant:

$$\dot{x}_0 = \frac{1}{\varepsilon}\left(-\varepsilon\alpha - m_0 - 2p_0X_0^* - \sum_{i=1}^n p_iX_i^*\right)x_0 + \frac{1}{\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^n l_if_i - \sum_{i=1}^n p_iX_0^*\right)x_i \tag{II.4}$$

$$\dot{x}_i = \alpha x_{i-1} - \alpha x_i - m_ix_i \tag{II.5}$$

$$\text{avec:}\ \left|\begin{array}{l} x_0 = X_0 - X_0^* \\ x_i = X_i - X_i^* \end{array}\right.$$

On peut le représenter ainsi sous forme matricielle:

$$\dot{\mathcal{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ \alpha & -\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha & -\alpha_n \end{pmatrix}}_{E_n} \mathcal{X} \tag{II.6}$$

avec les notations suivantes :

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = \varepsilon\alpha + m_0$$

$$\alpha_i = \alpha + m_i \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n$$

$$k_0 = -\frac{1}{\varepsilon}\left(\alpha_0 + 2p_0X_0^* + \sum_{i=1}^{n} p_i\pi_iX_0^*\right)$$

$$k_i = \frac{1}{\varepsilon}(l_if_i - p_iX_0^*) \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n$$

On peut essayer de trouver les valeurs propres de la matrice E_n ci-dessus, mais le résultat n'est pas évident dès que n devient supérieur à 2. Par conséquent, on utilise une autre méthode qui requiert des conditions supplémentaires : il faut que le système linéarisé soit *coopératif*. Cela signifie que les termes de la matrice E_n sont positifs en dehors de la diagonale ; les termes diagonaux sont quelconques. On peut alors appliquer certains résultats propres à ces matrices.

☞ Cette structure représente une population où toute classe contribue de manière positive ou nulle à l'accroissement d'une autre classe, d'où le terme coopératif. ▮

Comme il y a du cannibalisme parental dans notre système, cela requiert des hypothèses supplémentaires. La condition (nécessaire et suffisante) pour que le système local soit coopératif est que les k_i $(i \neq 0)$ soient positifs, soit :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad l_if_i \geqslant p_iX_0^* \tag{II.H$_3$}$$

***Interprétation** – La réalisation de cette condition II.H_3 signifie qu'à l'équilibre, tous les stades prédateurs sont aussi stades féconds et que chaque individu de ces stades produit plus d'œufs qu'ils ne consomme de pré-recrutés (par unité de temps). Cette hypothèse tend à uniformiser les stades adultes : tout prédateur pond plus d'œufs qu'il ne consomme de juvéniles, mais elle ne semble pas déraisonnable si l'on veut que la population soit viable.*

Vérifions qu'elle est réalisable :

$$(\text{II.H}_3) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad \frac{l_if_i}{p_i} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} l_if_i\pi_i - \alpha_0}{p_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i\pi_i}$$

Comme α_0, π_i sont strictement positifs, cette condition est réalisable pour des coefficients bien choisis. Par exemple α_0 ou p_0 « assez grand », ou bien des (l_i, f_i, p_i) tous « assez proches » de (l, f, p) ; on peut dans ce dernier cas approcher l'équilibre ainsi :

$$X_0^* \approx \frac{lf\sum\pi_i - \alpha_0}{p_0 + p\sum\pi_i} < \frac{lf}{p}.$$

Donc il existe tout un ensemble de paramètres qui vérifient l'hypothèse (II.H_3).

Supposons pour la suite que cette relation (II.H_3) sur les coefficients est vérifiée ; tous les termes extra-diagonaux de la matrice sont donc positifs et nous avons là un système coopératif.

Nous allons ensuite utiliser le théorème suivant :

Théorème 1 (M-matrice d'après [45])
Soit : $Z^{n\times n} = \{A = (a_{ij}) \in I\!R^{n\times n} \mid a_{ij} \leqslant 0\,,\ i \neq j\}$ *et soit M est une matrice de $Z^{n\times n}$, c.-à-d. une matrice pour laquelle tous les termes en dehors de la diagonale sont négatifs ou nuls.*

M est une M-matrice non singulière si et seulement si l'une deux conditions suivantes est vérifiée :
1. La partie réelle de toute valeur propre de M est strictement positive.
2. Tous les mineurs principaux de M sont strictement positifs. ◊

$M_n = -E_n$ est une matrice de $Z^{n\times n}$. Si l'on montre que tous les mineurs principaux de M_n sont positifs, alors c'est une *M-matrice* et ses valeurs propres sont à partie réelle strictement positive. Par suite, les valeurs propres de E_n sont à partie réelle strictement négative et donc le système linéarisé en $\mathcal{X}^*$ est asymptotiquement stable.

Notons le déterminant de M_n : $\Delta_n = \det(M_n)$. Les mineurs principaux de M_n sont justement les Δ_q, pour $q = 0, \ldots, n$. Ainsi il suffit de montrer que pour tout n entier naturel, le déterminant Δ_n est positif. Avec les mêmes notations que précédemment plus $\pi_0 = 1$, ce déterminant se calcule facilement (développement selon la 1ère ligne) :

$$\begin{aligned}
\forall n \in I\!N \quad \Delta_n &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\,(-k_i)\,(-\alpha)^i \prod_{j=i+1}^{n} \alpha_j \\
&= -\sum_{i=0}^{n} k_i \alpha^i \prod_{j=i+1}^{n} \alpha_j \\
&= -\prod_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=0}^{n} k_i \pi_i
\end{aligned} \tag{II.7}$$

☞ On prend comme convention qu'un produit $\prod$ est égal à 1 si l'indice final est inférieur à l'indice initial. ❙

On sait que ε et les α_i sont tous strictement positifs. En outre :

$$\begin{aligned}
\varepsilon \sum_{i=0}^{n} k_i \pi_i &= -\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} l_i f_i \pi_i - 2X_0^* \left(p_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i \pi_i\right) \\
&= \alpha_0 - \sum_{i=1}^{n} l_i f_i \pi_i \\
&< 0 \quad \text{d'après l'hypothèse II.H}_2
\end{aligned}$$

D'où Δ_n est positif strictement pour tout n.

Par conséquent, sous les hypothèses d'existence (II.H_1,II.H_2) et de système local coopératif (II.H_3), l'équilibre $\mathcal{X}^*$ est localement stable.

b) Stabilité locale de 0

Intéressons-nous à présent au point origine. Le système linéarisé en zéro est le suivant :

$$\dot{\mathcal{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\alpha_0/\varepsilon & l_1 f_1/\varepsilon & l_2 f_2/\varepsilon & \dots & l_n f_n/\varepsilon \\ \alpha & -\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha & -\alpha_n \end{pmatrix}}_{O_n} \mathcal{X} \tag{II.8}$$

$(-O_n)$ est aussi une matrice de $Z^{n\times n}$, on peut donc lui appliquer les résultats issus du théorème 1. Les mineurs principaux de $(-O_n)$ sont les déterminants suivants :

$$\begin{aligned} \forall n \in I\!N \quad \Delta_n &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\prod_{j=0}^{n}\alpha_j + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\,(-l_i f_i)\,(-\alpha)^i \prod_{j=i+1}^{n}\alpha_j\right) \\ &= \prod_{j=1}^{n}\alpha_j\left(\alpha_0 - \sum_{i=1}^{n} l_i f_i \pi_i\right) \end{aligned} \tag{II.9}$$

On constate ci-dessus que le signe des mineurs principaux de $(-O_n)$ est constant et ne dépend que de la condition (II.H_2) d'existence de 2 équilibres au système, car tous les α_i sont strictement positifs. Si cette condition est vérifiée, les mineurs sont tous strictement négatifs. Mais si le système n'est pas dégénéré et qu'il admet zéro comme seul équilibre, ils sont positifs strictement ; d'après le théorème 1 précédent, O_n n'admet alors que des valeurs propres à partie réelle strictement négative. Cela signifie que si zéro est l'unique équilibre du système non linéaire – i.e. (II.H_1) vérifiée mais (II.H_2) non –, alors il est localement stable.

En revanche, si le deuxième équilibre $\mathcal{X}^*$ existe – i.e. (II.H_1) et (II.H_2) vraies –, selon ce théorème O_n a une valeur propre à partie réelle positive ou nulle. Afin de montrer que zéro est instable (localement), il faut en trouver une à partie réelle strictement positive : le théorème 1 ne suffit pas. Pour la suite de la démonstration, nous allons donc considérer une matrice positive $C_n = O_n + cI$ et appliquer une partie du théorème de Perron–Frobenius.

Théorème 2 (issu du théorème de Perron–Frobenius [6])
Si C est une matrice positive et irréductible, alors :
1. C a une valeur propre simple réelle strictement positive égale à son rayon spectral $\rho(C)$.
2. C a un vecteur propre strictement positif correspondant à $\rho(C)$. ◊

On prend : $c = 1 + \max\{\alpha_0/\varepsilon, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Ainsi C_n est une matrice positive. Elle est irréductible si et seulement si son graphe orienté est connexe. Traçons le graphe orienté de la matrice (cf. figure II.2) et vérifions si pour toute paire de nœud (i, j), il existe un chemin orienté allant de i à j.

On voit clairement que le graphe représenté dans la figure II.2 est connexe si et seulement si l'arc reliant n à 0 existe ; c.-à-d. si et seulement si :

$$l_n f_n \neq 0 \tag{II.H_4}$$

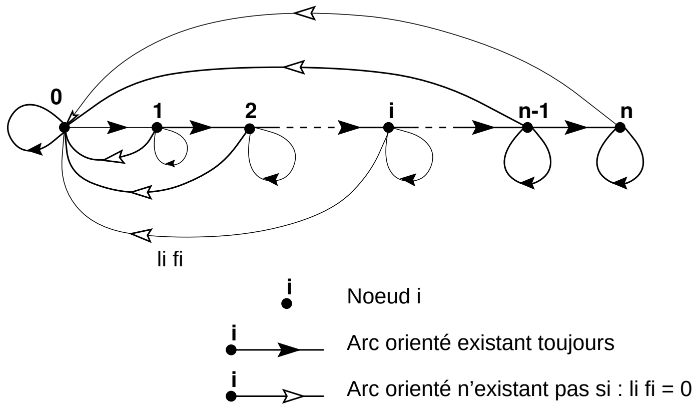


FIG. II.2 *Graphe orienté associé à la matrice positive $C_n = O_n + cI$, où O_n est la matrice jacobienne en 0 du système (II.1,II.2).*

***Interprétation** – Cette condition n'est pas très restrictive : en effet, elle signifie que la dernière classe du stock avant la réforme, i.e. avant la sortie de la phase exploitable (cf. figure I.4), doit être féconde.*

À cette condition, la matrice C_n est irréductible. D'après le théorème de Perron–Frobenius (cf. théorème 2), elle admet donc une valeur propre $\rho(C_n)$ strictement positive associée à un vecteur propre V lui aussi strictement positif (i.e. dont les composantes sont strictement positives).

Par définition du rayon spectral, $\rho(C_n)$ est la plus grande valeur propre (en module) de C_n. Les valeurs propres de O_n sont celles de C_n, translatées de $-c$; les vecteurs propres associés sont les mêmes pour les deux matrices. D'où $\lambda = (\rho(C_n) - c)$ est la plus grande valeur propre de O_n en module et elle est réelle.

λ ne peut être strictement négative, car sinon il n'existe aucune valeur propre à partie réelle positive, ce qui est contraire aux résultats précédents issus du théorème 1. Elle ne peut pas non non plus être nulle car le déterminant $(-1)^n \Delta_n$, produit des valeurs propres de O_n, est non nul (système non dégénéré). Par conséquent, elle est strictement positive. D'où zéro est instable.

Pour que la population considérée puisse se maintenir à un niveau viable, il semble donc nécessaire que le système (II.1,II.2) possède un deuxième équilibre $\mathcal{X}^*$. Ainsi l'équilibre zéro, qui seul est localement stable, devient instable (II.H_4 vérifiée).
Si et seulement si (II.H_1) et (II.H_2) sont vérifiées, $\mathcal{X}^*$ existe et est positif (strictement) ; si en outre (II.H_3) est validée, il est localement stable. Il est ainsi beaucoup plus probable d'éviter l'extinction de la population. Mais pour obtenir des résultats de convergence plus généraux, il faut se pencher sur la stabilité globale de cet équilibre.

II.2.3 Stabilité globale

Au préalable, nous allons supposer que les hypothèses précédentes (II.$H_{1,2,3,4}$) sont vérifiées : le système (II.1,II.2) est *non linéaire* et il admet *2 équilibres* : zéro, instable, et $\mathcal{X}^*$, strictement positif et localement stable.

Pour étudier la stabilité globale de l'équilibre $\mathcal{X}^*$, on va aussi se placer dans le cas d'un système *coopératif*, i.e. tel que sa matrice jacobienne aie des termes positifs en dehors de la diagonale, les termes diagonaux étant de signe quelconque. Ainsi on pourra appliquer le résultat suivant :

Théorème 3 (Stabilité pour un système coopératif [45])
S'il existe un domaine :

$$\mathcal{D} = \prod_{i=0}^{n}[a_i, b_i] \quad (a_i < b_i)$$

contenant strictement un unique point d'équilibre $\mathcal{X}^*$ et tel qu'en tout point le système soit coopératif, alors il suffit que la condition suivante soit vérifiée pour que l'équilibre soit asymptotiquement stable sur ce domaine invariant, (cf. figure II.3) :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\} \quad \dot{X}_i(a_0, \ldots, a_n) > 0 \quad \textit{et} \quad \dot{X}_i(b_0, \ldots, b_n) < 0 \qquad \Diamond$$

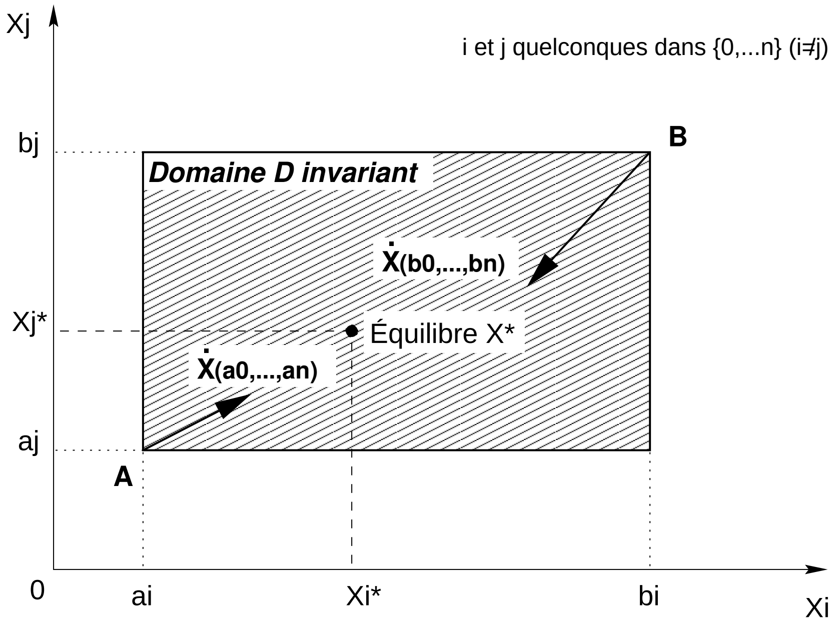


FIG. II.3 *Conditions de stabilité de l'équilibre X^* dans le domaine invariant $\mathcal{D}$, pour un système coopératif.*

On veut montrer qu'il existe un tel *domaine invariant* $\mathcal{D}$ contenant $\mathcal{X}^*$. Nécessairement ce domaine exclut l'autre équilibre, zéro, car sinon la stabilité n'est pas garantie sur l'ensemble du domaine. Avec un système coopératif, la condition de champ strictement rentrant aux coins A et B du domaine suffit pour qu'il soit invariant. Mais pour déterminer ce domaine $\mathcal{D}$, nous procédons par étapes et examinons d'abord l'invariance du domaine.

☞ Invariant signifie grossièrement qu'une fois dans le domaine, on y reste ; ainsi le système est et demeure coopératif. ▌

Domaine coopératif contenant $\mathcal{X}^*$ et pas zéro Étudions tout d'abord le caractère coopératif du système global. Sa matrice jacobienne au point $\mathcal{X}$ est la suivante :

$$J_n(\mathcal{X}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\varepsilon}Y_0 & \frac{1}{\varepsilon}Y_1 & \dots & \dots & \frac{1}{\varepsilon}Y_n \\ \alpha & -\alpha_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha & -\alpha_n \end{pmatrix} \tag{II.10}$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } Y_0 &= \alpha_0 + 2p_0X_0 + \sum_{i=1}^{n} p_iX_i \\ Y_i &= l_if_i - p_iX_0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Pour que le système soit coopératif sur $\mathcal{D}$, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée en tout point du domaine :

$$\forall t, \forall \mathcal{X} \in \mathcal{D} \quad X_0(t) \leqslant \mu \qquad \text{avec : } \mu = \min_{i\in\{1,\dots,n\}} \frac{l_if_i}{p_i} \tag{II.H$_5$}$$

Vérifions à présent que ce domaine $\mathcal{D}$ coopératif peut contenir $\mathcal{X}^*$ et exclure zéro.

Que l'équilibre zéro soit en dehors du domaine $\mathcal{D}$ est compatible avec (II.H$_5$). Et pour que $\mathcal{X}^*$ soit dans le domaine $\mathcal{D}$, toujours sous cette condition, l'hypothèse (II.H$_3$) suffit. En effet, lors de l'étude de stabilité locale de $\mathcal{X}^*$, nous avons montré que pour certaines valeurs des paramètres du système, il était possible de vérifier : $X_0^* \leqslant \mu$. Mais on veut en plus que l'équilibre soit à l'intérieur du domaine et non sur le bord. Le même raisonnement peut être tenu pour montrer que l'on peut avoir, avec des paramètres correctement choisis, une inégalité stricte. Supposons donc que les paramètres du système sont tels que :

$$X_0^* < \mu \tag{II.H$_{3'}$}$$

> Avec les hypothèses (II.H$_{3'}$,II.H$_5$), le domaine $\mathcal{D}$ contient strictement le point d'équilibre non nul et en chacun de ses points le système est coopératif.

$+$ **Domaine invariant** Choisissons à présent les bornes de $\mathcal{D}$ afin que le domaine soit invariant. Pour cela il faut et il suffit que le champ $\dot{\mathcal{X}} = (\dot{X}_1, \dots, \dot{X}_n)$ aux bornes du domaine soit rentrant. D'après (II.H$_5$), on doit avoir : $b_0 \leqslant \mu$. Étudions donc tout d'abord le signe de $\dot{X}_0$ lorsque $X_0 = \mu$.

$$\begin{aligned} X_0 = \mu \quad &\Rightarrow \quad \varepsilon\dot{X}_0 = -\alpha_0\mu - p_0\mu^2 + \sum_{i=1}^{n}(l_if_i - p_i\mu)X_i \\ \mu > X_0^* \quad (\text{II.H}_{3'}) \quad &\Rightarrow \quad \mu p_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i\pi_i\mu > \sum_{i=1}^{n} l_if_i\pi_i - \alpha_0 \\ X_0 = \mu \quad \text{et} \quad X_i = \pi_i\mu \quad &\Rightarrow \quad \dot{X}_0 < 0 \\ X_0 = \mu \quad \text{et} \quad 0 \leqslant X_i \leqslant \pi_i\mu \quad &\Rightarrow \quad \dot{X}_0 < 0 \end{aligned} \tag{II.11}$$

Par conséquent si $b_0 = \mu$ et si tout X_i est inférieur à $\pi_i\mu$, le vecteur dérivé $\dot{X}_0$ est strictement rentrant sur la face $X_0 = b_0$ du domaine $\mathcal{D}$. En outre :

$$X_j = \pi_j\mu \quad \text{et} \quad 0 \leqslant X_i \leqslant \pi_i\mu \quad \text{pour } i \neq j \quad \Rightarrow \quad \dot{X}_i \leqslant 0$$

D'où si l'on prend pour tout indice $i = 0, \dots, n$, $b_i = \pi_i\mu$, alors le champ est rentrant sur toutes les faces $X_i = b_i$ du domaine $\mathcal{D}$. Par ailleurs, les résultats obtenus sur la positivité des variables (cf. section II.1.3) montrent que si l'on prend le coin A en zéro, le champ est rentrant sur toutes les faces $X_i = a_i = 0$.

Mais ce domaine, même s'il respecte les contraintes de domaine invariant et système coopératif, ne convient pas. En effet, l'équilibre zéro constitue le coin inférieur du domaine et dans son coin supérieur B, seule la composante $\dot{X}_0$ du champ est négative strictement, les autres sont nulles. Il faut donc modifier légèrement ce domaine.

+ **Domaine avec le champ strictement rentrant dans les coins A et B** Pour que les composantes $\dot{X}_i$, $i \neq 0$ du vecteur dérivé soit rentrantes strictement dans le coin supérieur, il suffit de prendre :

$$b_i = (1 + \nu_i)\pi_i\mu \quad \text{avec : } \nu_0 = 0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_n \tag{II.12}$$

En effet, on a alors en $X_i = b_i$ ($X_j \in [0, b_j]$ pour $i \neq j$):

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= \alpha X_{i-1} - \alpha_i b_i \\ &\leqslant \alpha b_{i-1} - \alpha_i b_i \\ &\leqslant \mu\alpha_i pi_i(\nu_{i-1} - \nu_i) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Il faut encore prendre les ν_i suffisamment petits pour que $\dot{X}_0$ demeure négatif dans le coin supérieur B. Soit $Q = \dot{X}_0(\mu, \pi_1\mu, \dots, \pi_n\mu)$; on a montré que $Q < 0$ (II.11). D'où :

$$\begin{aligned} \dot{X}_0(b_0, b_1, \dots, b_n) &= -\alpha_0\mu - p_0\mu^2 + \sum_{i=1}^{n}(l_i f_i - p_i\mu)\pi_i\mu(1 + \nu_i) \\ &= Q + \sum_{i=1}^{n}(l_i f_i - p_i\mu)\pi_i\mu\nu_i \\ &\leqslant Q + n\nu_n\mu \max_{i=1,\dots,n}(l_i f_i - p_i\mu)\pi_i \end{aligned}$$

Si pour tout i, $l_i f_i - p_i\mu = 0$ alors pour (II.12), toute suite strictement croissante (ν_i) convient. Le champ est alors strictement rentrant dans le coin supérieur $(b_0, b_1, \dots, b_n)$. Sinon on prend :

$$\begin{aligned} \nu_n &= \frac{-Q}{2n\mu \max_{i=1,\dots,n}(l_i f_i - p_i\mu)\pi_i} \\ &> 0 \quad \text{d'après la définition de } \mu \text{ (II.H}_5\text{)} \\ \Rightarrow \dot{X}_0&(b_0, b_1, \dots, b_n) = Q - Q/2 = Q/2 < 0 \end{aligned} \tag{II.13}$$

Ensuite il suffit de construire une suite (ν_i) (II.12) en remontant dans les indices à partir de ν_n (II.13) et en diminuant la valeur de (ν_i) à chaque fois. Par exemple, la suite ci-dessous convient :

$$\begin{aligned}
\nu_n &\text{ donné par (II.13)} \\
\nu_{n-1} &= \nu_n/2 < \nu_n \\
\nu_{n-2} &= \nu_n/3 < \nu_{n-1} \\
\nu_{n-3} &= \nu_n/4 < \nu_{n-2} \\
&\vdots \\
\nu_1 &= \nu_n/n < \nu_2 \\
\nu_0 &= 0 < \nu_1
\end{aligned}$$

En zéro, c'est un peu différent. En effet comme il s'agit d'un point d'équilibre, toutes les composantes du champ sont nulles. Mais en étudiant la stabilité locale de zéro, on a montré que si l'hypothèse (II.H_4) est vérifiée et qu'il existe un deuxième équilibre non nul alors zéro est instable. En outre, grâce au théorème 2 issu du théorème de Perron–Frobenius, on a prouvé l'existence d' un vecteur propre V strictement positif associé à la valeur propre strictement positive λ de la matrice jacobienne en zéro.

Ces conditions sont vérifiées ici, d'où l'existence de ce vecteur propre V. Ensuite par continuité du champ, il existe alors au voisinage de zéro un point A de composantes a_i strictement positives tel que le champ en ce point soit strictement rentrant, soit :

$$\exists\, A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \quad \forall i \in \{0, \dots, n\} \quad \dot{X}_i(a_0, a_1, \dots, a_n) > 0 \tag{II.14}$$

Ce point A satisfait la condition au coin inférieur de stabilité du théorème 3. On a donc démontré que l'équilibre $\mathcal{X}^*$ est stable sur le domaine $\mathcal{D}$.

En conclusion, si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$p_0 + p_1 + p_2 \cdots + p_n \neq 0 \quad \text{(système non linéaire)} \qquad \text{(II.H}_1\text{)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i l_i \pi_i > \alpha_0 \quad \text{(un équilibre non nul)} \qquad \text{(II.H}_2\text{)}$$

$$X_0^* < \mu \quad \text{(équilibre non nul à l'intérieur de } \mathcal{D}\text{)} \qquad \text{(II.H}_{3'}\text{)}$$

$$l_n f_n \neq 0 \quad \text{(champ strictement rentrant dans le coin inférieur } A \text{ de } \mathcal{D}\text{)} \qquad \text{(II.H}_4\text{)}$$

$$b_0 \leqslant \mu \quad (\mathcal{D} \text{ domaine coopératif}) \qquad \text{(II.H}_{5'}\text{)}$$

on a montré que l'on peut déterminer un domaine $\mathcal{D} = \prod_{i=0}^{n}[a_i, b_i]$ invariant, dans lequel le système (II.1,II.2) est coopératif. *En outre, l'équilibre $\mathcal{X}^*$ strictement positif (II.3) existe et est asymptotiquement stable dans $\mathcal{D}$.*

Interprétation *– L'intérêt d'un équilibre non nul stable réside dans sa capacité à éviter l'épuisement du stock. La stabilité est d'autant plus nécessaire que le stock est soumis à des fluctuations et perturbations par son environnement.*

On montre en outre que le domaine de stabilité est aussi proche de zéro que l'on veut. Ce résultat est donc intéressant : il garantit que la population ne peut pas s'éteindre, et ce quelles que soient les mortalités par pêche sur le stock (m_i*, pour* $i = 1, \ldots, n$*, regroupe les mortalité naturelle et par pêche), à conditions que les autres paramètres du modèle vérifient certaines hypothèses décrites ci-dessus. En effet, dès que la population est d'abondance faible, la stabilité de* $\mathcal{X}^*$ *entraîne la population vers son niveau d'équilibre.*

Remarque : On peut sans doute généraliser les résultats de stabilité ci-dessus en prenant comme ponte : $\sum f_i l_i(X_i)$ et comme terme de prédation : $-\sum p_i(X_i)X_0$ sur les pré-recrutés, avec l_i et p_i fonctions non linéaires de X_i. La condition (II.H$_5$) de système coopératif devient alors :

$$\frac{d}{dX_i}\sum_{i=1}^{n}(f_i\, l_i(X_i) - p_i(X_i)X_0) > 0$$

∎

II.3 Système à deux échelles de temps

Selon la valeur du paramètre ε, il peut y avoir plusieurs échelles de temps. Quand $\varepsilon = 1$, le modèle (II.1,II.2) est un système d'équations différentielles classique, il n'y a qu'une seule échelle de temps. Dans ce cas 0 est une classe d'âge comme une autre.

En revanche, si ε est très petit ($\varepsilon \ll 1$), les termes de l'équation (II.1) (sauf le terme de passage) évoluent beaucoup plus vite que le reste du système ; X_0 est donc une variable rapide par rapport aux autre X_i. Sous certaines hypothèses, cela permet de considérer la population de poissons comme un *système lent-rapide*, à deux échelles de temps, et de l'étudier sur un modèle réduit d'une dimension.

Tout d'abord, nous décrivons le comportement du modèle avec pré-recrutés lorsque l'approximation d'un système lent-rapide est faite. Puis nous vérifions que toutes les hypothèses sont remplies pour pouvoir appliquer cette approximation, issue de la théorie des perturbations singulières [22]. Dans cette section, on ne cherche pas étudier le système mais à le simplifier, de manière à pouvoir en extraire une relation stock-recrutement. La comparaison avec les relations classiques est particulièrement intéressante, mais cela fait l'objet de la section suivante II.4.

II.3.1 Description du système lent-rapide approché

Nous considérons a priori que l'approximation lent-rapide est valide. Le système réduit ne conserve que la dynamique lente (II.2), la variable rapide X_0 étant exprimée comme la solution de $\dot{X}_0 = 0$ avec $\varepsilon = 0$. C'est une bonne estimation de la dynamique du système initial (II.1,II.2) quand ε est petit ($0 < \varepsilon \ll 1$) : la solution de ce système initial avec pré-recrutés a pour limite la solution du système réduit quand ε tend vers zéro.

Supposons donc que ε est fixé et petit. Le comportement approché du système est alors le suivant :

1. *Phase rapide :* Tout d'abord la dynamique rapide est prédominante (car $\varepsilon \ll 1$). L'état du système $(X_0, \ldots, X_n)$ évolue donc rapidement vers la « surface lente », définie par :

$$\mathcal{S}_l = -p_0 X_0^2 - \left(m_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i X_i \right) X_0 + \sum_{i=1}^{n} f_i l_i X_i = 0 \tag{II.15}$$

   et qui correspond à l'équilibre du sous-système rapide. C'est le régime transitoire de notre système.

2. *Phase lente :* Ensuite, le système évolue lentement et est gouverné par sa dynamique lente. Comme on est au voisinage de la surface lente, on peut faire l'approximation suivante :

$$\mathcal{S}_l \approx 0 \tag{II.16}$$

   Cette approximation (II.16) permet d'obtenir X_0 en fonction des autres variables X_i. En effet, l'équation du 2$^{\text{nd}}$ degré correspondante admet une et une seule solution positive en X_0, fonction des X_i et définie sur $(\mathbb{R}_+)^n$:

$$X_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2p_0} \left(-m_0 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i X_i + \sqrt{(m_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i X_i)^2 + 4p_0 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i l_i X_i} \right) & \text{si } p_0 \neq 0 \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i l_i X_i}{m_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i X_i} & \text{si } p_0 = 0 \end{cases} \tag{II.17}$$

Le cas $p_0 = 0$ est bien défini sur tout $(\mathbb{R}_+)^n$ si m_0 est non nul. On va donc faire l'hypothèse suivante :

$$m_0 \neq 0 \tag{II.H$_6$}$$

La solution (II.17) n'est pas identiquement nulle, car d'après l'hypothèse (II.H$_0$), les $l_i f_i$ sont non tous nuls (dans le cas contraire, le régime permanent serait réduit au point 0). Et elle demeure positive au cours du temps.

La structure de notre modèle fait que X_0 n'apparaît que dans $\dot{X}_1$. Par conséquent le régime permanent est représenté par le système dynamique réduit et linéaire (II.2), avec une entrée $X_0(t)$ non-linéaire en boucle fermée (feedback) donnée par (II.17).

Interprétation *– Faire l'approximation d'un système lent-rapide signifie que les phénomènes agissant sur les pré-recrutés, le passage dans la classe supérieure mis à part, sont plus rapides que les autres et d'un ordre de grandeur supérieur. Par exemple, on suppose que la mortalité des pré-recrutés est beaucoup plus forte que celle des matures, que la prédation et la compétition sont importantes pendant une unité de temps et que beaucoup d'œufs sont pondus.*

II.3.2 Problème de perturbation singulière

Nous allons montrer que le modèle avec pré-recrutés est en fait un problème de perturbation singulière, lorsque $\varepsilon \ll 1$. Puis grâce au théorème suivant, nous pourrons justifier l'approximation de système lent-rapide faite ci-dessus.

Théorème 4 (Perturbations singulières [22])
Soit le problème de perturbation singulière suivant :

$$\dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon) \qquad x(t_0) = \xi(\varepsilon) \tag{II.18}$$
$$\varepsilon\dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon) \qquad z(t_0) = \eta(\varepsilon) \tag{II.19}$$

et soit $z = h(t, x)$ une solution isolée de : $0 = g(t, x, z, 0)$. Supposons en outre que les conditions suivantes sont satisfaites pour tout :

$$\begin{aligned} (\, t, x, z - h(t,x), \varepsilon \,) \;&\in\; [0, t_1] \times B_r \times B_\rho \times [0, \varepsilon_0] \\ \text{avec : } B_r &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant r\} \\ B_\rho &= \{z \in \mathbb{R}^m \mid \|z\| \leqslant \rho\} \end{aligned}$$

1. *Les fonctions f et g et leurs premières dérivées partielles par rapport à (x, z, ε) sont continues. La fonction $h(t, x)$ et le jacobien $\partial g(t, x, z, 0)/\partial z$ ont toutes leurs premières dérivées partielles continues. Les conditions initiales $\xi(\varepsilon)$ et $\eta(\varepsilon)$ sont des fonctions lisses en ε.*

2. *Le système réduit suivant :*

$$\dot{x} = f(t, x, h(t,x), 0) \quad x(t_0) = \xi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \xi(0) \tag{II.20}$$

a une unique solution $\bar{x}(t)$ définie et telle que $\|\bar{x}(t)\| \leqslant r_1 < r$ pour tout t dans $[t_0, t_1]$.

3. *On considère que (t,x) sont des paramètres fixés quelconques. L'origine du modèle couche-limite suivant :*

$$\frac{dy}{d\tau} = g(t,x,y+h(t,x),0) \tag{II.21}$$

est exponentiellement stable, uniformément en (t,x).

Alors il existe des constantes strictement positives μ et ε_1 telles que pour tout :

$$\|\eta(0) - h(t_0,\xi(0)\| < \mu \text{ et } 0 < \varepsilon < \varepsilon_1$$

le problème de perturbation singulière (II.18,II.19) a une unique solution $[x(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon)]$ sur $[t_0,t_1]$ et :

$$x(t,\varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon) \quad \text{uniformément sur } [t_0,t_1]$$

En outre pour tout $t_2 > t_0$, il existe $\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_2$:

$$z(t,\varepsilon) - h(t,\bar{x}(t)) = O(\varepsilon) \quad \text{uniformément sur } [t_2,t_1]$$

◊

Ce théorème est connu sous le nom de théorème de TIKHONOV [47] et il est démontré dans l'ouvrage de KHALIL [22].

➤ Avec les mêmes notations que celles du théorème, on a :

$$\begin{aligned}
x &= (X_1,\dots,X_n)\\
z &= X_0\\
f(t,x,z,\varepsilon) &= F(X_0,\dots,X_n) = (\alpha X_0 - \alpha_1 X_1,\dots,\alpha X_{n-1} - \alpha_1 X_n)\\
g(t,x,z,\varepsilon) &= G(X_0,\dots,X_n,\varepsilon) = -(\alpha\varepsilon + m_0)X_0 - p_0 X_0^2 - \sum_{i=1}^{n} p_i X_i X_0 + \sum_{i=1}^{n} f_i l_i X_i
\end{aligned}$$

Le système (II.1,II.2) est bien un problème de perturbation singulière. On a vu précédemment que l'équation $0 = g(t,x,z,0)$ (= équation de la surface lente II.15) est un polynôme en $X_0 = z$, qui admet unique racine positive, donnée par l'équation II.17. Cette racine est isolée ; c'est un fonction de x non identiquement nulle et C^∞ sur $(\mathbb{R}_+)^n$ si $m_0 \neq 0$ (II.H$_6$). Avec les notations du théorème, elle est égale à :

$$\begin{aligned}
h(t,x) &= H(x) = H(X_1,\dots,X_n)\\
&= \begin{cases} \frac{1}{2p_0}\left(-m_0 - \sum_{i=1}^n p_i X_i + \sqrt{(m_0 + \sum_{i=1}^n p_i X_i)^2 + 4p_0 \sum_{i=1}^n f_i l_i X_i}\right) & \text{si } p_0 \neq 0\\ \dfrac{\sum_{i=1}^n f_i l_i X_i}{m_0 + \sum_{i=1}^n p_i X_i} & \text{si } p_0 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

➤ Le système réduit associé à ce problème de perturbation singulière est donné par :

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= \alpha H(X_1,\dots,X_n) - \alpha_1 X_1\\
\dot{X}_2 &= \alpha X_1 - \alpha_2 X_2\\
&\vdots\\
\dot{X}_n &= \alpha X_{n-1} - \alpha_n X_n
\end{aligned} \tag{II.22}$$

Ce système réduit admet les mêmes équilibres que le système initial, en prenant seulement ε nul. Comme d'après l'hypothèse (II.H$_6$) m_0 est non nul, les résultats sur la stabilité du système (II.1,II.2) sont encore valables pour $\varepsilon = 0$ (cf. section II.2). À condition que les hypothèses (II.H$_{0-6}$) soient vérifiées, le système réduit admet donc l'origine comme équilibre instable et comme équilibre stable, l'équivalent de $\mathcal{X}^*$ (II.3) soit :

$$\begin{aligned} x^* &= (X_i^*) = (\pi_i X_0^*) \\ \text{avec : } X_0^* &= \frac{\sum_{i=1}^n l_i f_i \pi_i - m_0}{p_0 + \sum_{i=1}^n p_i \pi_i} \end{aligned}$$

sur $\tilde{\mathcal{D}}$, la restriction sur $I\!R^n$ du domaine $\mathcal{D}$ défini dans la section II.2. Cet équilibre est asymptotiquement stable sur $\tilde{\mathcal{D}}$; ce qui implique que le système réduit tend vers cet équilibre quand t tend vers l'infini. On choisit B_r inclus dans $\tilde{\mathcal{D}}$ comme l'ensemble des points x tel que : $\|x - x^*\| \leqslant r$. Par définition de la limite, en pour tout $r_1 < r$ on peut trouver un temps t_0 tel que :

$$\|x(t) - x^*\| \leqslant r_1 < r \qquad \forall t \geqslant 0$$

La deuxième condition du théorème 4 est donc vérifiée à une translation sur les variables près, ce qui n'a aucune influence sur ses résultats. Il suffit de se placer sur un intervalle $[0, t_1]$ assez grand ; on peut même prendre t_1 aussi grand qu'on le souhaite.

➤ La première condition est immédiate pour tout (x, z) dans $\mathcal{D}$. On choisit comme conditions initiales des points fixés de $\mathcal{D}$, ce qui signifie que les fonction ξ et η sont des constantes.

➤ Reste à étudier le modèle couche-limite :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= g(t, x, y + H(x), 0) \\ &= -p_0(y + H(x))^2 - (m_0 + \sum_{i=1}^n p_i X_i)(y + H(x)) + \sum_{i=1}^n f_i l_i X_i \end{aligned} \tag{II.23}$$

Le jacobien au point d'équilibre 0 de ce modèle est :

$$\begin{aligned} J &= -2p_0 H(x) - m_0 - \sum_{i=1}^n p_i X_i \\ &= -\sqrt{(m_0 + \sum_{i=1}^n p_i X_i)^2 + 4p_0 \sum_{i=1}^n f_i l_i X_i} \\ &< 0 \qquad \forall t \geqslant 0 \quad \forall x \in \bar{\mathcal{D}} \end{aligned}$$

Comme $z = H(x)$ est l'unique solution de $0 = g(t, x, z, 0)$, le point (x, z) étant dans $\mathcal{D}$, l'origine du modèle couche-limite est exponentiellement stable, uniformément en (t, x). La troisième condition du théorème est ainsi remplie.

Par conséquent toutes les hypothèses du théorème 4 sont vérifiées et l'on peut donc approcher les solutions du modèle avec pré-recrutés (II.1,II.2) par les solutions des problèmes réduits (II.22) et couche-limite (II.23). La description du comportement approché du système décrit ci-dessus est donc bien valide.

II.4 Une relation stock-recrutement ?

Le but poursuivi dans cette section est d'exprimer, à partir du modèle décrit précédemment, la relation stock-recrutement et éventuellement de retrouver les formes classiques décrites dans la section I.2.1. Tout d'abord il faut définir les termes intervenant dans cette relation : le stock fécond et le recrutement.

Le *recrutement*, est le nombre de poissons qui rejoignent la première classe d'âge exploitable, i.e. la première classe du stock, pendant un temps donné. Dans notre modèle, cela correspond au terme αX_0, qui représente le nombre de poissons entrant par unité de temps dans la classe 1, première classe du stock $(X_1, \dots, X_n)$. Pour une meilleure « compatibilité » avec les modèles discrets de pas de temps une année, on prend comme unité de mesure du temps l'année.

Le *stock fécond* est constitué de l'ensemble des femelles matures dans chaque classe du stock, soit la somme des $f_i X_i$.

☞ On peut qualifier αX_0 de «recrutement instantané» vu qu'il est défini à tout instant, par opposition aux situations appliquées où l'on parle du recrutement de l'année 1986... Dans ce dernier cas, il est clair que le recrutement correspond à une grandeur intégrée/moyennée sur une année, pour des raisons de disponibilité de données par exemple ; cette notion est adaptée à un modèle discret de pas de temps une année.

Néanmoins, comme nous avons choisi une modélisation en temps continu, il est nécessaire de définir le recrutement à chaque instant. Mais pour une bonne compatibilité entre ces deux approches, on prend comme unité de mesure du temps l'année. Ainsi les valeurs de recrutement sont comparables dans les deux approches. Notons R_d le recrutement pour un modèle discret de pas de temps une année et R_c celui pour un modèle continu où le temps est exprimé en année ; $t = 1996$ correspond alors au début de l'année 1996 (1er janvier). On a alors :

$$R_d(1996) = \int_{1996}^{1997} R_c(t)\, dt$$

Dans le cas du temps continu, le recrutement ne reste pas constant au cours de l'année. Le recrutement discret associé est la moyenne sur une année du recrutement continu. ▮

Nous cherchons ensuite à extraire de notre modèle la relation (fonctionnelle ou non) entre le recrutement et le stock fécond. Cela revient à exprimer le recrutement :

$$R(t) = \alpha X_0(t)$$

en fonction du stock fécond au même instant :

$$X_f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i X_i(t)$$

☞ Ce que nous obtenons ainsi est une courbe paramétrée par le temps. Il n'est pas évident qu'elle puisse se mettre sous forme fonctionnelle au sens mathématique du terme, i.e. une valeur de recrutement au maximum pour toute valeur de stock fécond donné. Cette forme est intéressante car elle permet d'évaluer le recrutement, terme souvent inconnu, de manière unique à partir de la donnée du stock fécond, qui peut être estimé plus facilement.
▮

puis à regarder si cette relation peut être décrite sous la forme d'une fonction mathématique, et éventuellement à quelles conditions. Nous commentons ensuite les résultats obtenus.

II.4.1 Cas général : pas de fonction stock-recrutement

Nous allons raisonner sur un exemple, ou plutôt un contre-exemple afin de montrer que l'on n'obtient pas immédiatement de fonction stock-recrutement à partir du modèle (II.1,II.2). Réalisons donc quelques simulations sur un modèle de dimension 5 ($n = 4$), pour un jeu de paramètres donné par le tableau II.2.

Indice :	0	1	2	3	4
α	0,8				
ε	0,01 ou 1				
m	0,5	0,2	0,2	0,2	0,2
p	0,2	0	0,1	0,1	0,1
f	–	0	0,5	0,5	0,5
l	–	0	10	20	15

TAB. II.2 *Valeurs des paramètres du modèle avec pré-recrutés pris comme exemple dans les figures II.4 et II.5.*

Interprétation *– Ces paramètres sont plus ou moins réalistes, même s'ils ne correspondent à aucun stock réel. Leur valeur dépend des unités retenues pour les variables du modèle ; m_i dépend par exemple de l'unité de temps (année, mois...), l_i du nombre (en milliers, millions...). Ce qui est important est donc le rapport entre les paramètres exprimés dans la même unité : m_0 est 2,5 fois plus grand que m_1...*

Les mortalités m_i sont prises égales à 0,2 pour le stock, mais m_0 est plus élevée car les larves et juvéniles sont beaucoup plus vulnérables que les adultes. Cela sous-tend néanmoins que le niveau d'exploitation du stock est faible. Les fécondités sont prises égales à 0,5 ou 0, ce qui signifie que dans les stades matures, la moitié des poissons sont des femelles prêtes à pondre. Le temps moyen $1/\alpha$ passé dans chaque classe est supérieur à 1 an, donc nous n'avons pas de classes d'âge proprement dites. Les autres coefficients sont juste sensés. Ils suivent néanmoins le schéma suivant :

- *Classe 0 : juvéniles.*
- *Classe 1 : jeunes adultes immatures ; ni reproduction, ni cannibalisme (trop petits).*
- *Classe 2,3,4 : adultes matures ; même taux de prédation sur la classe 0, même proportion (1/2) de femelles matures, mais différents taux de reproduction ($l_2 < l_4 < l_3$).*

Pour $\varepsilon = 1$, il n'y a qu'une seule échelle de temps. Mais pour $\varepsilon = 0,01$, on peut considérer qu'il y a deux échelles de temps. Cependant nous avons réalisé toutes les simulations sur le système complet (II.1,II.2), sans faire l'approximation (II.16) et sans utiliser le système réduit.

En simulant ce système numérique, on remarque que toutes les trajectoires projetées dans le stock/recrutement (recrutement en fonction du stock fécond) rejoignent tout d'abord rapidement une certaine région du plan puis ensuite évoluent lentement dans cette zone, comme le montre la figure II.4. Pour $\varepsilon = 0,01$, cela correspond aux phases lente et rapide décrites dans la section II.3.1 et cela illustre la validité de cette hypothèse. Mais il est curieux de constater que cela est aussi vrai lorsque $\varepsilon = 1$ et que l'on n'a a priori plus qu'une seule échelle de temps, même si cela est un peu moins net ; cf. figure II.5.

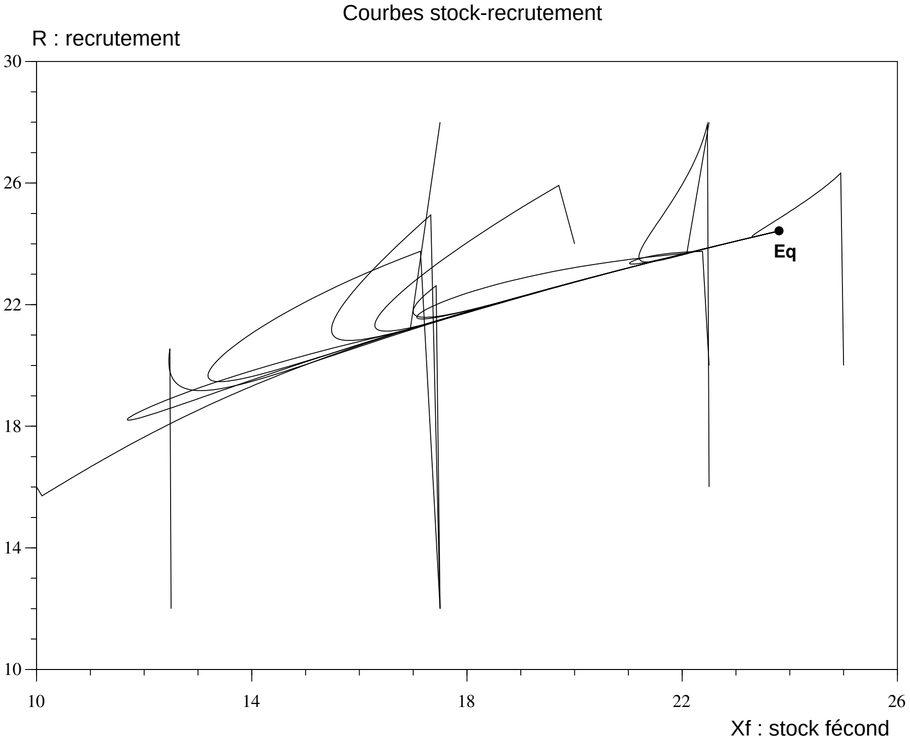


FIG. II.4 *Exemples de trajectoires projetées dans le plan stock-recrutement, obtenues pour le modèle avec pré-recrutés lent-rapide (2 échelles de temps). Elles diffèrent par leurs conditions initiales et convergent vers l'équilibre* ***Eq****.*

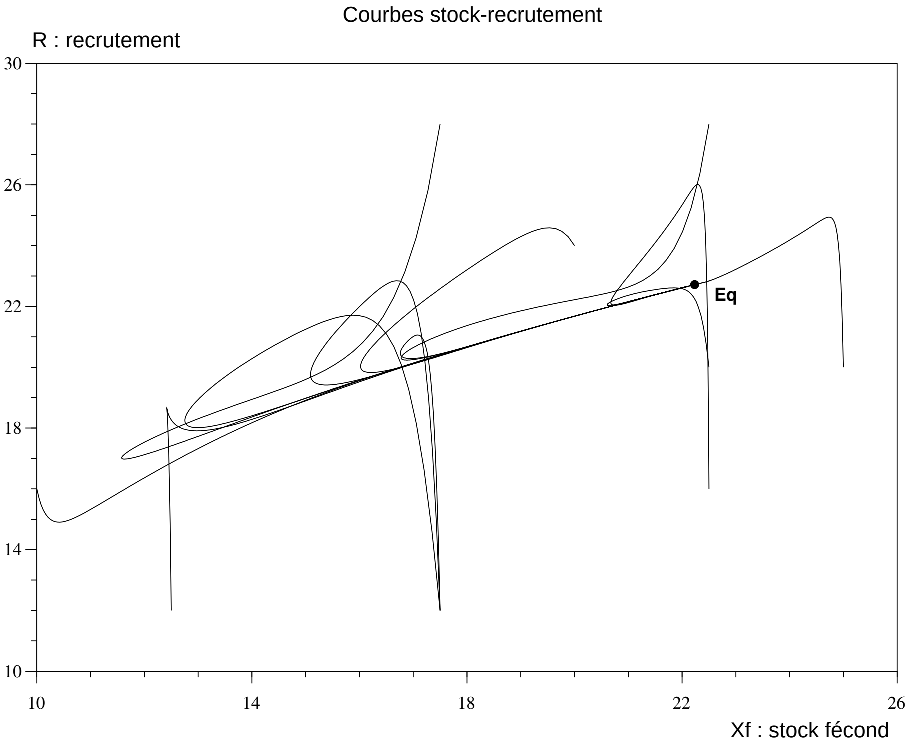


FIG. II.5 *Idem pour le modèle avec pré-recrutés simple (1 échelle de temps)*

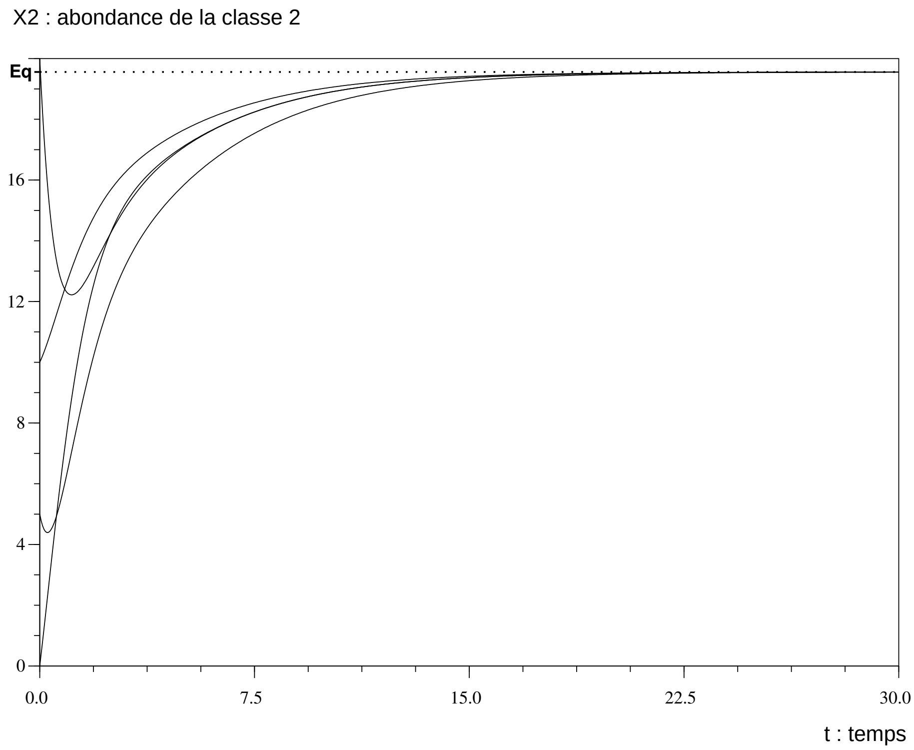


FIG. II.6 *Trajectoires suivies par la classe d'âge 2 pour quelques simulations issues de la figure II.4. Elles convergent toutes vers l'équilibre* ***Eq****.*

Les paramètres du tableau II.2 du modèle avec pré-recrutés vérifient toutes les conditions (II.H$_{1,2,3',5}$), et X_0 dans toutes les simulations vérifie (II.H$_4$). Par conséquent, il existe un équilibre stable et non nul sur le domaine de simulation. Il est représenté par **Eq** sur les courbes et ses coordonnées sont données ci-dessous. Soit donc $\mathcal{X}^*$ cet équilibre. Pour $\varepsilon = 0,01$:

$$\mathcal{X}^* \simeq \begin{pmatrix} 30,56 & 24,45 & 19,56 & 15,65 & 12,52 \end{pmatrix} \text{ ; d'où : } \begin{cases} R \simeq 24,45 \\ X_f \simeq 23,86 \end{cases}$$

et pour $\varepsilon = 1$:

$$\mathcal{X}^* \simeq \begin{pmatrix} 28,34 & 22,67 & 18,13 & 14,51 & 11,61 \end{pmatrix} \text{ ; soit : } \begin{cases} R \simeq 22,67 \\ X_f \simeq 22,12 \end{cases}$$

L'existence de cet équilibre explique la convergence des trajectoires vers un même point, ce qui apparaît clairement sur la figure II.6. En outre, les courbes représentées dans les figures II.4 et II.5 permettent de faire les remarques suivantes :

- La « relation stock-recrutement » n'est pas une fonction car à un stock fécond donné correspondent plusieurs recrutements possibles, $X_f = \varphi(R)$ n'est pas défini de manière unique.

- Elle dépend fortement des conditions initiales : plusieurs répartitions du stock dans les stades donnent un même point initial (X_f, R) sur le graphe mais conduisent à des évolutions différentes du stock fécond et du recrutement.

Cet exemple montre donc que généralement il n'est pas possible d'extraire du modèle avec pré-recrutés (II.1,II.2) une fonction reliant le recrutement au stock fécond.

☞ Les courbes présentées dans les figures II.4 et II.5 sont une illustration partielle du modèle initial, mais elles démontrent que modéliser la dynamique des pré-recrutés n'est pas nécessairement compatible avec la notion habituelle de relation stock-recrutement. Ces courbes en fait la projection de quelques trajectoires du modèle numérique choisi dans le plan stock-recrutement. ▮

II.4.2 Cas particulier : comment retrouver une fonction stock-recrutement ?

Afin de retrouver une relation fonctionnelle entre le stock fécond et le recrutement, nous allons faire l'hypothèse que la dynamique des pré-recrutés est rapide et significative ($\varepsilon \ll 1$). Nous considérons donc le système lent-rapide décrit précédemment (cf. section II.3). L'équation (II.17) donne X_0 en fonction des X_i. Néanmoins pour pouvoir exprimer $R = \alpha X_0$ en fonction de $X_f = \sum f_i X_i$ il faut faire l'hypothèse suivante :

$$\text{Pour tout } i \in \{1, \dots, n\} \ : \quad \text{ou} \begin{cases} f_i = f \ \ p_i = p \ \ l_i = l & \text{(a) vérifié pour au moins un } i \\ f_i = p_i = l_i = 0 & \text{(b)} \end{cases} \tag{II.24}$$

i.e. pour une classe i donnée, les taux de fécondité, de prédation et l'efficacité reproductive doivent respectivement prendre les valeurs communes f, p et l (a) ou être nuls (b). Si l'on sépare ainsi le stock en classes agissant sur les pré-recrutés (a) et classes neutres (b), on peut lors du régime permanent reconstituer une fonction stock-recrutement.

Pour conserver un système bouclé, en accord avec l'hypothèse (II.H$_0$), l et f sont non nuls. Selon les valeurs de p et p_0, on obtient différentes formes de relation stock-recrutement.

1. Si $p_0 = 0$ et $p \neq 0$, on obtient en général exactement une relation type Beverton–Holt (cf. figure I.6) :

$$R = \frac{\alpha l X_f}{m_0 + \frac{p}{f} X_f}$$

On remarque néanmoins que si m_0 est nul, alors le recrutement est constant.

2. Si $p_0 \neq 0$ et $p = 0$, le recrutement ne sature plus comme dans le cas précédent. On obtient une relation stock-recrutement croissante qui a la forme de la fonction racine carrée :

$$R = \frac{\alpha}{2p_0} \left(-m_0 + \sqrt{m_0^2 + 4p_0 l X_f} \right)$$

3. Si $p_0 \neq 0$ et $p \neq 0$, on obtient une courbe strictement croissante et bornée. Son équation est :

$$R = \frac{\alpha}{2p_0} \left(-m_0 - pX_f/f + \sqrt{(m_0 + pX_f/f)^2 + 4p_0 l X_f} \right)$$

En effet, étudions la fonction positive suivante, définie et continue pour tout x positif, avec a et c strictement positifs : $f(x) = -ax - b + \sqrt{(ax+b)^2 + cx}$. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_*^+$ (ou $\mathbb{R}^+$ si $b \neq 0$). Sa dérivée est :

$$f'(x) = -a + \frac{2a(ax+b)+c}{2\sqrt{(ax+b)^2+cx}}$$

La dérivée ne peut pas s'annuler car : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow c^2 + 4abc = 0$. Comme f est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}^+$, nulle en zéro et dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. En outre, son équivalent en l'infini est $\frac{c}{2a}$. Elle est donc bornée.

Il suffit ensuite de reporter ces résultats pour la relation stock-recrutement. Et l'on sait en outre que le recrutement tend vers $\alpha lf/p$ quand le stock fécond tend vers l'infini.

4. REMARQUE : Si $p_0 = 0$ et $p = 0$, le système est linéaire. Reprenons dans ce cas le raisonnement fait précédemment dans la section II.3.1. L'approximation du système lent-rapide (II.16) devient :

$$m_0 X_0 - \sum_{i=1}^{n} f_i l_i X_i \approx 0$$

À condition que m_0 soit non nul, il y a toujours une unique solution positive à cette équation, qui est :

$$X_0 = \frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^{n} f_i l_i X_i$$

On obtient une fonction stock-recrutement si et seulement si $l_i = l$ sauf éventuellement pour quelques indices j où $f_j = l_j = 0$. Alors :

$$R = \frac{\alpha l}{m_0} X_f$$

Il s'agit là d'une relation linéaire entre le stock fécond et le recrutement.

Interprétation *– Nous allons commenter les résultats ci-dessus et les comparer avec les formes classiques de stock-recrutement :* ***Beverton–Holt*** *et* ***Ricker*** *(cf. figure I.6). La discussion est valable pour toute valeur des paramètres respectant le cas étudié : pas de cannibalisme signifie $p = 0$. L'ordre est le même que précédemment.*

1. Avec du cannibalisme parental et sans compétition inter-juvéniles, *nous obtenons exactement une courbe de Beverton et Holt ; mais ces hypothèses sont plus conformes à celles faite par Ricker pour élaborer sa relation stock-recrutement (cf. section I.2.1).*

2. Avec de la compétition et sans cannibalisme, *i.e. plutôt les hypothèses de Beverton–Holt, il n'y a pas de borne supérieure au recrutement ; ce dernier croît de manière illimitée avec la taille du stock fécond. Cela ne reflète aucune relation classique, toutes supposent que les facteurs environnementaux limitent le recrutement.*

3. Avec du cannibalisme et de la compétition, *la courbe obtenue est similaire à celle de Beverton–Holt. Ainsi pour obtenir une relation stock-recrutement croissante et bornée, il faut que le modèle intègre de la prédation parentale sur les juvéniles.*

4. Sans cannibalisme et sans compétition, *la relation entre le stock fécond et le recrutement est linéaire ; et ce quelles que soient les coefficients de mortalité. Cela pourrait correspondre à de la nourriture non limitante pour les pré-recrutés et à des territoires séparés pour les adultes et les juvéniles (donc pas de prédation). L'introduction d'une limitation sur la nourriture ou l'habitat ralentirait juste le recrutement, mais ne le limiterait pas.*

Dans aucun des cas ci-dessus nous n'avons obtenu une courbe de type Ricker. Toutes sont croissantes, la modélisation avec pré-recrutés (II.2,II.1) ne permet pas au recrutement de décroître pour de fortes valeurs du stock fécond.

II.4.3 Commentaires

Ces résultats mettent en évidence qu'il n'existe pas nécessairement de « fonction stock-recrutement » au sens mathématique du terme, ce qui ne signifie pas que qu'il n'y a pas de relation entre ces deux entités. En effet, il est certain que les œufs sont produits par le stock fécond. Mais cela ne signifie pas qu'à partir de la taille du stock fécond, on peut directement exprimer le recrutement qui sera engendré à partir de sa ponte. Et cela même si la transition entre les stades œuf et recrue est très rapide.

Dans le cas de ce modèle avec pré-recrutés, retrouver une relation stock-recrutement revient à réduire le stock en deux groupes de stades, ou super-classes. Au sein d'une super-classe, les stades ne se distinguent entre eux que par leurs termes de mortalité respectifs. Ces super-classes sont caractérisées ainsi :
– *Super-classe 1 :* les stades féconds, qui en plus cannibalisent leur progéniture (pour lesquels $f_i = f, p_i = p, l_i = l$) ;
– *Super-classe 2 :* les autres stades, qui ne se reproduisent pas et n'ont pas d'interactions avec les juvéniles (pour lesquels $f_i = p_i = l_i = 0$).

La relation stock-recrutement, fort utile et pratique pour la gestion des stocks est une notion qui sous-tend des *hypothèses d'uniformité* très fortes, illustrées dans cet exemple de modèle. Elle agrège la population féconde en une variable, d'où une production des œufs relativement uniforme parmi les matures. Et elle résume en une simple relation fonctionnelle une partie du cycle de vie des poissons, depuis la croissance des œufs jusqu'au recrutement ; or cette partie est particulièrement dynamique. Cela explique en partie ses limites.

En outre, les œufs, larves et juvéniles sont particulièrement vulnérables et sensibles à leur environnement. Les *perturbations* dues au milieu ainsi que les actions des autres stocks et espèces sur le recrutement ont été négligées dans ce modèle, mais elles peuvent fortement influer sur le recrutement. Si elles demeurent raisonnables, on peut les considérer comme un bruit, un élément stochastique. Mais elles n'ont pas la même portée que les hypothèses d'uniformité décrites ci-dessus. En effet, si les perturbations environnementales peuvent être considérées comme des bruits de mesure, tout écart aux hypothèses d'uniformité est un bruit de modélisation.

☞ Comme le montre la figure II.7, où seuls quelques points de l'ensemble des couples (X_f, R) sont représentés, on peut obtenir un nuage de points à partir d'un modèle déterministe, sans prendre en compte l'environnement. Tout comme la courbe II.4, cette figure a simplement été obtenue en mesurant quelques points issus de la simulation du modèle avec pré-recrutés, muni des paramètres du tableau II.2 ($\varepsilon = 0,01$) et pour différentes conditions du stock initial.

Ce n'est pas du chaos déterministe comme cela arrive parfois dans les systèmes déterministes discrets ou continus [27, 29], mais la projection de plusieurs trajectoires, issues du même modèle « simple » quasi linéaire, sur un plan particulier de l'espace des états. Dans la figure II.6, l'évolution de l'effectif de la classe 2 est tracée en fonction du temps pour différentes simulations utilisées dans la figure II.4 ; ces trajectoires ne sont visiblement pas chaotiques. ❚

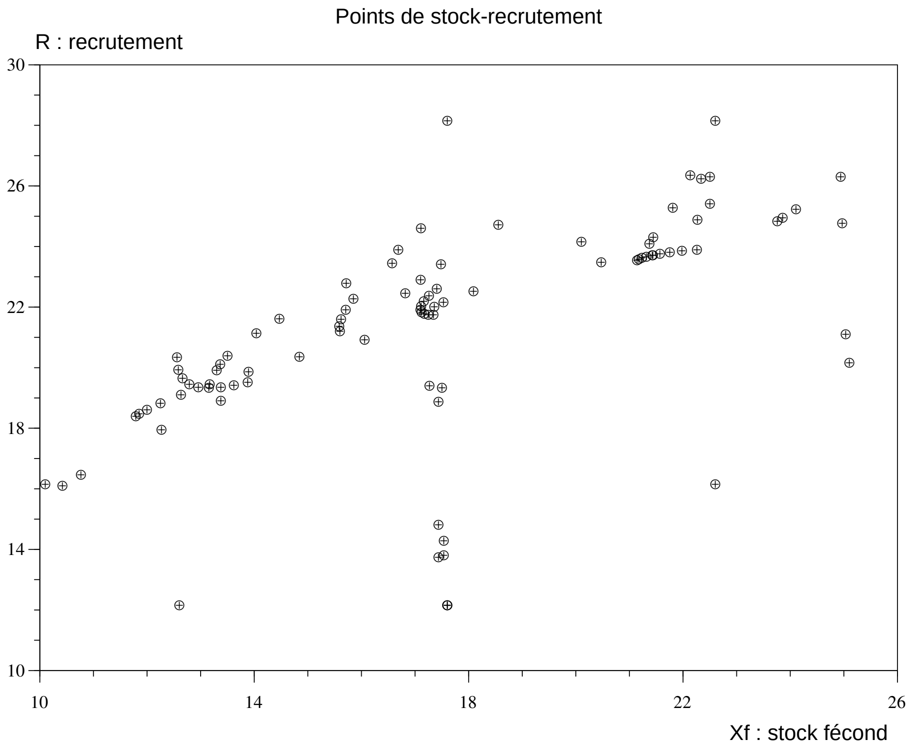


FIG. II.7 *Quelques points stock-recrutement issus de la figure II.4.*

II.5 Conclusions et perspectives

Nous avons donc modélisé une population halieutique structurée en stades, intégrant les pré-recrutés : œufs, larves, alevins, juvéniles. La particularité première du modèle est qu'il explicite divers phénomènes intervenant sur ce stade (compétition, prédation,...). La dynamique de chaque classe de la population est exprimée en temps continu sous forme d'une équation différentielle ordinaire. L'analyse du modèle a permis d'obtenir quelques résultats intéressants. Nous avons montré que sous certaines hypothèses, le système est stable sur le domaine où il est coopératif. En outre, il possède des propriétés particulières d'échelles de temps, qui permettent de simplifier l'étude de sa dynamique.

Le choix d'un modèle structural sous forme d'un système d'équations différentielles présente des avantages, essentiellement au niveau des pré-recrutés. En effet pour pouvoir décrire en temps discret les phénomènes intervenant sur les juvéniles, phase très vulnérable et soumise à une très forte mortalité, il faudrait prendre un pas de temps très petit. Et ce pas de temps doit être appliqué aussi aux autres classes, car celles-ci interagissent avec les pré-recrutés.

On peut reprocher que le temps continu ne respecte pas très bien la notion de classes d'âge. En effet se pose le problème de «l'étalement numérique» : en partant de N individus en classe 0, au bout d'un temps très petit, une proportion infime de la population est présente dans la classe n. Il existe d'autres modèles plus adéquats peut-être, du type «tapis roulant» de NISBET et GURNEY [30] que l'on pourrait adapter. Le principe de ce modèle structuré en stades est représenté dans la figure ci-dessous :

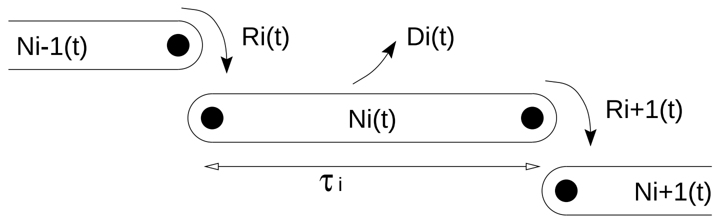


FIG. II.8 *Schéma d'un modèle structuré du type « tapis roulant » selon [30].*

Il se formule de la manière suivante :

$$\dot{N}_i(t) = R_i(t) - R_{i+1}(t) - D_i(t)N_i(t)$$

où :
- R_i : flux entrant dans le stade i (en nombre d'individus/u. de temps)
- D_i : coefficient de mortalité du stade i (en u. de temps$^-1$)
- N_i : nombre d'individus dans le stade i
- τ_i : durée du stade i (en unité de temps)
- t : temps

Le passage dans la classe supérieure est déclenché par l'âge :

$$R_{i+1}(t) = R_i(t-\tau_i) - \int_{t-\tau_i}^{t} D_i(x)\, R_i(t-\tau_i)\, dx$$

Il suffit de prendre tous les τ_i égaux à une unité de temps τ pour que l'on ait des classes d'âge.

Il faut pour pouvoir utiliser ce modèle connaître la condition limite $R_1(t)$, qui s'assimile au recrutement. L'inconvénient majeur réside dans les conditions initiales. On ne peut facilement fixer les $N_i(0)$, car si l'on ne sait pas exactement à quel niveau du stade i ces individus sont répartis (début, milieu, fin ?), on ne peut déterminer à quel instant ils passeront dans le stade supérieur pour l'équation de passage. On doit donc donner les $R_i(0)$ comme conditions initiales du modèle et sa variable d'état est plus le flux R_i que l'effectif N_i.

Par conséquent, le modèle « tapis roulant » est plutôt adapté à une étude en laboratoire où l'on peut à l'instant initial introduire dans chaque classe un nombre donné d'individus. Il n'est pas facilement transposable pour l'étude d'un stock. En outre il nous semble qu'à moins d'étudier l'évolution d'un stock initialement constitué d'une seule cohorte, le problème de « l'étalement numérique » n'est pas très important.

Certaines extensions au modèle avec pré-recrutés pourraient être intéressantes. Pour mieux intégrer la pêche, on peut introduire au niveau des termes de mortalité, un contrôle dépendant du temps, l'effort de pêche $E(t)$, tel que :

$$m_i = m'_i + q_i E(t)$$

m'_i étant le taux de mortalité naturelle et q_i la capturabilité du stade i. Cela permettrait d'étudier et éventuellement de contrôler l'effet de la pêche sur le stock.

Par ailleurs, la pêche étant un phénomène saisonnier, on peut introduire au niveau des termes de ponte une variable forçante périodique $s(t)$, de période une année. Sur une période, on met en évidence une saison de ponte de durée τ dans l'année, en dehors de laquelle aucun œuf n'arrive en phase pré-recrutée.

Stabilité d'un modèle avec recrutement généralisé

Chapitre III

Stabilité d'un modèle avec recrutement généralisé

Contenu

Introduction

Le *but* poursuivi dans ce chapitre est de déterminer la stabilité d' un système dynamique de stock doté d'une structure simple, en temps continu, pour une classe de fonctions recrutement. Les phénomènes pris en compte sont le passage d'une classe à une autre afin de traduire le vieillissement et la mortalité ; ils sont supposés linéaires. La fonction recrutement boucle le système par l'apport de nouveaux individus dans le premier stade à partir des stades féconds de la population. Il s'agit donc d'un système de type LESLIE en temps continu, mais avec un recrutement non linéaire. Le problème d'un système linéaire est que génériquement, soit il converge vers zéro, soit il explose vers l'infini.

L'intérêt de cette étude réside dans la diversité des fonctions recrutement envisagées, comme l'on ne fixe pas de fonction a priori ; d'où le terme *recrutement généralisé*. Naturellement certaines contraintes doivent tout de même être respectées, comme celle élémentaire qui à une population éteinte attribue un recrutement nul. Une particularité intéressante de ces fonctions est qu'elles sont non autonomes, c.-à-d. qu'outre le stock fécond, elles admettent le temps comme variable. Cela autorise des formes de recrutement beaucoup plus variées que les relations stock-recrutement classiques. Le temps en tant que troisième dimension permet ainsi d' échapper aux restrictions que nous avions mises en évidence dans la section II.4 : le cycle de vie des pré-recrutés n'est plus résumé en une simple relation algébrique entre stock fécond et recrutement.

Une étude de stabilité permet d'estimer si une population est viable : pour qu'une population puisse se maintenir à un niveau non nul, un point d'équilibre non nul est nécessaire. Les populations étant soumises à des fluctuations dues à leur environnement, il faut en outre que ce point soit stable. La méthode que l'on utilise dérive du *critère du cercle*. Généralement, elle est plutôt employée pour stabiliser les systèmes par un bouclage de sortie, grâce à un contrôle quelconque choisi dans une classe donnée.

La première section de ce chapitre constitue une présentation du modèle, la seconde expose la technique issue du critère du cercle et la troisième est une application des résultats obtenus à un système particulier.

III.1 Présentation du modèle

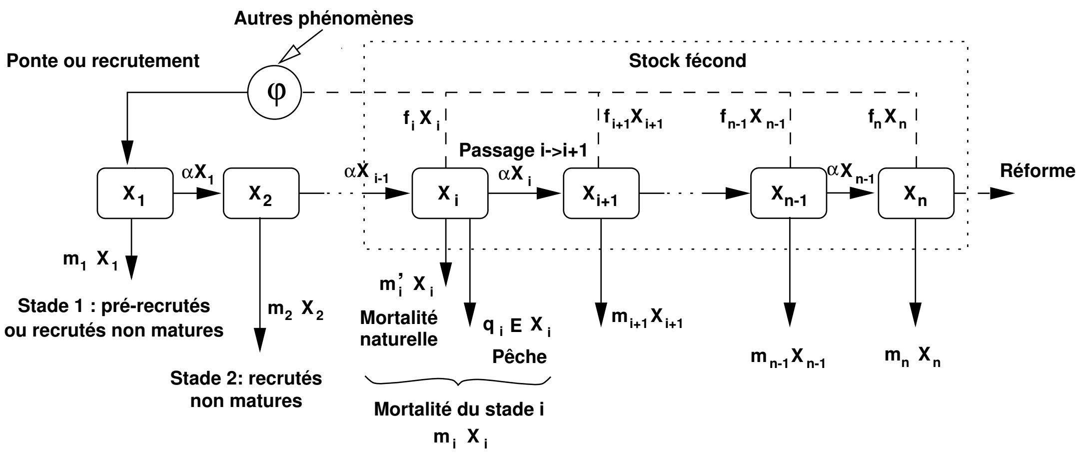
Nous considérons un modèle dynamique de stock à n stades, dont les processus de base, vieillissement et mortalité, s'expriment de manière linéaire. Les stades sont caractérisés par leur effectif, dont la réunion constitue l'état du système.

Pour assurer la régénération du stock, il est nécessaire d'introduire un terme de recrutement. Cela est réalisé par le biais d'un « contrôle » sur le premier stade, ayant une forme bien particulière : il s'agit d'une fonction φ du temps et d'une combinaison linéaire de l'état, représentant le stock fécond. Le modèle résultant est donc non linéaire.

Le schéma de la figure III.1 illustre ce modèle dans un cas où le stade 2 est supposé non fécond ($f_2 = 0$). Il est assez semblable à celui du modèle avec pré-recrutés du chapitre II (figure II.1). Comme dans ce cas, on peut intégrer un terme d'effort de pêche constant et intégré dans le terme de mortalité externe m_i, pour tout $i = 1, \ldots, n$, de la manière suivante :

$$m_i = m_i' + q_i E$$

avec :
m_i	: taux de mortalité totale du stade i	(en temps$^-1$)
m_i'	: taux de mortalité naturel du stade i	(en temps$^-1$)
E	: effort de pêche instantané	(en unité d'effort$\times$temps$^-1$)
q_i	: capturabilité du stade i	(en unité d'effort$^-1$)



Il se formule de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}_1(t) = \underbrace{-\alpha X_1(t)}_{\text{passage}\to 2} - \underbrace{m_1 X_1(t)}_{\text{mortalité}} + \underbrace{\varphi\left(t, \sum_{i=1}^{n} f_i X_i(t)\right)}_{\text{recrutement ou ponte}} \\ \dot{X}_i(t) = \underbrace{\alpha X_{i-1}(t)}_{\text{passage } i-1\to i} - \underbrace{\alpha X_i(t)}_{\text{passage } i\to i+1} - \underbrace{m_i X_i(t)}_{\text{mortalité}} \qquad (i = 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{III.1}$$

avec :
X_i	: effectif du stade i
α	: coefficient de passage d'un stade à l'autre
f_i	: proportion de matures dans le stade i
φ	: fonction recrutement ou ponte

et où la quantité $(\sum_{i=1}^{n} f_i X_i(t))$ représente le stock fécond.

Discussion *Ce modèle s'apparente donc au modèle avec pré-recrutés du chapitre II, où l'on substitue au stade pré-recruté, une « entrée stock-recrutement » dépendant du temps. C'est ce qui constitue l'intérêt de cette approche, car introduire un recrutement dépendant à la fois du stock fécond* et du temps *donne une grande latitude de choix pour sa forme.*

Mais on peut aussi envisager la fonction φ comme une ***fonction de ponte****. Le stade 1 devient alors le stade pré-recruté : il comprend les individus de l'état d'œuf à l'état de jeune recrue. Il correspond alors au stade 0 du modèle avec pré-recrutés.*

Contrairement au cas du modèle avec pré-recrutés, la dynamique du premier stade est linéaire à la base. Elle ne peut donc pas intégrer de terme de compétition ou de prédation parentale, à moins qu'elle ne soit engendrée par le stock fécond. En effet, l'une des seule restrictions sur φ est qu'elle soit fonction d'une combinaison linéaire des effectifs et c'est l'unique non linéarité du modèle. Un terme de compétition intra-juvéniles est donc exclu, mais on peut toujours considérer un cannibalisme du stock fécond sur sa progéniture dans la fonction ponte. Dans ce dernier cas, la fonction φ n'est pas nécessairement positive.

Si l'on choisit d'interpréter φ plutôt comme une fonction ponte qu'une fonction recrutement, il convient de prendre le coefficient de mortalité du premier stade nettement supérieur aux autres, afin de traduire le fait que la mortalité larvaire est très élevée.

Le modèle s'exprime donc comme un modèle d'état linéaire classique, bouclé par un retour de sortie non linéaire. Soit sous une forme automatique :

$$\begin{cases} \dot{X} = A\,X + B\,U \\ Y = C\,X \\ U = \varphi(t, Y) \end{cases} \tag{III.2}$$

où :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \alpha & -\alpha_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{pmatrix}$$

en notant :

$$\alpha_i = \alpha + m_i$$

Contraintes sur la fonction φ :

La fonction φ doit vérifier quelques propriétés, qui découlent de contraintes biologiques liées à l'interprétation de cette fonction, recrutement ou ponte.

Fonction nulle en zéro Tout d'abord, elle doit s'annuler lorsque Y est nul, i.e. :

$$\forall t \quad \varphi(t, 0) = 0 \tag{III.3}$$

En effet lorsque le stock fécond Y est nul, la reproduction n'est pas possible. On est ainsi assuré que les effectifs des différents stades demeurent positifs au cours du temps, car le champ est ainsi rentrant sur toutes les faces $X_i = 0$.

Cette condition assure aussi que zéro est un équilibre du système. Instable de préférence, car il correspond à un stock X épuisé, mais ce n'est pas nécessaire.

Fonction positive En général, φ doit être positive à tout instant et pour tout stock fécond :

$$\forall t \quad \forall Y \geqslant 0 \quad \varphi(t,Y) \geqslant 0 \tag{III.4}$$

Si la fonction φ représente le recrutement ou la ponte, elle ne peut être négative. Néanmoins si l'on considère qu'elle intègre un terme de ponte et de *prédation parentale*, il est possible que parfois, elle soit négative. Mais pour la suite du chapitre, nous excluons ce cas.

Équilibre non nul Le système (III.2) doit, pour éviter l'épuisement, admettre un autre point d'équilibre pour une abondance du stock strictement positive. Si l'on peut trouver des valeurs d'effectif X_i tel que :

$$\varphi(t, \sum f_i X i^*) = \frac{\alpha_1}{\alpha} X_1^* \quad \forall t \qquad \text{avec :} \quad X_{i+1}^* = \frac{\alpha^i}{\prod_{j=1}^{i} \alpha_{j+1}} X_1^* \tag{III.5}$$

le point $X^* = (X_1^*, \ldots, X_n^*)$ est un point d'équilibre non nul. Il s'agit d'une condition de point fixe sur la fonction φ. En effet, cela revient à chercher pour la fonction :

$$\xi(t, X_1) = \frac{\alpha}{\alpha_1} \varphi \left(t, X_1 + \sum_{i=2}^{n} f_i \frac{\alpha^{i-1}}{\prod_{j=2}^{i} \alpha_j} X_1 \right)$$

un point X_1 tel que à tout instant t, $\xi(t, X_1) = X_1$.

On suppose que la condition précédente est vérifiée et l'on note :

$$\alpha_1 X_1^* / \alpha = \varphi(t, \sum f_i X i^*) = \varphi(Y^*) = U^*$$

La stabilité de ce dernier équilibre, nécessaire pour maintenir la population à un niveau non nul dans un milieu fluctuant, fait l'objet de la section suivante.

III.2 Critère du cercle

Pour stabiliser le système décrit ci-dessus, nous allons utiliser le critère du cercle. Le théorème suivant est une « version graphique » de ce théorème pour une fonction φ scalaire, au sens où il fait intervenir le diagramme de NYQUIST associé au système linéaire.

Théorème 5 (Critère du cercle d'après [22])
Considérons un système représenté par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u \\ y = C\,x \\ u = -\psi(t, y) \end{cases} \tag{III.6}$$

x étant un vecteur de $I\!R^n$, u et y deux scalaires de $I\!R$. Supposons en outre que $\{A, B, C\}$ est une réalisation minimale de la fonction de transfert $G(s)$ associée au système linéaire non bouclé et que la fonction ψ satisfait globalement la condition de secteur suivante :

$$\exists a, b \in I\!R\ (a < b) \quad / \quad ay^2 \leqslant y\psi(t, y) \leqslant by^2 \quad \forall t \geqslant 0,\ y \in I\!R \tag{III.7}$$

*Alors le système est **absolument stable** si l'une des conditions suivantes est satisfaite, selon le cas :*

1. *Si $0 < a < b$, le diagramme de NYQUIST de $G(i\omega)$ n'entre pas dans le disque $D(a, b)$ et le contourne m fois dans le sens trigonométrique, où M est le nombre de pôles à partie réelle positive de $G(s)$.*
2. *Si $a = 0 < b$, $G(s)$ est HURWITZ et le diagramme de NYQUIST de $G(i\omega)$ est à droite de la ligne $\Re(s) = -1/b$.*
3. *Si $a < 0 < b$, $G(s)$ est HURWITZ et le diagramme de NYQUIST de $G(i\omega)$ est à l'intérieur strictement du disque $D(a, b)$.*

Le disque $D(a, b)$ est défini par son diamètre, délimité par les points $(0, -1/a)$ et $(0, -1/b)$ dans le plan du diagramme de NYQUIST.

Si la condition de secteur n'est vérifiée que pour y dans un intervalle fermé $[y_{min}, y_{max}]$ ($y_{min} < 0 < y_{max}$) de $I\!R$, alors les conditions ci-dessus réalisent la stabilité absolue dans un domaine fini. $\Diamond$

La résultat de ce théorème *dans un domaine fini* est un résultat de stabilité locale. Néanmoins, si la condition de secteur (III.7) n'est vraie que sur un intervalle $[y_{min}, y_{max}]$, mais que l'on peut montrer qu'il existe un domaine invariant D de l'espace des variables d'état pour lequel cette condition est vérifiée pour toute fonction ψ, alors la stabilité absolue est garantie non pas localement, mais sur la totalité de ce domaine invariant.

En effet, la démonstration du critère du cercle présentée par KHALIL [22] suit les étapes suivantes. On suppose tout d'abord que A est HURWITZ et que ψ vérifie la condition de secteur (III.7) avec $a = 0$. On considère une fonction de la forme :

$$V(x) = x' P x$$

On utilise le lemme de KALMAN–YAKUBOVICH–POPOV pour trouver que V est une fonction de LYAPUNOV. Il permet de montrer l'existence d'une telle matrice P symétrique définie positive et d'un scalaire strictement positif ϵ, vérifiant grâce à la condition de secteur l'inégalité suivante :

$$\dot{V}(x) \leqslant -\epsilon x' P x$$

si et seulement si la matrice :

$$Z(s) = I + aC(sI - a)^{-1}$$

est strictement positive réelle.

Les restrictions sur A et a peuvent être levées grâce à la transformation en boucle (loop transformation). On en déduit alors le critère du cercle dont l'interprétation graphique dans le cas scalaire est donnée ci-dessus.

Nous faisons à présent l'hypothèse que la condition de secteur (III.7) n'est vérifiée que pour y dans un intervalle $[y_{min}, y_{max}]$. Supposons en outre que l'on peut trouver un domaine D de $I\!R^n$, dans lequel le système (III.6) est invariant, i.e. :

$$\forall \psi \text{ admissible, } t \qquad x(0) \in D \quad \Rightarrow \quad x(t) \in D$$

Les trajectoires du système demeure dans D. On peut donc utiliser la même fonction V que précédemment. Pour montrer que c'est encore une fonction de LYAPUNOV, il suffit qu'en tout point x de D l'inégalité de la condition de secteur soit vérifiée pour $y = Cx$ et à tout instant ; i.e., il suffit que la projection par C du domaine D soit incluse dans $[y_{min}, y_{max}]$. On montre alors de la même manière l'absolue stabilité du système dans D.

On en déduit donc le corollaire suivant :

Corollaire au théorème 5
Supposons que la condition de secteur (III.7) n'est vérifiée que pour y dans un intervalle fermé $[y_{min}, y_{max}]$ ($y_{min} < 0 < y_{max}$) de $I\!R$. Supposons en outre qu'il existe un domaine D de $I\!R^n$, tel que $C(D) = \{y = Cx; x \in D\}$ soit inclus dans $[y_{min}, y_{max}]$ et invariant pour toute fonction ψ dans le secteur réduit. Alors les conditions 1, 2 et 3 du théorème 5 réalisent chacune l'absolue stabilité sur D du système (III.6). ◊

➤ Le système linéaire non bouclé de population dynamique associé à (III.2) est HURWITZ. En effet, toutes les valeurs propres α_i de la matrice A sont réelles strictement négatives, d'où la stabilité du système linéaire.

> ☞ Comme A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les coefficients de la diagonale. ▮

➤ Grâce au critère de KALMAN, on peut montrer qu'il est *commandable* car α est non nul et *observable* si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$\begin{gathered} \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad / \quad \sum_{j=i}^{n} f_j \mathcal{I}_j \neq 0 \\ \text{avec : } \mathcal{I}_i = 1 \quad \text{et pour } j > i : \mathcal{I}_j = \prod_{k=i+1}^{j} \frac{\alpha}{\alpha_k - \alpha_i} \end{gathered} \tag{III.8}$$

Sinon, il existe un mode inobservable. Comme par exemple si f_n est nul, ce qui est assez intuitif ; en effet, notre modèle est presque un modèle en boucle, et si l'on coupe le retour entre la classe n et la classe 1, on ne peut pas déduire l'état du stade n à partir des autres états. Nous supposons donc que cette condition (III.8) est vérifiée. Ainsi $\{A, B, C\}$ est une réalisation minimale associée au système linéaire non bouclé de population dynamique.

☞ Un système est dit *commandable* si, partant d'un état initial x_0 quelconque, il est possible de trouver un contrôle u en temps fini permettant d'amener cet état en tout point x_1 de l'espace. C'est une notion liée, comme son nom l'indique au fait que l'on maîtrise le système. Grâce au contrôle, on peut amener un système commandable où l'on veut.

Un système est dit *observable* si, en supposant que l'on observe la sortie y à tout instant, il est possible de trouver un contrôle u en temps fini qui permette de déterminer l'état à l'instant initial x_0. La sortie est la variable que l'on observe. La notion d'observabilité est liée au fait que connaissant cette sortie, à condition d'exciter un peu le système grâce au contrôle, on peut en déduire son état.

Si le système est commandable et observable, on dit que c'est une *réalisation minimale*. ∎

➤ La fonction de transfert associée à ce même système est :

$$\begin{aligned} G(s) &= C\,(s\,I - A)^{-1}\,B \\ &= \frac{f_1\alpha(s+\alpha_2)\cdots(s+\alpha_n) + f_2\alpha^2(s+\alpha_3)\cdots(s+\alpha_n) + \cdots}{\prod_{i=1}^{n}(s+\alpha_i)} \\ &\qquad + \frac{f_{n-1}\alpha^{n-1}(s+\alpha_n) + f_n\alpha^n}{\prod_{i=1}^{n}(s+\alpha_i)} \end{aligned} \tag{III.9}$$

On peut retrouver ici les conditions d'observabilité. Si le numérateur de la fonction de transfert s'annule pour $s = -\alpha_i$, il y a simplification et un pôle disparaît de la fonction de transfert, correspondant à un mode inobservable du système ; cela donne en outre les relations (III.8).

☞ La *fonction de transfert* est un autre mode de représentation d'un système automatique linéaire. En opposition avec la représentation d'état ou interne par les matrices A, B, C, il s'agit d'une représentation externe ou entrée/sortie. En effet, dans un espace spécial dit fréquentiel, la sortie est obtenue comme le produit de la fonction de transfert et du contrôle (= entrée).

C'est une représentation moins riche que l'approche d'état, car elle ne permet pas de voir les modes inobservables et incontrôlables du système. Comme l'étude de stabilité est menée par l'approche externe, on comprend pourquoi il faut s'assurer au préalable que le système est une réalisation minimale : un mode inobservable instable pourrait échapper à l'étude. ∎

➤ Pour appliquer le théorème ci-dessus au système de population dynamique (III.2) aisément, nous réalisons le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} x &= X - X^* \\ y &= Y - Y^* = Y - CX^* \\ u &= U - U^* = -\psi(t,y) \quad \Rightarrow \quad \psi(t,y) = \varphi(Y^*) - \varphi(t, y+Y^*) \end{aligned}$$

ce qui nous donne un modèle similaire à celui du théorème 5 :

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u \\ y = C\,x \\ u = -\psi(t,y) \end{cases} \tag{III.10}$$

Le point d'équilibre qui nous intéresse est décalé à l'origine, celui correspondant à un stock épuisé en $-Y^*$.

➤ Dans le critère du cercle, la condition la plus intéressante pour notre système est la troisième, au sens où elle autorise le plus grand choix de relation stock-recrutement. Mais on ne pourra l'appliquer que sur un domaine fini. En effet, la fonction ψ doit pouvoir passer par le point où le stock est épuisé, soit : $(-Y^*, \varphi(Y^*))$. Pour vérifier si la condition 3 du théorème, nous allons procéder sur un exemple. Tracer le diagramme de NYQUIST de la fonction de transfert (III.9) implique des calculs trop lourds pour qu'il soit intéressant de résoudre le cas général.

> ☞ Tracer le diagramme de NYQUIST d'une fonction de transfert G revient à tracer dans le plan complexe la courbe paramétrée ayant pour équation $G(i\omega)$, où ω évolue entre $-\infty$ et $+\infty$; comme la courbe est symétrique par rapport à l'axe des réels, l'intervalle $[0, +\infty]$ suffit. ▮

III.3 Application sur un exemple

Nous choisissons d'appliquer le théorème 5 à un système à trois stades muni des paramètres suivants :

$$\begin{gathered} f_1 = f_2 = 0 \quad f_3 = 1 \\ \alpha = 1 \\ m_1,\ m_2,\ m_3 \quad \text{positifs quelconques} \end{gathered}$$

Le modèle (III.10) devient, avec $\alpha_i = 1 + m_i$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - \alpha_2 x_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 - \alpha_3 x_3 \\ \ \ y = x_3 \\ \ \ u = -\psi(t, x_3) \end{cases} \tag{III.11}$$

Interprétation *– Chaque individu de la population passe en moyenne une unité de temps par stade ($1/\alpha$) ; on peut donc considérer (III.11) comme un modèle en classes d'âge. Vu la structure retenue, la première classe correspond aux juvéniles, la seconde à des adultes non féconds et la troisième aux adultes matures. La fonction φ est alors une fonction de ponte (pas de recrutement) et pour une application numérique éventuelle on prendra m_1 très grand par rapport aux autres coefficients de mortalité afin de traduire la vulnérabilité des juvéniles.*

Ces paramètres vérifient bien les conditions de commandabilité et d'observabilité (III.8). La fonction de transfert associée à ce modèle est :

$$G(s) = \frac{1}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)(s+\alpha_3)}$$

Le diagramme de Nyquist qui en découle est représenté dans la figure III.1. Une petite étude est réalisée pour connaître la forme générale de ce diagramme et plus particulièrement la borne sur le coefficient a de la condition de secteur (III.7), car celle-ci limite fortement la forme de la fonction de ponte (cf. figure III.2).

III.3.1 Détermination du diagramme de Nyquist

Soit $s = i\omega$. La fonction de transfert a alors pour partie réelle :

$$\Re = Re[G(i\omega)] = \frac{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\omega^2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3}{(\omega^2+\alpha_1^2)(\omega^2+\alpha_2^2)(\omega^2+\alpha_3^2)}$$

et pour partie imaginaire :

$$\Im = Im[G(i\omega)] = \frac{\omega^3 - (\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)\omega}{(\omega^2+\alpha_1^2)(\omega^2+\alpha_2^2)(\omega^2+\alpha_3^2)}$$

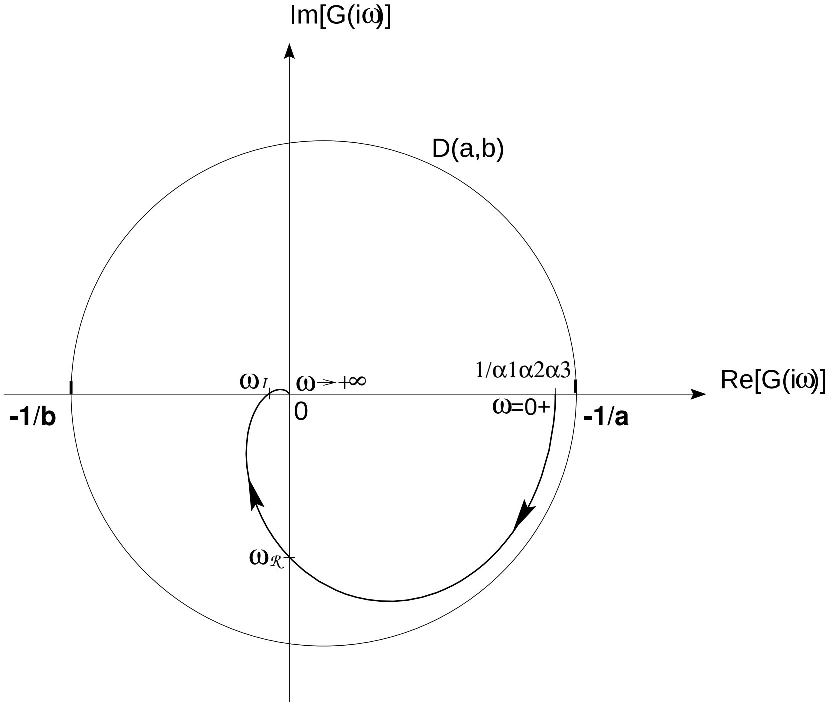


FIG. III.1 *Diagramme de* NYQUIST *du modèle de population dynamique à trois classes d'âge.*
Identification d'un disque $D(a,b)$ vérifiant la condition 3 du théorème 5.

Limites Quand ω tend vers 0^+, la partie réelle tend vers $1/\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ et la partie imaginaire vers 0^-. Quand ω tend vers $+\infty$, la partie réelle tend vers 0^- et la partie imaginaire vers 0^+.

On montre en outre que la partie réelle est toujours strictement inférieure à $1/\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ quand ω n'est pas nul. D'où la contrainte suivante pour le coefficient a de la condition de secteur(III.7) :

$$a < -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \tag{III.12}$$

Intersection avec les axes Outre ces points limites, il n'existe qu'un seul point d'intersection avec l'axe réel, obtenu pour $\omega_{\Re}$, et un seul point d'intersection avec l'axe réel pour $\omega_{\Im} < \omega_{\Re}$, avec :

$$\omega_{\Re} = \sqrt{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3} \qquad \omega_{\Im} = \sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}}$$

On en déduit donc la forme générale du diagramme de NYQUIST associé au système de population à trois classes d'âge, qui est représentée sur la figure III.1.

Le résultat principal de cette étude est que l'on peut bien vérifier la condition 3 du critère du cercle, qui est la plus intéressante pour les fonction ponte ou recrutement : pente a de la condition de secteur (III.7) négative strictement et pente b positive strictement. La condition (III.12) permet en outre de borner la pente a.

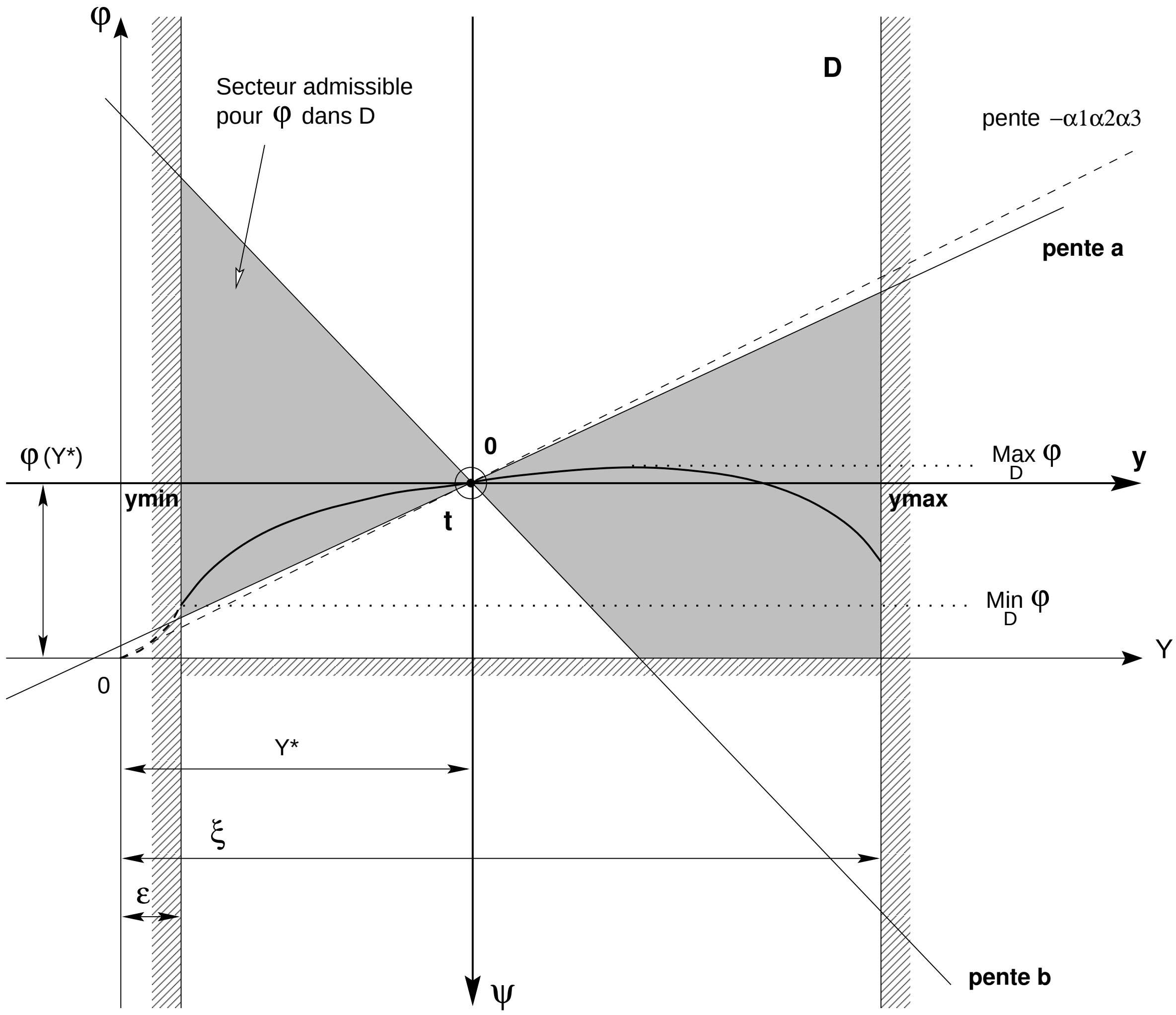


FIG. III.2 *Condition de secteur (III.7) pour la fonction ponte du modèle de population dynamique à trois classes d'âge, avec en outre les contraintes (III.3,III.4). L'axe des temps est supposé orthogonal à la figure.*

Remarque : Nous n'avons pas plus approfondi la détermination de la pente b car cela engendre des calculs assez lourds, alors qu'il est très simple de trouver une borne à b sur un exemple numérique. En outre, comme le montre la figure III.2, sa valeur est moins contraignante car les formes classiques de recrutement sont des courbes qui saturent. En gros, il faut prendre b assez petit pour que le diagramme de Nyquist soit dans le disque $D(a,b)$ (cf. figure III.1). ▮

III.3.2 Application du critère du cercle

On remarque que la condition (III.12) exclut du secteur le point d'équilibre correspondant au stock épuisé. C'est bien naturel car il n'est pas possible de garantir l'absolue stabilité du système sur $\mathbb{R}^3$ s'il a la liberté de passer en $X_1 = X_2 = X_3 = 0$, correspondant à $Y = 0$. Mais selon la contrainte biologique (III.3), la fonction φ doit passer par zéro. Nous devons donc nous limiter à un domaine fini excluant ce point, i.e. tel que :

$$y_{min} > -Y^*$$

avec les notations du théorème.

D'après le corollaire au théorème 5, pour que les résultats d'absolue stabilité soient valables non pas localement mais sur un domaine de $\mathbb{R}^3$, il faut que ce domaine soit invariant. Vérifions donc que l'on peut trouver un tel domaine.

Soit le domaine $D = [\varepsilon_1, \xi_1] \times [\varepsilon_2, \xi_2] \times [\varepsilon_3, \xi_3]$ dans le repère initial où les ε_i et les ξ_i sont positifs. Pour que le champ soit rentrant sur les bornes inférieures du domaine D, il suffit que :

$$\forall t \quad \min_{X \in D} \varphi(t, CX) > \varepsilon_1 \alpha_1 > \varepsilon_2 \alpha_1 \alpha_2 > \varepsilon_3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$$

et sur les bornes supérieures :

$$\forall t \quad \max_{X \in D} \varphi(t, CX) < \xi_1 \alpha_1 < \xi_2 \alpha_1 \alpha_2 < \xi_3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$$

Ces conditions sont assurées par la condition de secteur (III.7), mais uniquement si sur le domaine D, l'hypothèse suivante est vérifiée : le minimum de la fonction φ est atteint à gauche de Y^* et le maximum à droite. En effet comme $CX = X_3$, la condition de secteur garantit que, pour CX à gauche de Y^* :

$$\min_{X \in D} \varphi(t, CX) > \varepsilon_3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$$

On peut suivre un raisonnement analogue pour le maximum. Ainsi, si la condition de secteur et l'hypothèse sur les extrema de φ sont vérifiées, tout domaine D tel que :

$$\varepsilon_1 \alpha_1 > \varepsilon_2 \alpha_1 \alpha_2 > \varepsilon_3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$$
$$\xi_1 \alpha_1 < \xi_2 \alpha_1 \alpha_2 < \xi_3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$$

vérifie les conditions de champ rentrant aux bornes.

Vu que la fonction de ponte φ passe par les points zéro et $\varphi(Y^*) > 0$, en prenant les ε_i et les ξ_i suffisamment petits, l'hypothèse sur les extrema de φ est vérifiée et on en déduit un domaine D invariant.

Au niveau de la fonction φ, comme Y est une combinaison linéaire positive des X_i, cela revient à prendre :

$$Y > \sum f_i \varepsilon_i = \varepsilon_3 = \varepsilon \quad \text{et} \quad Y < \sum f_i \xi_i = \xi_3 = \xi$$

et il suffit donc que la condition de secteur soit vérifiée sur l'intervalle :

$$[y_{min} = -Y^* + \varepsilon\,,\; y_{max} = -Y^* + \xi]$$

NB : Les différentes hypothèses sont représentées sur la figure III.2.

On a donc déterminé un domaine invariant D dans lequel toutes les hypothèses du critère du cercle sont vérifiées. Grâce au diagramme de NYQUIST représenté sur la figure III.1, on a aussi déterminé un secteur (III.7) dont la pente a doit vérifier la condition III.12 et donc la pente b doit être positive strictement et « pas trop grande » (voir remarque précédente). Toute fonction recrutement ou ponte ayant son graphe dans ce secteur sur D, garantit l'absolue stabilité de l'équilibre non nul du système III.2. Un exemple d'une telle fonction est donné dans la figure III.2.

III.4 Conclusion

Cette étude montre qu'à partir d'un modèle de stock structuré assez simple, mais doté d'une fonction stock-recrutement très générale, il est possible de prouver la stabilité de l'équilibre non nul du système halieutique. On s'assure ainsi de la pérennité du stock, même soumis à des fluctuations du milieu.

L'intérêt principal de ce résultat est qu'il est valable pour un large gamme de recrutement ou de ponte : les formes classiques de BEVERTON–HOLT et RICKER tout d'abord (cf. section I.2). Mais aussi des courbes qui oscillent, ont des comportements bruités... L'absolue stabilité est robuste face aux perturbations. C'est tout particulièrement intéressant, car les œufs larves et juvéniles sont très vulnérables et fortement soumis à leur environnement.

Mais il ne faut pas non plus négliger le second avantage de cette approche : l'absolue stabilité est assurée aussi pour des fonctions recrutement non autonomes. Grâce à cette dimension supplémentaire qu'est le temps, on peut construire des fonctions recrutement ou ponte saisonnières. Ou encore on peut actualiser les paramètres d'une relation plus classique au cours du temps, afin de tenir compte des modifications du milieu ou du comportement du stock. Et à chaque fois, il suffit de vérifier la condition de secteur représentée sur la figure III.2 pour assurer l'absolue stabilité du système.

REMARQUE : Comme dans la section II.4 il est possible d'observer dans le plan (Y, φ) de la figure III.2 des allures assez chaotiques car il s'agit des projections des véritables trajectoires. ▮

Contrôle sur des modèles halieutiques

Chapitre IV

Contrôle sur des modèles halieutiques

Contenu

Introduction

Dans ce chapitre, nous appliquons des techniques de contrôle pour résoudre des problèmes dans un contexte halieutique. Les résultats obtenus ne sont pas appliqués à une pêcherie particulière, mais dans chacun des cas, nous nous sommes attachés à bien mettre en évidence leur applicabilité et à faire en sorte qu'ils soient aussi réalistes que possible.

Dans les trois cas présentés, le but recherché est de réguler la pêcherie, i.e. de lui faire suivre un comportement désigné a priori. La première section présente un exemple de poursuite de consigne, qui consiste à élaborer une loi de commande sur le système pêche pour que la capture suive le quota qui lui est associé. La résolution de ce problème est simple, mais elle constitue une bonne introduction au contrôle au sens automatique.

Les deux sections suivantes sont plus développées. Dans les deux cas, on cherche à réguler la pêcherie de manière à réduire les écarts d'effort et de capture autour d'un niveau d'exploitation soutenable de référence. Ce critère a une motivation essentiellement économique : il permet d'assurer des revenus ainsi que des coûts à peu près fixes aux pêcheurs. Mais la résolution du problème posé diffère : dans la deuxième section, il s'agit de techniques de contrôle optimal, alors que dans la troisième section on définit une approche dite par domaine invariant.

IV.1 Exemple simple de poursuite de consigne

Cet exemple introduit une *poursuite de consigne*. De manière générale, cela consiste à élaborer une loi de contrôle sur le système, afin que la sortie (ou une partie de la sortie) de ce dernier suive la consigne indiquée. Le système que nous considérons ici est le « système stock exploité » très simple, comme par exemple celui présenté dans la figure I.11). La consigne de sortie est prise sous forme de quota de pêche.

Tout d'abord, nous allons présenter une synthèse intuitive de la loi de commande, puis ensuite nous allons vérifier que le système ainsi commandé remplit bien notre objectif : suivre le quota de pêche.

IV.1.1 Élaboration a priori de la loi de contrôle

Notre but dans cet exemple est de suivre la consigne : *capture* = *quota*, sur un stock exploité donné. Le contrôle sur notre système est l'effort de pêche E. On cherche donc à élaborer un effort qui, appliqué au stock de poissons, permette de suivre la consigne. Pour cela on suit le schéma suivant (cf. figure IV.1) :

- On introduit un comparateur dans notre système, qui calcule l'erreur : $\varepsilon = Y_r - Y$.
- Puis on multiplie cette erreur par un gain A, qui sert d'amplificateur. Si l'on suppose que : $\dot{E} = A(Y_r - Y)$, la loi d'effort qui dérive de cette équation a, a priori, bien le comportement voulu. En effet, si le quota est dépassé, l'effort diminue (et donc a priori la capture aussi), tandis qu'il augmente si le quota n'est pas encore atteint.
- Il suffit donc finalement d'intégrer ($\int$) cette erreur amplifiée pour obtenir le contrôle E.

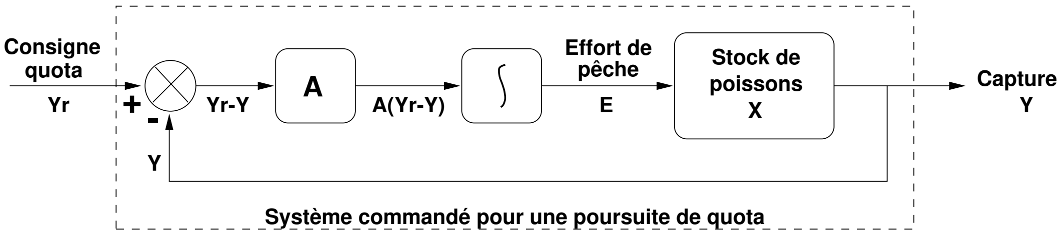


FIG. IV.1 *Schéma d'un système halieutique avec poursuite de consigne « quota ».*

Le régulateur ainsi créé semble adéquat. Il faut néanmoins vérifier que l'erreur tend bien vers zéro. Pour cela il faut analyser le système et étudier la stabilité de ses équilibres.

IV.1.2 Analyse du système commandé

Vérifions à présent que le comportement du système bouclé est bien conforme à notre objectif, à savoir poursuite de la consigne « quota ». Comme modèle pour le stock, on prend le modèle de SCHAEFER (1954), ce qui nous donne le système complet commandé suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = rX\left(1 - \dfrac{X}{k}\right) - qEX \\ \dot{E} = A(Y_r - Y) \\ Y = qEX \end{cases} \tag{IV.1}$$

Pour l'étude de ce système, nous avons choisi des valeurs simples pour les paramètres. Elles ne sont pas nécessairement réalistes, aucune unité n'est précisée, mais ce modèle sans dimension permet une meilleure compréhension et des calculs allégés. Soient donc :

$$\begin{aligned} r = k = q = 1 \\ A = 3 \\ Y_r = 0,2 \end{aligned} \tag{IV.2}$$

Le système initial (IV.1) devient avec ces valeurs de paramètres le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= X(1 - X) - EX \\ \dot{E} &= 3(0,2 - EX) \\ Y &= EX \end{aligned} \tag{IV.1'}$$

Les points d'équilibre sont les points qui annulent $\dot{X}$ et $\dot{E}$. Ils vérifient donc : $E + X = 1$ et $EX = 0,2$; ou encore l'équation suivante : $X^2 - X + 0,2 = 0$. Il y a donc deux points d'équilibre, qui sont bien dans le plan réel, avec des coordonnées strictement positives, et qui sont :

Équilibre 1 (Eq 1)	Équilibre 2 (Eq 2)
$X_1^* = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$	$X_2^* = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$
$E_1^* = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$	$E_2^* = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

Les points qui vérifient la consigne *capture = quota* sont les points de l'isocline $\dot{E} = 0$; en particulier les points d'équilibre, qui déterminent le comportement asymptotique du système. Il faut donc à présent étudier à partir de quelles conditions initiales il est possible d'atteindre ces points d'équilibre, soit leur stabilité. Pour cela, nous allons adopter une résolution graphique dans le plan de phase (cf. figure IV.2).

☞ Si l'on se place dans le plan de phase, i.e. dans le plan où l'on a l'effort sur un axe et l'abondance du stock sur l'autre, on peut déterminer le sens de variation de chacune des variables, selon divers secteurs du plan. On matérialise la résultante des variations en X et en E par une flèche. On peut ainsi voir si les points d'équilibre sont stables et d'où il est possible de converger vers eux. ▮

Grâce à cette représentation graphique, on voit donc que le point d'équilibre *Eq 1 est un nœud stable* et le point d'équilibre *Eq 2 un point selle*, donc instable. En ces deux points la capture est égale au quota et l'on est à l'équilibre. Il est intéressant de remarquer que le point stable est celui pour lequel l'abondance du stock est plus élevée et l'effort de pêche plus faible.

Les secteurs du plan sont délimités par les isoclines Δ_1, Δ_2 et une séparatrice Σ. Σ est la trajectoire particulière qui converge vers le point d'équilibre instable Eq 2. Elle est obtenue par simulation numérique. Comme toute trajectoire, elle ne peut être franchie. À gauche de cette séparatrice (zone hachurée), à partir des secteurs S1, S2 et S3, toutes les trajectoires tendent vers un stock nul et un effort très grand. En fait même lorsque le stock est nul, l'effort continue d'augmenter indéfiniment. Pour éviter ce phénomène, on peut poser la contrainte suivante :

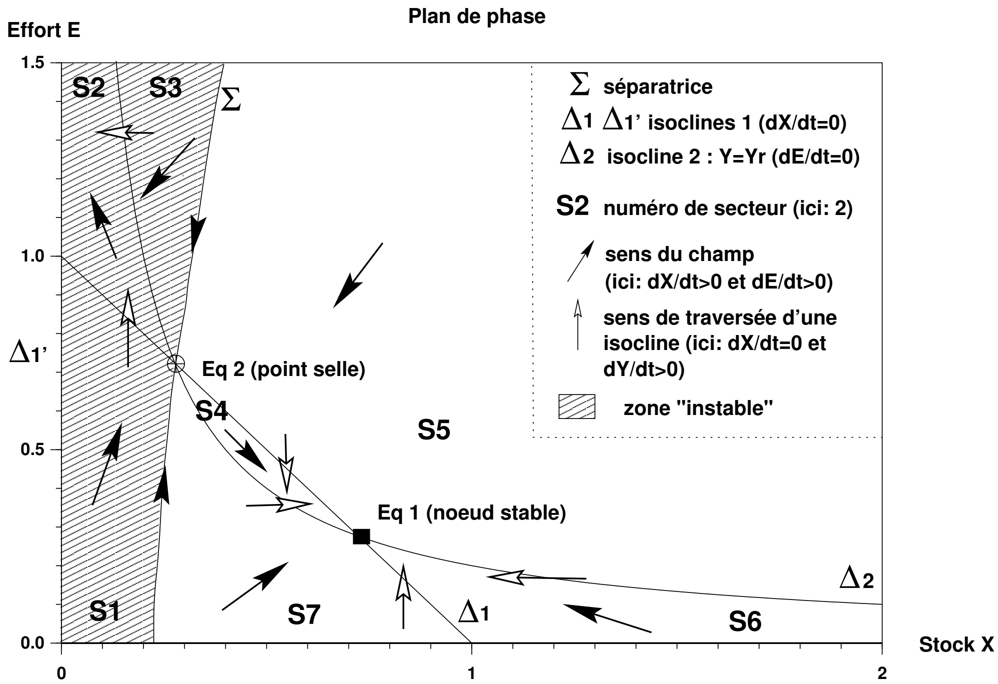


FIG. IV.2 *Plan de phase associé au système halieutique (IV.1′) avec poursuite de consigne « quota ».*

$$X = 0 \Rightarrow E = 0$$

À droite de la séparatrice, à partir des secteurs S4, S5, S6 et S7, les trajectoires convergent toutes vers l'équilibre stable Eq 1.

IV.1.3 Interprétation des résultats

On a donc défini deux zones dans le plan de phase séparées par la séparatrice Σ. La première zone est celle dite *zone « instable »* (secteurs 1-3, zone grisée) ; elle est caractérisée par un stock d'effectif faible. La seconde est la *zone de convergence* ; elle recouvre les stocks plus abondants.

Discussion *Si le stock est bas (zone instable), quel que soit le niveau d'exploitation appliqué, avec la loi de contrôle élaborée ci-dessus on va totalement épuiser le stock. En général dans ce cas, la capture est inférieure au quota (secteurs S1-2) ; pour réaliser la consigne, on augmente alors l'effort de pêche, et ainsi on parvient à un effort très grand mais un stock nul. Toujours avec un stock bas, il arrive que le quota soit dépassé (secteur S3) ; dans ce cas, l'effort commence par diminuer, mais le stock aussi car il est surexploité ; ainsi on repasse sous le quota (secteur S2), l'effort augmente, le stock s'épuise et l'on se retrouve dans le cas précédent : effort très grand, stock nul.*

Si au contraire le stock est important (zone de convergence), la loi de contrôle élaborée ci-dessus permet d'atteindre le quota au bout d'un certain temps. Elle diminue l'effort et la capture dans les secteurs S4-5 et les augmente dans les secteurs S6-7. Ainsi le système tend vers des valeurs d'effort, de stock et de capture respectant le quota de pêche, valeurs d'équilibre données par Eq 1. C'est un niveau d'exploitation intéressant car il correspond à un stock assez élevé. En outre, ce contrôle est assez robuste face à des petites perturbations, car Eq 1 est un point stable sur la zone de convergence.

En conclusion, le contrôle synthétisé ci-dessus remplit bien son objectif *capture* = *quota* à condition que le stock initial ne soit pas à un niveau trop faible au départ. En effet, le contrôle consiste à augmenter l'effort si la capture est au-dessous du quota et vice versa ; à partir d'une faible abondance, une telle politique mène à l'épuisement du stock.

IV.2 Régulation par contrôle optimal

Cette section fait directement suite à mon stage de DEA [48]. Elle constitue l'application de certains résultats issus de ces travaux à un stock particulier : le flétan du Pacifique.

Le but recherché est de maintenir l'état du système pêche autour d'un point de fonctionnement (point d'équilibre) donné, grâce à un contrôle localement optimal. Il s'agit plus précisément de minimiser les écarts d'effort et de capture par rapport à ce point, de manière à assurer aux pêcheurs du travail et des revenus relativement stables. En effet l'effort est un indicateur de l'emploi dans la pêcherie, tandis que les revenus se calculent à partir de la capture et de la loi de formation des prix du poisson. La tendance étant à la surexploitation et à une puissance de pêche excessive, ce critère revient pratiquement à conserver des rendements à peu près constants, sans réduire exagérément la flottille et sans débaucher de manière sauvage.

Ce critère pseudo-économique est une application intéressante du contrôle optimal à la pêche. Les critères d'optimisation retenus généralement consistent à maximiser les captures ou les revenus et conduisent parfois à des contrôles peu réalistes. Rarement on se soucie de maîtriser les fluctuations autour d'un point d'équilibre.

Cette approche originale a été initiée par Horwood, Jacobs & Ballance [19, 20]. Néanmoins dans leurs articles, le contrôle obtenu n'est que sub-optimal, sur un modèle de résolution très simplifié par rapport à leur but initial (modèle structuré stochastique). En outre, la variable de commande choisie, la capture, n'est pas très naturelle. L'entrée, l'action des pêcheurs sur le stock se fait via leur effort ; la capture constitue un produit, une sortie du système (cf. section I.3.2).

IV.2.1 Présentation du problème

a) Représentation du stock

On considère un stock exploité, que l'on représente par son état X, sans considérer de structure sur le stock. On obtient un modèle de stock global dont l'évolution en temps continu est décrite par le modèle dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(X(t)) - qE(t)X(t) \\ Y(t) = qE(t)X(t) \end{cases} \tag{IV.3}$$

avec :
- X : abondance ou biomasse du stock (en nombre ou masse)
- E : effort de pêche instantané (en unité d'effort / u. de temps)
- Y : capture instantanée (en nombre ou masse / u. de temps)
- q : capturabilité supposée (en unité d'effort^{-1})
- F : fonction d'évolution du stock sans pêche ; $F \in \mathcal{C}^1$

Nous supposons que la capturabilité q est un paramètre constant. La fonction F est choisie continûment dérivable pour la suite du problème et elle doit vérifier quelques contraintes ;

– L'état X et l'effort de pêche E sont deux grandeurs physiques positives. Un effort ou un nombre d'individus négatif n'a pas de sens. À partir d'une valeur initiale positive, X doit donc demeurer positive au cours du temps, et ce pour toute valeur de E positive.

– $X = 0$ doit être un équilibre du système avec ou sans pêche. En effet, un stock totalement épuisé le demeure et n'évolue plus. En outre pour que le stock soit viable, il faut qu'il existe un second point d'équilibre strictement positif et stable pour le stock vierge.

➥ Par conséquent la fonction F doit s'annuler en zéro et ainsi garantir que zéro est un équilibre du stock exploité ou non. Cela permet de plus d'assurer que le stock ne deviendra pas négatif : en effet, lorsque le stock diminue, il « s'arrête » en zéro. D'où :

$$F(0) = 0$$

➥ En outre, il doit exister une valeur k strictement positive qui soit un équilibre stable du système sans pêche. D'où :

$$F(k) = 0 \text{ et pour } X \neq k \text{ au voisinage de } k : F(X)(k - X) > 0$$

Un exemple est donné dans la figure IV.3.

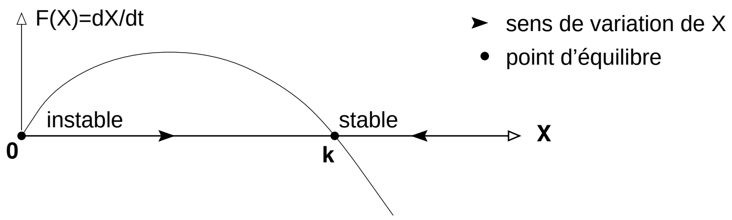


Fig. IV.3 *Équilibres d'un modèle global de stock vierge.*

Remarque En général le point d'équilibre zéro est instable. Cependant, en cas de dépensation critique, il peut devenir stable. Il y a dépensation à droite de zéro, F est convexe. Pour qu'il y ait encore un équilibre stable strictement positif k, il faut qu'il existe un troisième équilibre intermédiaire instable k', comme le montre la figure IV.4.

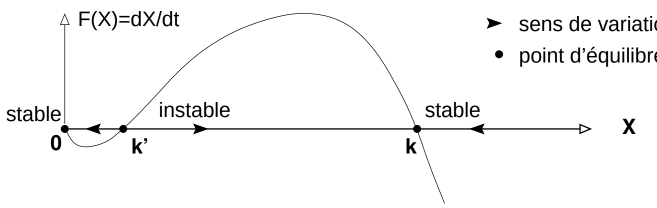


Fig. IV.4 *Équilibres d'un modèle global de stock vierge avec dépensation critique.*

Ce phénomène semble assez naturel ; avec très peu d'individus, il peut arriver qu'une population ne puisse se développer et s'éteigne. C'est le cas en particulier chez les gros cétacés à migrations séparées mâle/femelle : ils ne se rencontrent plus et la reproduction n'a plus lieu. ▮

À partir de ces hypothèses, on déduit qu'il existe aussi un point d'équilibre non nul sur le stock exploité pour différentes valeurs de E_e. En effet, il existe un intervalle à gauche de k sur lequel $F(X)$ est strictement positive. Tout point X_e de cet intervalle, associé à l'effort de pêche $E_e = F(X_e)/qX_e$, définit un point d'équilibre strictement positif du système (IV.3).

☞ La stabilité du point d'équilibre X_e à E_e fixé n'est pas évidente. En effet à moins que F ne soit concave entre 0 et X_e, il est possible d'obtenir plusieurs points d'équilibre non nuls pour le système avec pêche. Un exemple est représenté dans la figure IV.5. ▮

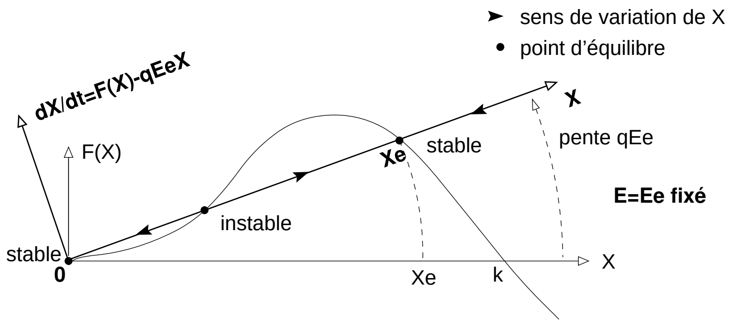


FIG. IV.5 *Équilibres d'un modèle global de stock exploité.*

b) Choix du contrôle

La commande que l'on applique sur le système est l'effort E. L'effort de pêche ne peut physiquement ou matériellement pas varier selon une loi quelconque. Il y a une certaine inertie dans l'effort et il ne peut pas varier trop vite. Un contrôle optimal de type bang-bang (sauts instantanés par paliers) par exemple est irréaliste : on ne peut pas construire quatre bateaux en un instant, surtout pour en détruire sept quelque temps après. Il devient alors intéressant de contrôler par $\dot{E}$, la vitesse de variation de l'effort de pêche. Cela revient à considérer le système augmenté suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(X(t)) - qE(t)X(t) \\ \dot{E}(t) = U(t) \\ Y(t) = qE(t)X(t) \end{cases} \tag{IV.4}$$

avec U : vitesse instantanée de l'effort de pêche (en unité d'effort / u. de temps)

L'effort E devient ainsi une deuxième variable d'état. Même si sa dynamique est simplifiée à l'extrême ici, cela présente quelques avantages. Tout d'abord il ne peut y avoir de sauts d'effort, car ce dernier est continu au cours du temps. De plus l'état initial de l'effort n'est pas déterminé par la loi de contrôle ; on peut lui attribuer une valeur quelconque ce qui est plus réaliste pour un stock exploité.

Il est nécessaire de borner $\dot{E}(t)$, pour éviter des variations d'effort trop rapides. Plutôt que rajouter cette contrainte à notre problème, on peut l'intégrer dans le critère, sous forme d'un terme supplémentaire à minimiser. L'effet est le même : interdire de trop brusques variations d'effort.

> En choisissant de contrôler le système par la vitesse de variation de l'effort, on évite donc les grands sauts d'effort de pêche et l'on peut fixer l'état initial de l'effort. En outre, en intégrant ce terme dans le critère à minimiser, l'effort ne peut varier trop vite et le contrôle est plus réaliste.

c) Énoncé du problème d'optimisation

On choisit de *linéariser* le modèle autour d'un point d'équilibre strictement positif (X_e, E_e) du système (IV.4). On peut ainsi appliquer sans trop de difficultés la théorie du contrôle optimal. On se retrouve dans un contexte très classique : modèle linéaire continu avec critère quadratique, qui permet l'utilisation du *théorème de* RICCATI. Comme l' étude est locale, vu que l'on veut réguler un système autour d'un point d'équilibre vis à vis de perturbations, le linéarisé donne une bonne approche du comportement du système initial.

On pose donc :

$$\left| \begin{array}{lll} X = X_e + x & & \\ E = E_e + e & \text{avec : } E_e = \frac{F(X_e)}{qX_e} \\ U = u & \text{car } U_e = 0 \\ Y = Y_e + y & \text{avec : } Y_e = qE_eX_e \end{array} \right.$$

Le système (IV.4) linéarisé autour du point (X_e, E_e) est donc avec ces notations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{dF}{dx}(X_e)x(t) - qE_ex(t) - qX_ee(t) \\ \dot{e}(t) = u(t) \\ y(t) = qE_ex(t) + qX_ee(t) \end{cases} \tag{IV.5}$$

Les variables relatives x, e et y ne sont plus nécessairement positives, vu qu'elles représentent les écarts par rapport aux valeurs d'équilibre retenues. Mais avec le système linéarisé (IV.5), rien n'empêche les variables globales ($X = X_e + x$,...) de devenir négatives. On pourrait introduire des contraintes sur les variables relatives ($x > -X_e$,...) afin d'éviter cela. Cependant l'étude est locale, de telles valeurs sortent de son domaine de validité ; on préfère vérifier *a posteriori* si les variables relatives restent dans des bornes admissibles.

Rappelons le critère d'optimisation : on cherche à minimiser les écarts de capture et d'effort par rapport à un équilibre donné, ainsi que les variations de la vitesse de l'effort. Les problèmes associés, en horizon fini et infini, suivent.

Problème 1 *Trouver pour le système (IV.5) une commande u sur $[0, T]$ qui permette de minimiser le critère suivant :*

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}\int_0^T [\,\alpha\, e(t)^2 + \beta\, y(t)^2 + \gamma\, u(t)^2\,]\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T [\,(\alpha + \beta q^2 X_e^2)\, e(t)^2 + 2\beta q^2 E_e X_e\, e(t)\, x(t) + \beta q^2 E_e^2\, x(t)^2 + \gamma\, u(t)^2\,]\, dt \end{aligned} \tag{IV.6}$$

où : | *(X_e, E_e) sont les valeurs de l'état du système (IV.3) à un équilibre non nul donné ;*
| *α, β et γ sont des coefficients de pondération positifs tels que : $\alpha + \beta + \gamma = 1$;*
| *T est un temps fini strictement positif.*

Problème 2 *Idem que le problème 1 mais en horizon infini : T est remplacé par $+\infty$.*

◆ La résolution de ce problème ainsi que les résultats théoriques auxquels elle fait appel sont présentés dans l'annexe B. Néanmoins, le contrôle optimal u obtenu est un *feedback linéaire de l'état* (x, e) :

$$u(t) = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \tag{IV.7}$$

où F_1 et F_2 sont fonction des paramètres (r, k, q, X_e) du système (IV.9) et des coefficients de pondération (α, β, γ) du critère (IV.6)

IV.2.2 Application au stock de flétan du Pacifique

Dans le chapitre V nous avons identifié les paramètres d'un modèle de SCHAEFER pour le stock de flétan du Pacifique. L'adéquation entre les données et le modèle étant satisfaisante, nous allons utiliser ce stock comme cadre d'application. Le modèle dynamique identifié du flétan est donné par le système (IV.4) muni d'une fonction de croissance logistique, soit :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = rX(t)\left(1 - \dfrac{X(t)}{k}\right) - qE(t)X(t) \\ \dot{E}(t) = U(t) \\ Y(t) = qE(t)X(t) \end{cases} \tag{IV.8}$$

avec les paramètres suivants :

$$\left| \begin{array}{ll} r = 0,278 & \text{en année}^{-1} \\ k = 10,55 & \text{en } 10^8 \text{livres} \\ q = 0,223 & \text{en longueur de ligne}^{-1} \end{array} \right.$$

Tout au long de cette section les unités employées sont les suivantes :

$$\left\| \begin{array}{rl} \text{Temps } t: & \text{en année} \\ \text{Stock } X: & \text{en } 10^8\text{livres} \\ \text{Captures } Y: & \text{en } 10^8\text{livres}\times\text{année}-1 \\ \text{Effort } E: & \text{en longueur de ligne}\times\text{année}-1 \end{array} \right.$$

Le système linéarisé pour le stock de flétan autour du point d'équilibre (X_e, E_e) est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\dfrac{r}{k}X_e x(t) - qX_e e(t) = 0,0263\, X_e x(t) - 0,223 X_e e(t) \\ \dot{e}(t) = u(t) \\ y(t) = qE_e x(t) + qX_e e(t) = 0,223\,(E_e x(t) + X_e e(t)) \end{cases} \tag{IV.9}$$

avec :

$$E_e = \tfrac{r}{q}(1 - X_e/k) = 1,247(1 - X_e/10,55)$$

◆ La résolution des problèmes de régulation optimale 1 et 2 appliqués à ce stock de flétan est exposée dans l'annexe B.

Nous allons commenter les résultats obtenus pour certains scénarios qui nous semblent intéressants et plus ou moins réalistes. À cet effet, nous nous plaçons autour d'équilibres donnés du système (IV.8), puis nous explorons les effets d'une surexploitation ponctuelle, d'une chute de la biomasse du stock et de ces deux phénomènes combinés.

Pour pouvoir comparer les résultats, nous choisissons une *courbe de référence*, obtenue dans chaque cas pour les paramètres suivants :

$$T = 10 \qquad \alpha = \beta = 0,25 \quad \gamma = 0,5$$

Mais auparavant, nous étudions l'influence de ces paramètres dans les différents cas.

a) Choix des équilibres de référence

Considérons deux points d'équilibre du système (IV.8), l'un pour un stock de biomasse faible fortement exploité (Eq.1) et l'autre pour un stock important peu exploité (Eq.2). Le stock de flétan a selon nos estimations évolué entre environ 2,5 et 6 (en 10^8 Lb) sur la période 1929/87. D'où les valeurs d'équilibre suivantes :

Équilibre 1 (Eq 1)	Équilibre 2 (Eq 2)
$X_{e1} = 3$	$X_{e2} = 5$
$E_{e1} \simeq 0,90$	$E_{e2} \simeq 0,66$
$Y_{e1} \simeq 0,60$	$Y_{e2} \simeq 0,73$

Pour étudier l'influence de l'équilibre référence, nous avons réalisé des simulations pour différentes valeurs de X_e, sur la même période de temps et avec les mêmes coefficients de pondération correspondant à la courbe de référence citée ci-dessus.

Chacune des simulations correspond à la résolution numérique du problème 1 de régulation optimale suite à une même chute par rapport à l'équilibre de la biomasse du stock :

$$x(0) = x_0 = -1,5 \text{ et } e(0) = 0 \text{ à partir de : } X_e \in \{2;\ 2,7;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$$

On voit sur la figure IV.7 que plus le stock est abondant à l'équilibre, plus il converge rapidement après perturbation vers sa valeur d'équilibre. Les courbes sont sinon très semblables.

☞ Le stock relatif équilibré est nul ($x = 0$) quel que soit l'équilibre de référence. De même pour l'effort relatif ($e = 0$) et la capture relative ($y = 0$). ▮

Le contrôle mis en œuvre pour rétablir le stock, ainsi que l'effort qui en découle (cf. figure IV.6), ont des allures très différentes selon l'équilibre de référence. Le but du contrôle est, rappelons-le, de garder la capture et l'effort le plus près possible de l'équilibre. Le stock ayant chuté il convient de rétablir la capture affaiblie. Notons que la capture initiale est plus faible lorsque X_e est petit (cf. figure IV.7).

Lorsque X_e est faible ($X_e = 2$), la tactique optimale consiste à diminuer l'effort afin que le stock croisse, puis à l' augmenter progressivement pour que la capture se rétablisse. En fin d'optimisation la vitesse diminue vers zéro, qui est sa condition finale.

Lorsque X_e est plus grand, la tactique optimale est cette fois de partir d'une vitesse d'effort importante. L'effort augmente d'autant plus vite que X_e est grand, tout comme la capture. Ensuite si X_e est suffisamment important ($X_e = 5; 6$), l'effort décroît vers sa valeur d'équilibre tandis que la capture continue à croître ; sinon il continue à augmenter avec la capture. En fin d'optimisation la vitesse diminue vers zéro.

Interprétation *– L'équilibre de référence détermine si l'on veut stabiliser le stock autour d'un point faiblement ou fortement exploité. Selon le cas, le même critère à partir de la même perturbation conduit à des politiques optimales très différentes décrites ci-dessus.*

Nous raisonnons par la suite sur les variables globales et non plus relatives, sauf spécifié.

b) Effet d'une chute de la biomasse du stock

Nous considérons une chute de la biomasse du stock à l'instant initial, comme précédemment, mais nous ne retenons plus que deux équilibres de référence Eq.1 et Eq.2. La perturbation initiale par rapport à l'équilibre est donc (valeurs relatives) :

$$x(0) = x_0 = -1,5 \quad \text{et} \quad e(0) = 0$$

L'évolution des différentes variables au cours du temps suite à une régulation optimale est donnée par les figures IV.8 et IV.9. Pour les deux équilibres de référence, la tactique optimale

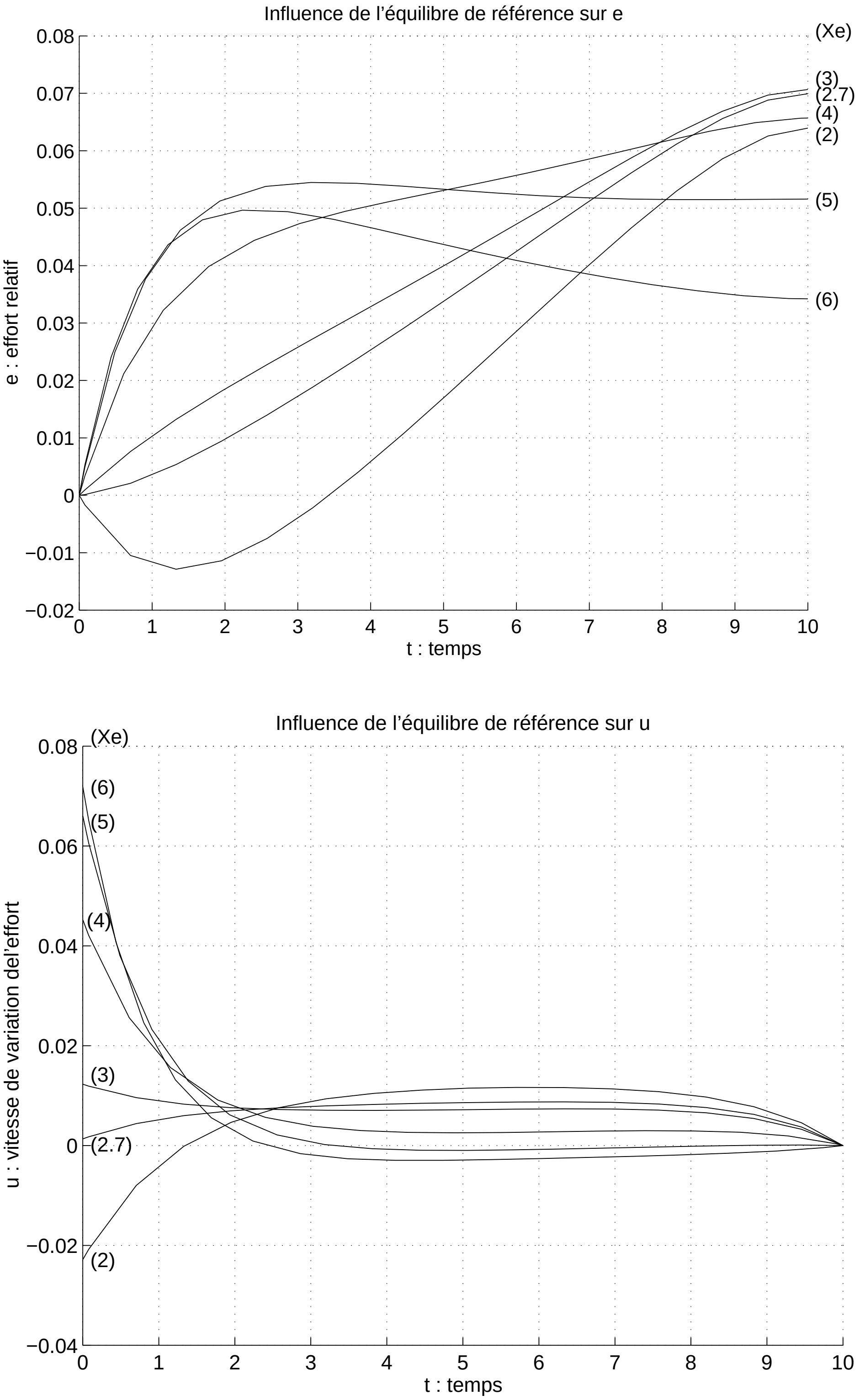


FIG. IV.6 *Influence de l'équilibre de référence X_e sur le système commandé avec les paramètres de référence suivants :*

$$\alpha = \beta = 0,25 \quad \gamma = 0,5 \qquad T = 10$$

et la condition initiale: $x_0 = -1,5 \quad e_0 = 0$

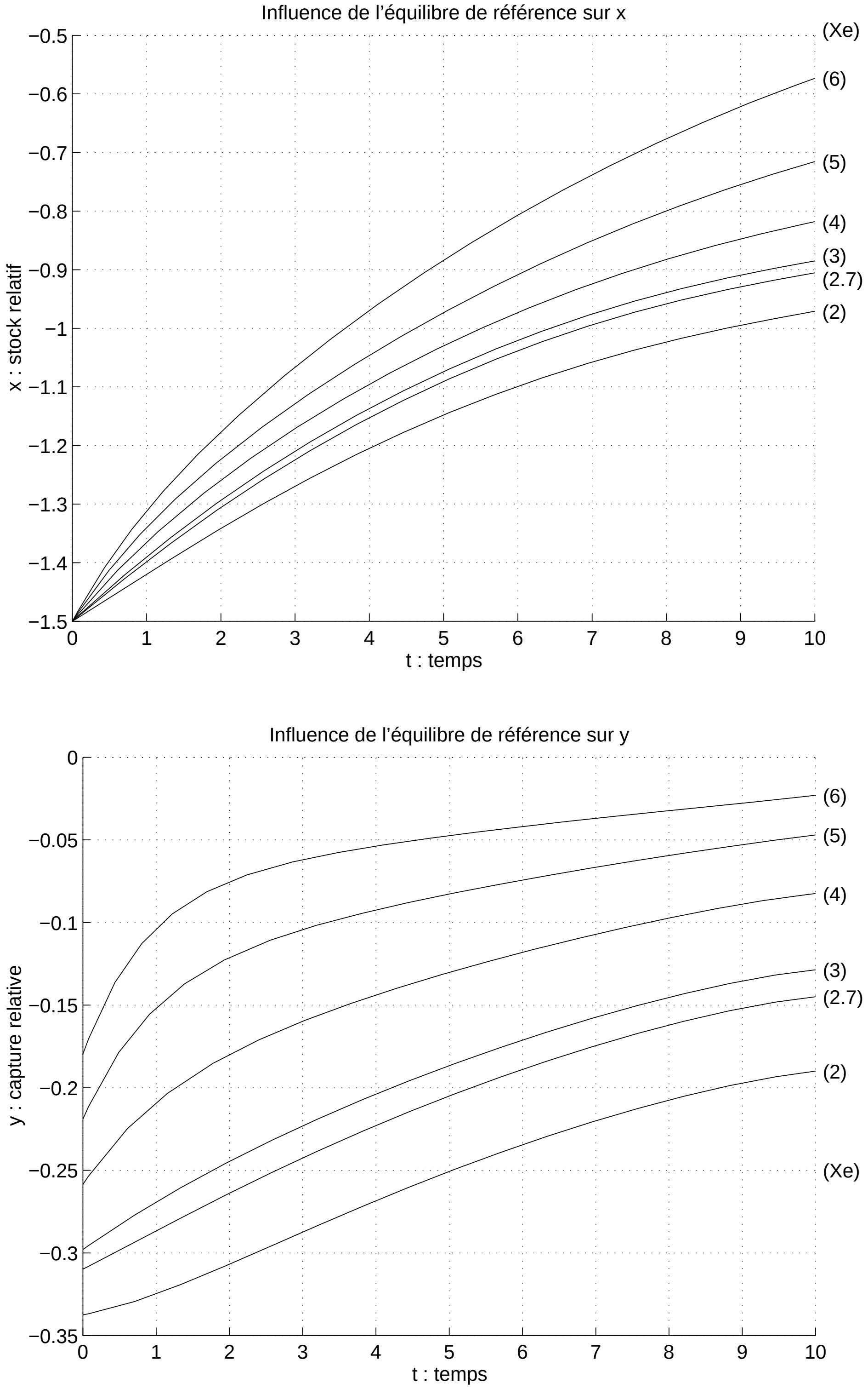


FIG. IV.7 *Suite de la figure IV.6*

pour revenir à l'état d'équilibre revient à augmenter l'effort (puis à le diminuer un peu pour Eq.2). La capture ayant chuté en même temps que le stock, cela lui permet de croître plus rapidement, mais cela limite la croissance du stock. En conséquence, à la fin de la période d'optimisation, la capture est encore un peu faible, l'effort est trop élevé et le stock est bien au-dessous de sa valeur d'équilibre. D'autant plus pour Eq.1 car il correspond au plus faible X_e, et donc relativement à la biomasse, la perturbation initiale est plus forte.

Interprétation *– Le scénario que nous explorons ici peut correspondre à un très mauvais recrutement l'année 0, ou encore une migration hors des lieux de pêche d'une partie du stock. La perturbation que nous considérons est assez d'amplitude assez grande, car le stock peut être soumis à des fluctuations dues à l'environnement assez importantes.*

Le stock a naturellement tendance à se reconstituer, d'autant plus si sa biomasse de départ est grande, mais il est freiné par les pêcheurs qui veulent retrouver leur niveau de capture de référence et donc augmentent leur effort.

Nous étudions ci-dessous l'influence des différents paramètres dans ce cas.

Influence de la durée d'optimisation On fait varier T entre 5 et 40, les autres paramètres demeurant semblables à ceux de la courbe de référence.
◆ Cf. annexe C : figures C.1-C.2 pour Eq.1 ($X_e = 3$) et figures C.7-C.8 pour Eq.2 ($X_e = 5$).

Les performances augmentent avec la durée de l'optimisation : les variables d'état sont au bout du temps T plus proches de leurs valeurs d'équilibres, de même que la capture. Les résultats sont un peu meilleurs pour Eq.2. La tactique optimale change avec la durée d'optimisation. D'où l'effort prend des formes assez différentes, en particulier pour Eq.1 où il commence par diminuer lorsque la durée est grande.

Globalement les performances ne sont pas très bonnes : en fin d'optimisation on est assez loin de la situation d'équilibre, sauf quand T est vraiment très long.

Influence de γ On fait varier γ entre 0,1 et 0,8 ; on prend $T = 10/20$ et pour respecter la contrainte $\alpha + \beta + \gamma = 1$ on prend : $\alpha = \beta = (1 - \gamma)/2$.
◆ Cf. annexe C : figures C.3 et C.4 pour Eq.1 ($X_e = 3$).

Le coefficient γ, pondération de la vitesse de variation de l'effort dans le critère d'optimisation, a une légère influence sur les performances : elles sont meilleures en E et varient très légèrement en Y et X, essentiellement à cause des ordres de grandeurs : l'effort varie globalement très peu par rapport au stock et donc aussi par rapport à la capture. La forme du contrôle ne change pas avec ce paramètre, mais l'augmenter permet de limiter l'amplitude du contrôle, i.e. la vitesse de variation de l'effort. C'était le but recherché en incluant le terme γu^2 dans le critère (IV.6).

Il est donc intéressant de prendre γ assez grand ; la contrainte sur l'amplitude du contrôle est ainsi mieux respectée et cela n'altère pas vraiment ses performances.

Influence de α et β On fait varier $\alpha = 0,5 - \beta$ entre 0 et 0,5 ; les autres paramètres demeurent semblables à ceux de la courbe de référence.
◆ Cf. annexe C : figures C.5 et C.6 pour Eq.1 ($X_e = 3$) et figures C.9 et C.10 pour Eq.2 ($X_e = 5$).

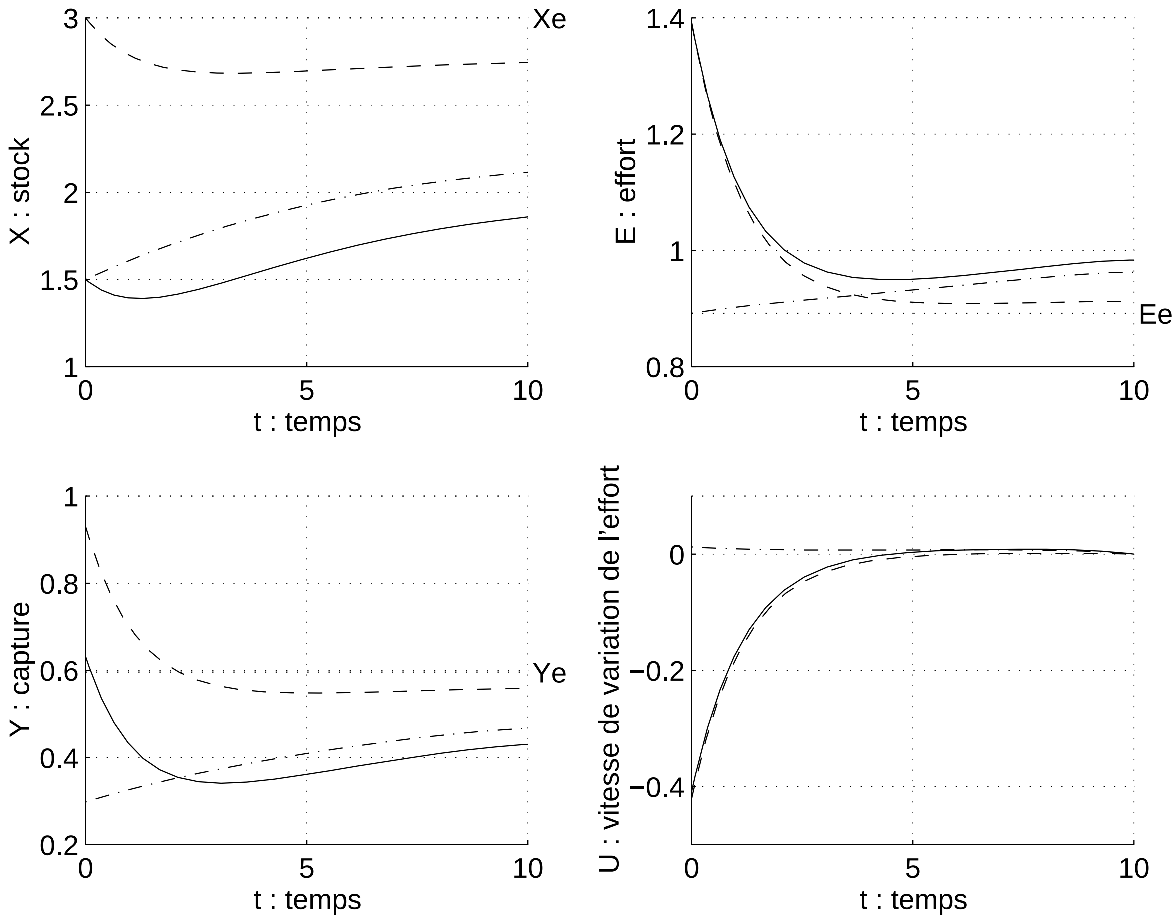


FIG. IV.8 *Influence des conditions initiales sur le système commandé pour l'équilibre de référence $X_e = 3$ et les paramètres de référence :*

$$\alpha = \beta = 0,25 \quad \gamma = 0,5 \qquad T = 10$$

Légende -.- : $x_0 = -1,5$ *et* $e_0 = 0$
-- : $x_0 = 0$ *et* $e_0 = 0,5$
$-$: $x_0 = -1,5$ *et* $e_0 = 0,5$

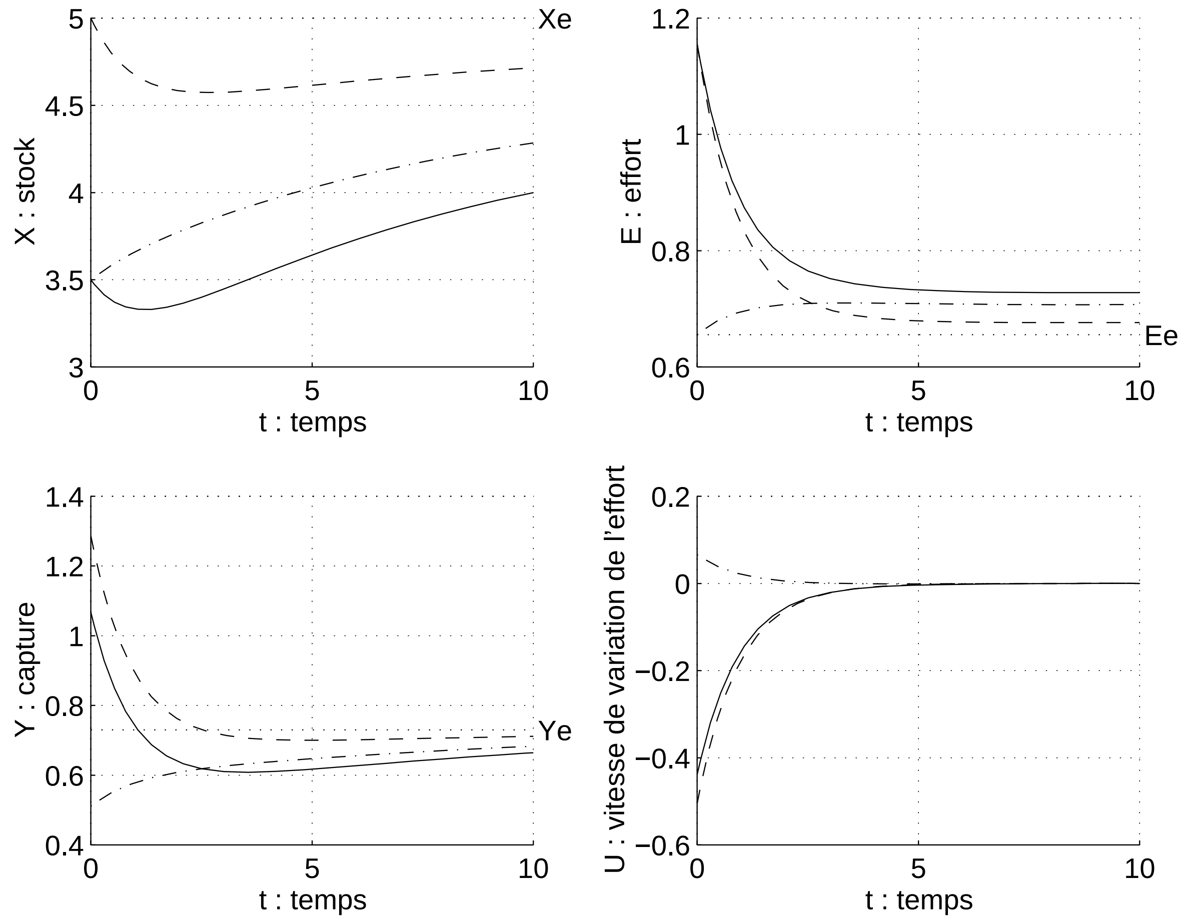


FIG. IV.9 *Influence des conditions initiales sur le système commandé pour l'équilibre de référence* $X_e = 5$ *et les paramètres de référence :*

$$\alpha = \beta = 0,25 \quad \gamma = 0,5 \qquad T = 10$$

Légende -.-: $x_0 = -1,5$ *et* $e_0 = 0$
- -: $x_0 = 0$ *et* $e_0 = 0,5$
$-$: $x_0 = -1,5$ *et* $e_0 = 0,5$

Lorsque le coefficient α de pondération sur l'effort est important par rapport à β, l'effort varie peu de sa position d'équilibre, où il était initialement ; l'effort demeure à ce niveau lorsque β est nul. Le stock se rétablit assez bien, par contre la capture demeure faible. Lorsqu'au contraire α est faible par rapport au coefficient β de pondération sur la capture, l'effort varie beaucoup ; sa vitesse initiale est très élevée. Si la capture converge rapidement vers l'équilibre, le stock se rétablit très mal, voire même chute lorsque α est proche de zéro.

Cette chute intervient pour les deux équilibres de référence, mais elle est particulièrement critique pour Eq.1. En effet dans ce cas, prendre α nul mène le stock au-dessous de zéro, les limites de l'approximation linéaire locale sont dépassées. Sinon les comportements sont similaires dans les deux cas, les performances étant toujours meilleures pour $Eq.2$.

Après une chute de la biomasse du stock, un compromis intéressant pour rétablir la captures d'une part, et pour maintenir l'effort vers l'équilibre (et ainsi rétablir la capture) d'autre part, est obtenu $\alpha = \beta = 0,25$.

Cette étude explique pourquoi nous avons pris la courbe de référence citée ci-dessus. La période de référence de 10 ans peut paraître longue, mais c'est le temps minimal nécessaire pour revenir aux alentours de l'équilibre. Les coefficients de pondération sont choisis de manière à limiter les variations d'effort (γ) et à obtenir un compromis entre les deux buts de la régulation optimale : minimiser les fluctuations de capture et d'effort.
En outre, elle met en évidence la limite du critère retenu : lorsque le poids sur l'effort est faible, il peut mener à l'effondrement du stock, même sur une période de 10 ans. En effet dans ce cas, le niveau de capture est prépondérant, l'effort déployé et la biomasse du stock ne comptent pas. D'où la qualification de *critère économique*.

c) Effet d'une surexploitation ponctuelle

Nous étudions ici l'effet d'une augmentation ponctuelle de l'effort à l'instant initial. La perturbation initiale par rapport à l'équilibre est donc (valeurs relatives) :

$$x(0) = 0 \quad \text{et} \quad e(0) = e_0 = 0,5$$

L'évolution des différentes variables au cours du temps suite à une régulation optimale est donnée par les figures IV.8 et IV.9. Pour les deux équilibres de référence, la tactique optimale pour revenir à l'état d'équilibre revient de manière évidente à réduire l'effort, soit un contrôle U négatif. Comme l'effort est supérieur à sa valeur d'équilibre, le stock commence par décroître pour ensuite croître vers son état initial. La capture, initialement trop élevée, décroît et dépasse même légèrement dans les deux cas sa valeur d'équilibre (stock trop faible), puis croît vers l'équilibre. En fin d'optimisation, on est presque revenu à la situation d'équilibre : l'effort est encore légèrement trop élevé, la capture et le stock sont légèrement trop faibles.

Interprétation *– Une surexploitation ponctuelle du stock peut être due, par exemple, à l'arrivée de nouvelles flottilles sur les lieux de pêche. Pour revenir vers l'état d'équilibre, il faut naturellement réduire l'effort global, le critère d'optimisation visant à réduire les fluctuations d'effort. Cela peut consister à détruire certains bateaux ou à imposer un effort plus faible à chaque bateau. L'amplitude de la perturbation est plus faible que précédemment, car on estime que le travail des pêcheurs fluctue moins que le stock.*

Nous étudions ci-dessous l'influence des différents paramètres dans ce cas, mais uniquement pour Eq.1 ; en effet, le comportement du système bouclé est très semblable dans les deux cas et leur influence similaire.

Influence de la durée d'optimisation

◆ Cf. annexe C : figures C.11 et C.12 pour Eq.1 ($X_e = 3$) .

Comme dans le cas d'une chute de biomasse, augmenter la période d'optimisation permet aux variables d'être plus proches de leur valeur d'équilibre en fin d'optimisation. C'est surtout sensible pour la biomasse et la capture. Le comportement décrit ci-dessus n'est pas modifié par la variation de T et l'on peut constater que le choix de 10 comme période de référence donne d'assez bons résultats.

Influence de γ

◆ Cf. annexe C : figures C.13 et C.14 pour Eq.1 ($X_e = 3$).

Le coefficient γ, pondération de la vitesse de variation de l'effort dans le critère d'optimisation, a ici une grande influence, particulièrement sur la capture et la biomasse. En effet, la tactique optimale consiste à diminuer l'effort ; sa vitesse initiale est donc négative puis elle converge vers zéro, sa condition finale. Plus γ est grand, plus la vitesse initiale doit être proche de zéro, et donc plus la convergence des variables vers l'équilibre est lente. Il ne faut donc pas choisir γ trop petit.

Influence de α et β

◆ Cf. annexe C : figures C.15 et C.16 pour Eq.1 ($X_e = 3$) .

L'influence des valeurs relatives de α et β, coefficients de pondération respectivement de l'effort et de la capture, ont peu d'influence, sauf pour α très petit. En effet, α grand améliore un peu la convergence de l'effort vers l'équilibre; par conséquent aussi celle du stock et, dans une moindre mesure car β est faible, celle de la capture.

Néanmoins lorsque α est proche de zéro (entre 0 et 0,1), l'effort a tendance à croître en fin d'optimisation de manière à rétablir la capture vers sa position d'équilibre. Dans ce cas le poids des fluctuations d'effort est très peu important dans le critère et par conséquent, le stock tend à s'effondrer ; ce phénomène a aussi été observé lors d'une chute de biomasse.

Cette étude confirme le choix de la courbe de référence : en particulier à propos de γ, poids du contrôle dans l'effort. Si celui-ci n'avait pas une grande influence précédemment, on voit ici qu'il fixe la vitesse de convergence des diverses variables vers l'équilibre. Le prendre égal à 0,5 semble un bon compromis entre limiter la vitesse de l'effort et converger rapidement après une surexploitation ponctuelle.

d) Effet d'une chute de la biomasse du stock et d'une surexploitation ponctuelle

Nous combinons ici les deux effets décrits précédemment, ce qui correspond à la perturbation initiale par rapport à l'équilibre suivant (valeurs relatives) :

$$x(0) = x_0 = -1,5 \quad \text{et} \quad e(0) = e_0 = 0,5$$

L'évolution des différentes variables au cours du temps suite à une régulation optimale est donnée par les figures IV.8 et IV.9. L'effort initial est supérieur à sa valeur d'équilibre et le contrôle tend à minimiser les écarts par rapport à cette valeur. Le stock aussi a chuté, mais pas assez pour que la capture soit au-dessous de l' équilibre à l'instant initial. Comme l'état du stock n'entre pas pas dans le critère d'optimisation, la tactique optimale consiste donc à diminuer l'effort de pêche, comme dans le cas d'une surexploitation ponctuelle ; on note cependant une légère remontée de l'effort en fin d'optimisation pour Eq.1.

Les autres variables évoluent par conséquent de manière similaire au cas précédent, mais leurs valeurs en fin d'optimisation sont moins bonnes, surtout pour le stock à cause de sa faible valeur initiale. En fait au bout d'un certain temps, l'état des différentes variables est plus proche du cas d'une simple chute de biomasse.

***Interprétation** – Ce scénario est le plus réaliste des trois : le système initial est dans un état de surexploitation assez prononcé, soit une forte pression des pêcheurs sur un stock de faible biomasse. De manière assez intuitive, le contrôle optimal consiste à diminuer l'effort de pêche, comme dans le cas d'une simple augmentation de l'effort. Mais si la tactique dépend surtout de la valeur initiale de l'effort, l'état des variables en fin d'optimisation est surtout relié à la valeur initiale du stock.*

L'influence des paramètres est similaire au cas précédent de surexploitation ponctuelle sans chute initiale du stock. Par conséquent seules les courbes sont référencées. Mais ensuite nous nous sommes attachés à essayer d'améliorer la convergence de la capture.

Influence de T, γ, α et β Même discussion que le cas précédent.
◆ Cf. annexe C : figures C.17-C.22 pour Eq.1 ($X_e = 3$) et figures C.25-C.30 pour Eq.2 ($X_e = 5$).

Rétablir la capture Plus que minimiser les fluctuations de capture, nous nous intéressons ici à rétablir la capture en fin d'optimisation.
◆ Cf. annexe C : figures C.23 et C.24 pour Eq.1 ($X_e = 3$) et figures C.31 et C.32 pour Eq.2 ($X_e = 5$).

Nous avons vu précédemment que la convergence est plus rapide lorsque γ est faible. Nous le fixons donc à la valeur 0,1. A priori, même s'il ne s'agit pas exactement de minimiser les écarts de capture, il semble naturel de prendre un grand poids sur les écarts de capture dans le critère. Avec $\beta = 0,8$, par rapport à la référence la capture est plus proche de l'équilibre en fin d'optimisation, mais au détriment de l'effort et de la biomasse. Surtout pour Eq.1 où, à moins d'une durée d'optimisation très longue, le stock s'effondre et l'effort croît.

Nous avons donc fixé une autre valeur : $\gamma = 0,6$. Pour Eq.1, les résultats sont très bons : la capture en fin d'optimisation atteint presque la même valeur qu'avec 0,8 ; la biomasse et l'effort sont plus proches de l'équilibre, soit à peu près au niveau de référence. Pour Eq.2, la situation présente est plus une situation de transition entre $\gamma = 0,8$ et la référence.

> Suite à une surexploitation du stock avec chute de biomasse, retrouver le niveau de capture à l'équilibre implique une vitesse de variation de l'effort élevée. Si le poids sur la capture est trop élevé, cela provoque en outre un effondrement du stock, particulièrement pour des biomasses à l'équilibre faibles.

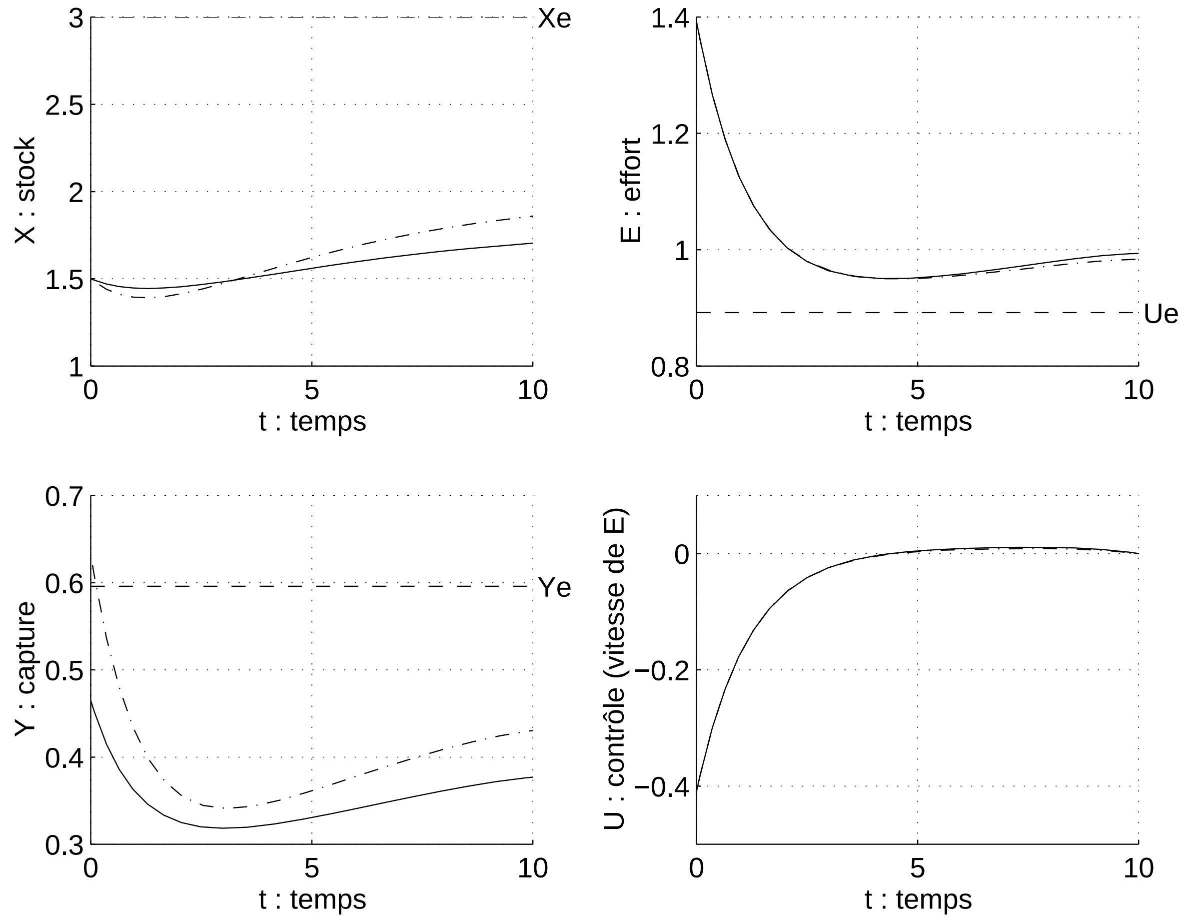


FIG. IV.10 *Validation de l'approximation linéaire pour l'équilibre de référence $X_e = 3$, les paramètres de référence :*

$$\alpha = \beta = 0,25 \quad \gamma = 0,5 \qquad T = 10$$

et les conditions initiales :

$$x_0 = -1,5 \quad e_0 = 0,5$$

Légende *-.- : système linéarisé commandé*
— : système non linéaire commandé

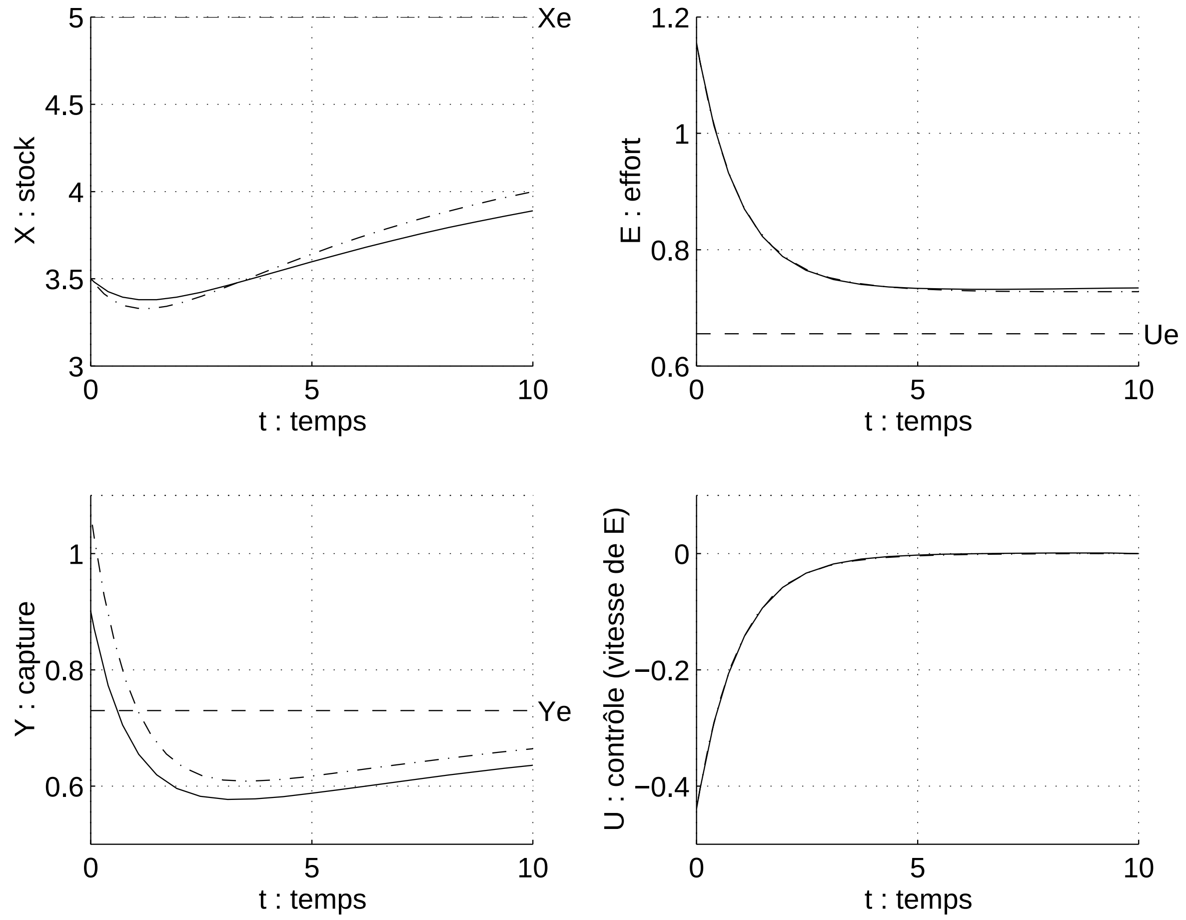


FIG. IV.11 *Validation de l'approximation linéaire pour l'équilibre de référence* $X_e = 5$, *les paramètres de référence :*

$$\alpha = \beta = 0,25 \quad \gamma = 0,5 \qquad T = 10$$

et les conditions initiales :

$$x_0 = -1,5 \quad e_0 = 0,5$$

Légende -.- *: système linéarisé commandé*

— *: système non linéaire commandé*

e) Validité de l'approximation linéaire

Pour tester la validité de l'approximation linéaire faite pour résoudre ce problème de régulation optimale, nous avons appliqué au système non linéaire (IV.8) la même commande par retour d'état issue du théorème de RICCATI. Par la même commande, on entend la même forme (IV.7) de feedback, *localement optimal*, sur l'effort et la biomasse. Cela donne donc :

$$U(t) = F_1.(\,X(t) - X_e\,) + F_2.(\,E(t) - E_e\,)$$

où X et E évoluent selon le système (IV.8).

☞ La commande appliquée au système non linéaire n'est pas identique au cours du temps à celle appliquée au système linéarisé (IV.9) correspondant (même paramètres). En effet, l'état ne suit pas les mêmes équations dans les deux cas . Cette commande est «localement optimale» au sens du critère (IV.6) pour le système non linéaire, c.-à-d. optimale pour le système linéarisé. ▮

La comparaison entre le contrôle sur le système initial et son linéarisé est illustrée par les figures IV.10 pour $X_e = 3$ et IV.11 pour $X_e = 5$. Les paramètres retenus sont ceux de référence cités ci-dessus et les conditions initiales correspondent à une surexploitation avec chute de biomasse. La similitude entre l'évolution des deux systèmes commandés est assez bonne, particulièrement pour l'équilibre de référence $X_e = 5$. L'écart le plus marquant est au niveau des captures, qui diffèrent dès l'instant initial ($Y_{nl} - Y_{lin} = x(0)e(0)$). Le contrôle obtenu est *sub-optimal* pour le système non linéaire, mais il constitue une assez bonne approximation du contrôle optimal.

Si l'on se penche sur le cas $X_e = 3$ en décomposant la perturbation initiale, on s'aperçoit que le système suit presque exactement son linéarisé dans le cas de la perturbation sur l'effort, mais s'en écarte plus pour la perturbation sur la biomasse (cf. figure IV.12). Dans ce dernier cas, la biomasse est nettement plus éloignée de sa valeur d'équilibre alors que l'effort en est plus proche (écart de la capture similaire). Mais comme l'évolution de la biomasse X, en opposition avec l'effort E, est non linéaire, cela explique cette différence.

Lors de l'étude de l'influence des divers paramètres sur le contrôle, nous avons rencontré des cas où les variables s'éloignent fortement des valeurs d'équilibre et où a priori l'approximation linéaire n'est plus valable. En particulier pour le coefficient de pondération sur l'effort (α) nul, comme dans la figure IV.13. Dans ce cas, il est même évident que la limite de validité est dépassée, vu que la biomasse chute au-dessous de zéro pour le linéarisé, ce qui est impossible pour le modèle de SCHAEFER.

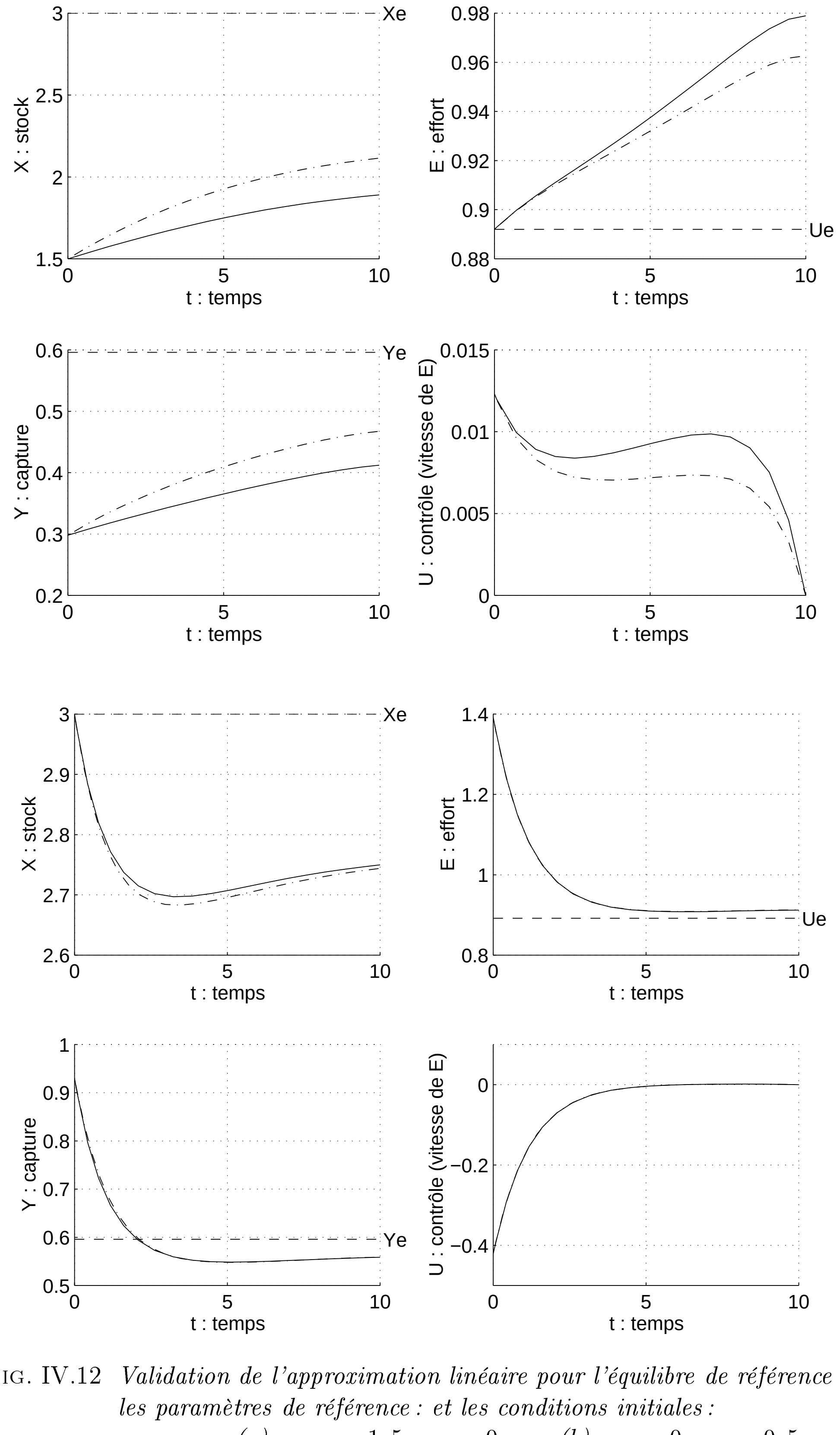
L'approximation linéaire est donc validée dans les cas de référence étudiés ci-dessus, c.-à-d. pour les paramètres suivants :

$$\alpha = \beta = 0,25 \quad \gamma = 0,5 \qquad T = 10$$

et les conditions initiales suivantes :

$$X(0) = X_e - 1,5 \text{ ou } X_e \quad \text{et} \quad E(0) = E_e + 0,5 \text{ ou } E_e$$

En particulier pour un équilibre de référence élevé ($X_e = 5$). Dans ce cas, on peut approcher le contrôle optimal du système non linéaire par celui obtenu sur son linéarisé autour de l'équilibre. Cette commande est localement optimale, au sens où elle minimise les fluctuations d'effort et de capture au voisinage de l'équilibre ; en outre elle limite la vitesse de variation de l'effort de pêche.



(a) (b)

FIG. IV.12 *Validation de l'approximation linéaire pour l'équilibre de référence $X_e = 3$, les paramètres de référence : et les conditions initiales :*

(a) : $x_0 = -1,5 \quad e_0 = 0$ (b) : $x_0 = 0 \quad e_0 = 0,5$

-.- : système linéarisé commandé — : système non linéaire commandé

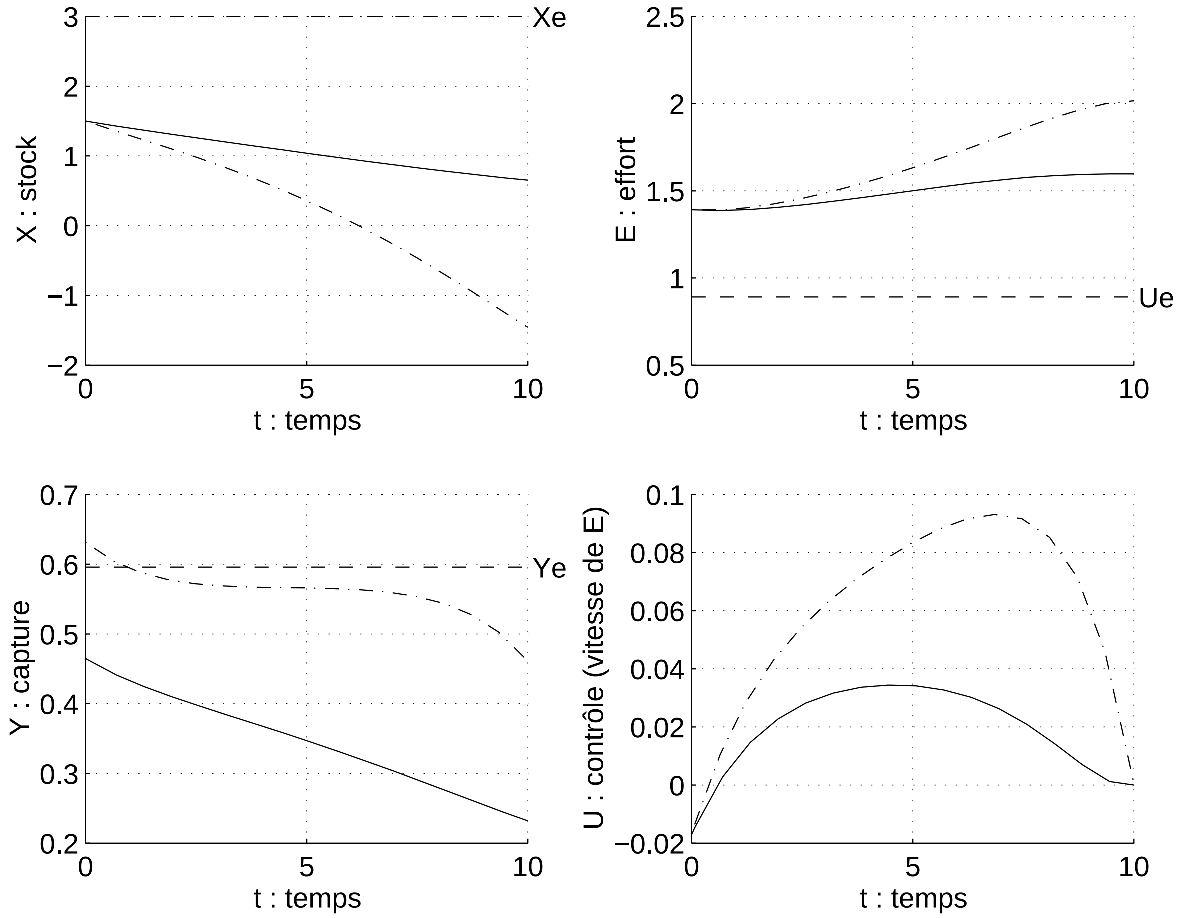


FIG. IV.13 *Limite de l'approximation linéaire, obtenue pour l'équilibre de référence $X_e = 3$, les paramètres suivants :*

$$\alpha = 0 \quad \beta = 0,5 \quad \gamma = 0,5 \qquad T = 10$$

et les conditions initiales :

$$x_0 = -1,5 \quad e_0 = 0,5$$

Légende -.- : système linéarisé commandé

— : système non linéaire commandé

IV.2.3 Discussion

La méthode de régulation optimale utilisée dans cette section n'est pas directement applicable à une pêcherie, en particulier car l'effort n'est pas complètement maîtrisé par les « décideurs » responsables de la gestion des stocks. Il est le fruit d'une consigne de gestion interprétée par les pêcheurs selon leurs propres contraintes. En outre, vouloir faire suivre à l'effort une évolution précise au cours du temps est irréaliste, vu que l'on ne peut que difficilement estimer sa valeur. En effet il n'existe pas d'unité d'effort universelle, car la notion d'effort prend en compte les moyens de capture mis en œuvre par les pêcheurs, comme il est relié à la mortalité par pêche.

Mais il est possible de se servir de ces résultats comme de *tendances*, qui ne sont pas toutes évidentes a priori. Les scénarios qui ont été explorés ici montrent comment réagit la pêcherie régulée suite à une chute de la biomasse ou une surexploitation en temps limité. Le *critère de gestion* est de conserver les revenus (i.e. la capture) d'une part, les coûts d'exploitation et/ou le nombre de bateaux et d'hommes engagés dans la pêcherie (ca. effort) d'autre part, aussi fixes que possible.

L'étude ci-dessus a permis de mettre en évidence des comportements non intuitifs dans la régulation de la pêcherie. Le but étant de minimiser les fluctuations d'effort et de capture, une chute de la biomasse peut mener soit à une augmentation importante de l'effort de pêche, soit à une stratégie consistant tout d'abord à réduire l'exploitation pour laisser au stock le temps de se reconstituer, puis à revenir vers le niveau de référence. La première peut être qualifiée de *stratégie à court terme*, alors que la seconde est une *stratégie à long terme*, qui a l'avantage de permettre à la pêcherie de se rétablir.

Que ce soit suite à une surexploitation de la pêcherie ou une chute de biomasse due à d'autres facteurs (e.g. mauvais recrutement), revenir à un état de développement soutenable prend du temps.

D'autres facteurs interviennent pour la gestion optimale du stock. Si l'effort est peu ou pas limité (α faible par rapport à β), cela conduit le plus souvent à l'épuisement du stock, et ce même si la capture est contrôlée. En effet les stratégies de gestion optimales explorées ici répondent uniquement à un critère économique de rentabilité sans aucune considération d'ordre écologique. Cela montre que limiter la capture, comme c'est le cas dans la gestion par quotas, est parfois insuffisant. Une gestion plus efficace consiste à *limiter aussi l'effort de pêche*.

L'étude ci-dessus a aussi montré que les résultats sont bien meilleurs lorsque les variations d'effort sont peu limitées (γ faible). Améliorer la *flexibilité de la pêcherie* est un atout supplémentaire pour une gestion efficace.

IV.3 Régulation par approche « domaine invariant »

Nous nous inspirons de l'étude de régulation de la section précédente, mais au lieu de déterminer le contrôle optimal permettant de réduire les variations de capture et d'effort, nous cherchons à commander le système de manière à ce qu'il reste «proche» de l'équilibre. Proche, au sens où les écarts de capture et d'effort par rapport à l'équilibre sont bornés. Cela constitue un critère économique grossier : peu de variations de capture et d'effort garantit aux pêcheurs des revenus et des coûts à peu près constants.

Le but ici est donc d'essayer de maintenir le système pêche dans un domaine d'effort et de capture donné. Plus précisément, nous cherchons à déterminer si, partant d'un point de ce domaine, il existe un contrôle admissible permettant d'y demeurer au cours du temps. Cela rejoint les études de *viabilité*, développées par AUBIN et son équipe [3], dont certaines sur un thème semblable [12]. Des contraintes dites de viabilité étant données, ce type d'étude consiste à déterminer l'ensemble des états initiaux en dehors duquel, quel que soit le contrôle admissible appliqué, le système ne va plus respecter ces contraintes.

Dans le cas présent, les contraintes de viabilité seraient : rester dans le domaine de capture et d'effort. Cependant si notre philosophie est la même, la méthode de résolution employée diffère. Nous avons choisi une *résolution essentiellement graphique*, très simple dans ce cas mais qui n'est a priori pas généralisable ou transposable à d'autres systèmes.

Dans cette section, nous déterminons pour deux systèmes pêche, un sous-domaine dit *invariant*, inclus dans le domaine initial de capture et d'effort, dans lequel – par définition – on peut maintenir le système grâce à un contrôle admissible bien choisi. Ce sous-domaine invariant est choisi aussi grand que possible, mais dans certains cas on privilégie un contrôle simple à une taille maximum. Par exemple si rester dans une partie du domaine implique des changements de contrôle très nombreux et rapides, on préfère choisir un sous-domaine invariant plus petit, mais dans lequel le système pêche se maintient grâce à une commande variant peu. La zone exclue par ce sous-domaine sera dite *zone non viable*.

Deux système pêche ont été retenus pour cette étude : le premier décrit uniquement la dynamique du stock par un modèle global, alors que le second introduit aussi une dynamique sur l'effort de pêche. Tous deux sont dotés d'un contrôle sur la vitesse de variation de l'effort.

IV.3.1 Un contrôle et un état

Cette première étude ne présente pas de difficultés particulières ; elle constitue de ce fait une bonne introduction à l'approche par domaine invariant.

a) Présentation du système pêche étudié

On considère un système pêche, représenté par un modèle de SCHAEFER (cf. section I.1.1) et doté d'un contrôle U sur la dérivée de l'effort de pêche, i.e. sur la vitesse de variation de l'effort. En outre on borne U, ainsi l'effort ne peut pas varier trop vite. L'avantage de ce contrôle est détaillé dans la section précédente IV.2.1 ; il permet essentiellement d'éviter les sauts et les variations trop rapides.

☞ Le contrôle sur la vitesse de l'effort est plus réaliste, car ainsi l'effort varie continûment et non pas de manière brusque. Le contrôle est alors du type : « veuillez diminuer l'effort à telle vitesse, soit veuillez détruire un bateau par an », et non : « veuillez appliquer tel effort, soit veuillez pêcher avec tant de bateaux ». ∎

Soit donc le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = rX\left(1 - \dfrac{X}{k}\right) - qEX \\ \dot{E} = U \qquad \text{avec } U \text{ borné} \\ Y = qEX \end{cases} \tag{IV.10}$$

avec :
X	: abondance ou biomasse du stock (en nombre ou masse)
E	: effort de pêche instantané (en unité d'effort / u. de temps)
Y	: capture instantanée (en nombre ou masse / u. de temps)
U	: vitesse de variation de l'effort (unité d'effort / (u. de temps)^2)
r, k, q	: paramètres du modèle de SCHAEFER

Le système pêche est représenté par le modèle (IV.10) ci-dessus, comportant deux états, le stock et l'effort, et un contrôle. Mais la dynamique de l'effort de pêche étant réduite à un strict minimum, il s'agit plutôt d'un «pseudo-état», d'un artifice de commande. En particulier lorsque l'on examine les équilibres du système, on constate qu'ils sont uniquement déterminés par la première équation du système (IV.10). Ils sont obtenus pour le système non commandé ($U = 0$) et l'un des cas suivants :

$$\left| \begin{array}{lll} X^* = 0 & E^* \text{ quelconque} & \rightarrow \text{stock épuisé} \\ X^* \in [0, k] & E^* = \dfrac{r}{q}\left(1 - \dfrac{X^*}{k}\right) & \rightarrow \text{stock exploité} \end{array} \right.$$

Nous allons poursuivre l'étude avec un modèle où les paramètres sont choisis de manière à simplifier les calculs. Cela se passe sans perte de généralité. En effet il suffit d'un changement d'échelle de temps et de deux changements de variables pour revenir au modèle initial (IV.10). On peut donc l'interpréter comme des changements d'unité. Soit donc :

$$r = k = q = 1$$

Le modèle précédent devient :

$$\begin{cases} \dot{X} = X(1 - X) - EX \\ \dot{E} = U \qquad \text{avec } U \text{ borné} \\ Y = EX \end{cases} \tag{IV.10$'$}$$

b) Détermination du domaine invariant

On cherche à rester autour d'un point *équilibre* donné du système, de manière à ce que la capture et l'effort de pêche ne s'éloignent pas trop de leurs valeurs d'équilibre. Le point d'équilibre que l'on choisit est :

$$X^* = 0,3 \qquad E^* = 1 - X^* = 0,7 \tag{IV.11}$$

Le *domaine* D dans lequel on veut maintenir le système IV.10$'$ contient le point d'équilibre et est défini de la manière suivante :

$$\begin{array}{c} E_{min} = 0,6 \leqslant E \leqslant E_{max} = 1 \\ Y_{min} = 0,15 \leqslant Y \leqslant Y_{max} = 0,35 \end{array} \tag{IV.12}$$

☞ Si l'on choisit un domaine ne contenant pas de point d'équilibre, qui n'est obtenu que pour un contrôle nul, il est certain que le domaine ne sera pas viable. Comme l'on veut en outre demeurer au voisinage du point choisi en (IV.12), il faut qu'il soit inclus dans le domaine. ❚

La *contrainte* qui détermine les contrôles admissibles est :

$$-0,1 \leqslant U = \dot{E} \leqslant 0,1 \tag{IV.13}$$

À partir de là, on adopte une *résolution graphique* à ce problème, en se plaçant dans le plan de phase (X, E).

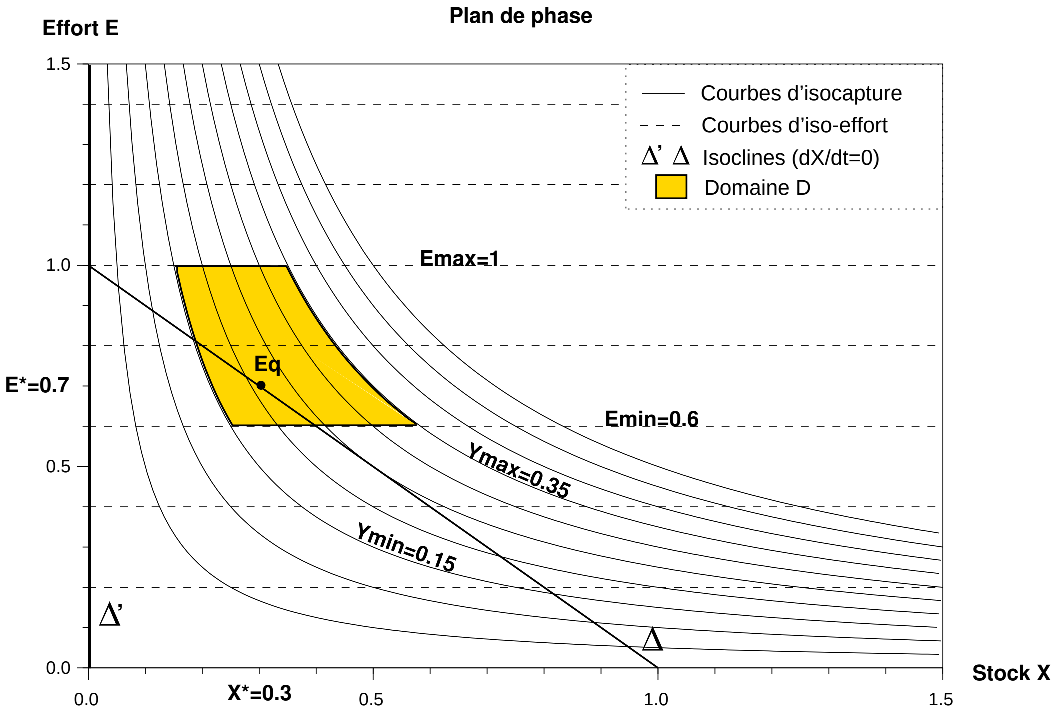


FIG. IV.14 *Mise en évidence du domaine D (IV.12) dans lequel on veut maintenir le système (IV.10′).*

➤ FIGURE IV.14 Sur cette figure, on met en évidence le point d'équilibre indiqué en (IV.11) et le domaine D défini par (IV.12). On représente aussi les isoclines du système soit les deux droites, Δ et Δ', pour lesquelles $\dot{X}$ issu de (IV.10′) s'annule. Il n'y pas d'isoclines associées au pseudo-état E, car $\dot{E}$ s'annule en tout point à condition que le contrôle soit nul.

Les trajectoires peuvent « s'arrêter » sur ces deux droites, car les points de ces droites sont tous des équilibres du système non commandé : il suffit alors de prendre $U = 0$ pour qu'ils deviennent des équilibres du système complet. La droite Δ' n'est pas très intéressante néanmoins car elle correspond à un stock épuisé.

➤ FIGURE IV.15 Ensuite, on étudie le champ aux bornes du domaine D pour le système non commandé. Toujours comme l'effort E est un pseudo-état, on se contente d'étudier les variations du stock X, i.e. le signe de $\dot{X}$, aux bornes du domaine D. On matérialise le champ sur

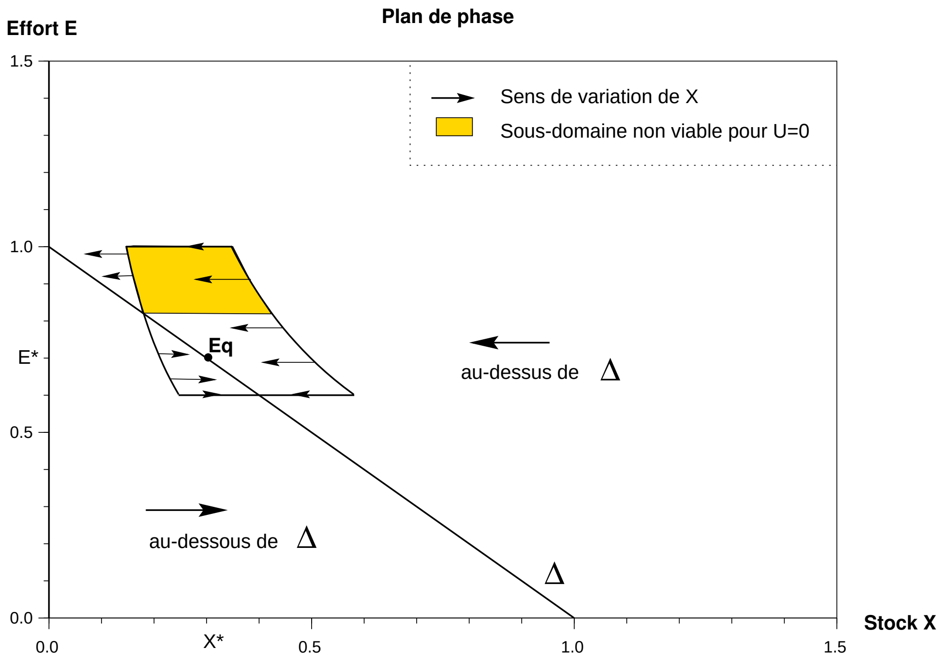


FIG. IV.15 *Détermination du sens du champ aux bornes du domaine D pour le système (IV.10′) non commandé.*

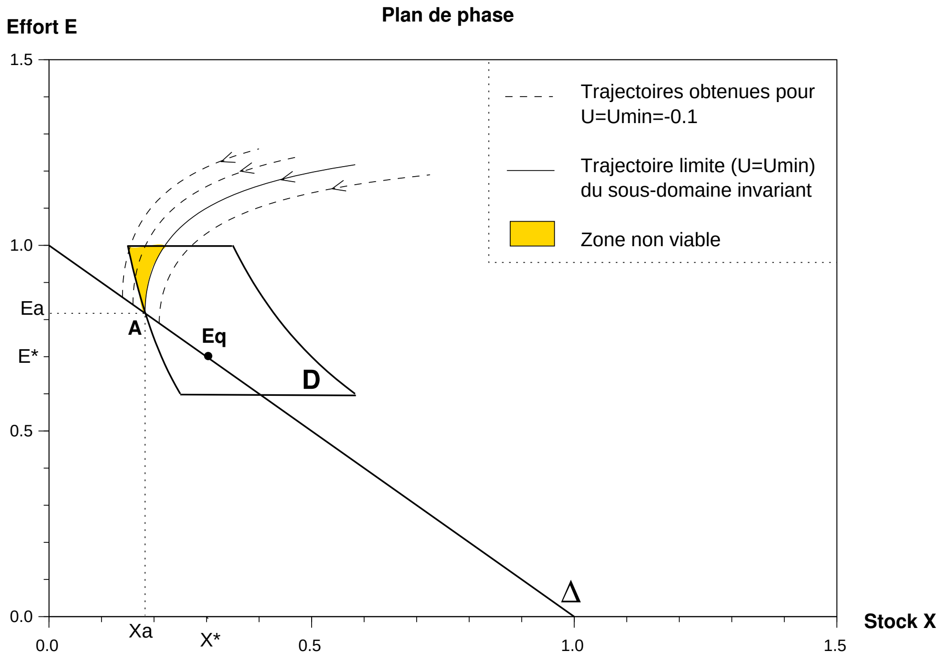


FIG. IV.16 *Identification du sous-domaine invariant (zone non grisée) de D.*

la figure IV.15 (flèche horizontales) ainsi que la *zone non viable pour le système non commandé* (zone grisée). Elle est définie par l'ensemble des états initiaux du domaine D menant, sans contrôle, à la partie de sa frontière où le champ est sortant.

☞ Le champ est matérialisé sur la figure IV.15 par des flèches. Lorsqu'elles sont rentrantes aux bornes de D, on ne peut sortir du domaine à ce niveau. Sur une grande partie de la frontière il n'y a pas de problème, les flèches sont rentrantes. Par contre sur la partie supérieure gauche du domaine, elles sont sortantes. Cela correspond à un effort élevé et un stock faible, il est donc naturel que la capture chute au-dessous de Y_{min} dans ce cas. ❚

Cette zone correspond à la partie supérieure du domaine, où l'effort de pêche est élevé. L'abondance du stock s'affaiblit ; tant et si bien que l'on ne peut plus assurer le niveau de capture Y_{min} si l'on maintient l'effort à ce niveau. D'où la nécessité d'un contrôle.

➤ FIGURE IV.16 On a identifié une zone critique de la frontière, pour des efforts de pêche élevés et des stocks faibles, où le champ est sortant. La solution pour tenter de rester dans le domaine D quand on approche de cette zone critique est évidemment de diminuer l'effort de pêche le plus vite possible, c.-à-d. pour $\dot{E} = U_{min} = -1$. En traçant un faisceau de trajectoires avec ce contrôle minimal, on peut identifier la *trajectoire limite*. La trajectoire limite est définie comme celle qui passe par le point A de la frontière Y_{min}, où le champ change de sens. Elle est représentée sur la figure IV.16 et elle permet d'identifier la zone non viable du domaine D (zone grisée).

☞ Si l'on part d'un point de D à gauche de cette trajectoire limite, quel que soit le contrôle admissible – vérifiant (IV.13) – appliqué, le système sort de D. Mais si l'on part à droite de cette trajectoire limite, un contrôle admissible bien choisi permet de demeurer dans D ; et par conséquent à droite de cette trajectoire. ❚

Grâce à cette méthode graphique, on identifie la zone non viable du domaine D, située dans le coin supérieur gauche du domaine, pour des niveaux d'effort élevés et de stock faibles. Si par un contrôle intelligent on évite cette zone et l'on demeure dans le domaine invariant, on peut conserver un niveau de capture et d'effort proche du point d'équilibre de référence. Par son approche domaine, ce résultat a l'avantage d'être assez robuste en cas de petites perturbations. En outre un « domaine solution » et non une « trajectoire solution », comme celle obtenue par régulation optimale dans la section IV.2, est plus facilement applicable aux systèmes halieutiques, où il y a une incertitude sur la valeur des variables telles l'effort ou la capture.

Interprétation *– L'interprétation économique de ce résultat est un peu grossière : des revenus et coûts de pêche à peu près constants sont assurés aux pêcheurs, à condition que l'on ne maintienne pas un effort de pêche élevé quand la capture devient trop faible. Ce résultat est assez intuitif : pour qu'une pêcherie soit rentable, il ne faut pas épuiser le stock.*

On pourrait ajouter à ce critère économique une contrainte plus écologique : ne pas passer au-dessous d'un niveau de stock minimal donné, la valeur du stock à l'équilibre par exemple. La résolution du problème est la même dans ce cas, mais le domaine invariant correspondant est nettement plus réduit (cf. figure IV.17).

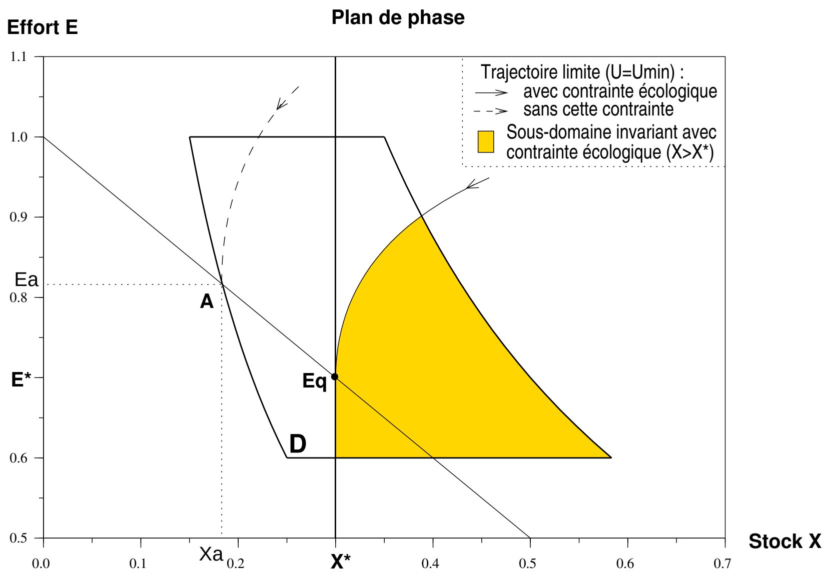


FIG. IV.17 *Identification du sous-domaine invariant de D avec une contrainte écologique supplémentaire.*

IV.3.2 Un contrôle et deux états

Le système étudié ci-dessus, par l'introduction d'un contrôle sur la vitesse de variation de l'effort, admet ce dernier comme variable d'état caractérisant les pêcheurs. Seulement l'effort de pêche n'a pas de dynamique propre, c'est juste un vecteur entre le contrôle et le stock. On pourrait considérer le contrôle comme une directive gouvernementale ; la seule réaction propre aux pêcheurs face à cette directive serait de l'appliquer en la bornant (contrainte (IV.13)). Ce n'est pas très réaliste, c'est pourquoi nous avons une dynamique de l'effort certes simple, mais qui permet une bonne compréhension du système.

a) Présentation du système pêche étudié

Au modèle commandé précédent (IV.10′), on rajoute une dynamique propre de l'effort de pêche, en plus du terme de contrôle. Pour cela, on reprend les travaux de SCHAEFER [43], présentés dans la section I.1.3, mais avec une paramétrisation différente et toujours un terme de contrôle. Soit donc le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = X(1-X) - EX \\ \dot{E} = \alpha EX - \beta E + U \\ Y = EX \end{cases} \tag{IV.14}$$

où : β : coût moyen d'une unité d'effort
α : prix moyen d'une unité de capture

Interprétation *– Le comportement naturel du système non commandé est d'augmenter son effort de pêche tant que le revenu de la capture est plus élevé que le coût de l'effort de pêche déployé. À cela on superpose un contrôle sur la vitesse de l'effort, qui permet d'augmenter ou de réduire la vitesse de l'effort.*

Les deux nouveaux paramètres α et β sont supposés strictement positifs. On ne peut pas réduire encore le nombre de paramètres. Par contre, nous allons rajouter une contrainte sur ces paramètres, de manière à ce que l'équilibre non nul soit le même que précédemment, c.-à-d. :

$$X^* = 0,3 \quad E^* = 0,7$$

Ce système non commandé ($U = 0$) conserve la positivité des variables et possède trois équilibres :

$$\left|\begin{array}{lll} X^* = 0 & E^* = 0 & \rightarrow \text{stock épuisé} \\ X^* = 1 & E^* = 0 & \rightarrow \text{stock non exploité} \\ X^* = \beta/\alpha & E^* = 1 - \beta/\alpha & \rightarrow \text{stock exploité} \end{array}\right.$$

L'équilibre qui nous intéresse est le dernier, car c'est le seul qui correspond à une situation d'exploitation normale. Pour qu'il existe, il faut et il suffit que β soit inférieur strictement à α. Pour qu'il soit identique à celui de l'étude précédente, on ajoute la contrainte suivante :

$$X^* = 0,3 \Rightarrow \beta/\alpha = 0,3 \tag{IV.15}$$

Pour la détermination du domaine invariant, nous conservons le même domaine D de capture et d'effort défini en (IV.12), ainsi que la contrainte sur le contrôle (IV.13).

Nous effectuons un changement de variables, afin d'observer directement l'évolution de l'effort et de la capture au cours du temps. Cela permet de simplifier l'étude aux bornes du domaine. À condition que E demeure non nul, le système (IV.14) équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{E} = \alpha Y - \beta E + U \\ \dot{Y} = \dot{E}X + \dot{X}E \\ \quad = \left[(\alpha - 1)Y + (1-\beta)E - E^2 + U\right] Y/E \end{cases} \tag{IV.14$'$}$$

$$\text{avec : } X = Y/E$$

Les isoclines de ce nouveau système non commandé ($U = 0$) sont déterminées de la manière suivante :

$$\dot{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y = \frac{\beta}{\alpha}E$$

$$\dot{Y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y = 0 \text{ ou } \begin{cases} Y = \frac{E}{\alpha-1}(E+\beta-1) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ E = 1 - \beta & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Les isoclines sont donc composées de deux droites, dont l'axe des efforts, et d'une courbe. Selon le signe de $(\alpha - 1)$, la forme de cette dernière isocline change : parabole de direction Y croissant ou décroissant, ou droite. Nous allons donc distinguer ces trois cas.

b) Détermination du domaine invariant : cas 1

Ce premier cas correspond à $\alpha < 1$. Les valeurs des paramètres choisies sont :

$$\alpha = 0,8 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0,24 \text{ d'après (IV.15)}$$

La détermination du domaine invariant se fait de manière graphique, dans le plan de phase (U, Y) du système (IV.14$'$), selon les étapes décrites ci-dessous.

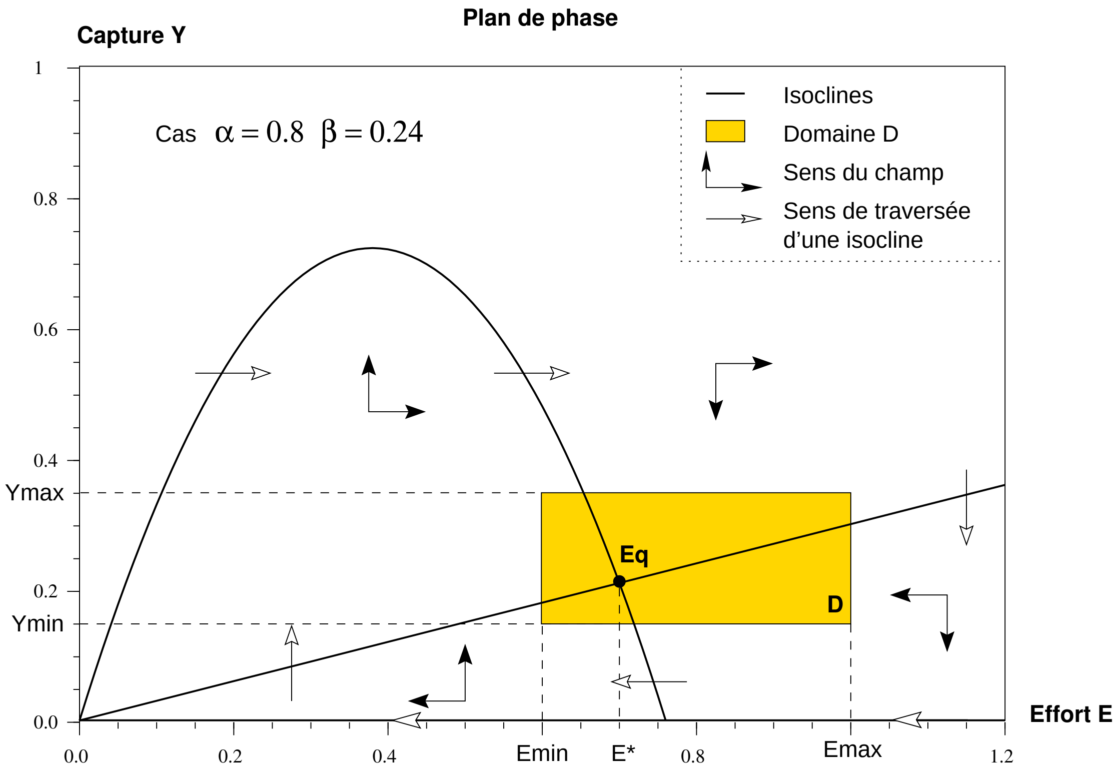


FIG. IV.18 *Mise en évidence du domaine D et du champ associé au système (IV.14′) non commandé : cas 1.*

➤ FIGURE IV.18 Dans cette figure, on met en évidence le domaine D contenant l'équilibre Eq dans lequel on veut maintenir le système, ainsi que les isoclines et le champ associés au système (IV.14′) non commandé.

➤ FIGURE IV.19 On examine dans cette figure le champ à la frontière du domaine D pour le système. On constate que sur chaque borne – E_{min}, E_{max}, Y_{min} et E_{max} – un partie de la frontière admet un champ sortant sans contrôle. Par chacune de ces parties, on détermine la trajectoire limite sans contrôle, i.e. la trajectoire pour U nul qui permet d'arriver sur la frontière au point même où le champ change de signe.

Si l'état du système est à l'extérieur (par rapport à l'équilibre) de cette trajectoire, il atteindra la frontière correspondante dans la partie où le champ est sortant. Et par suite sortira du domaine D. Ainsi on définit quatre zones non viables sans contrôle, associées à chaque borne, grisées sur la figure ; on remarque que celle associée à Y_{min} inclut celle de E_{max}. Le reste du domaine D est dit *invariant sans contrôle.*

➤ FIGURE IV.20 On détermine ensuite quel est le contrôle à appliquer sur les parties de la frontière où le champ est a priori sortant, pour qu'il devienne nul ou rentrant. La discussion ci-dessous est illustrée sur la figure.

1. En $E = E_{min}$, on veut que le champ $\dot{E}$ soit positif. Or dans ce cas :

$$\dot{E} = \alpha Y - \beta E_{min} + U$$

Le cas le plus favorable est donc de prendre le contrôle le plus grand possible, soit U_{max}.

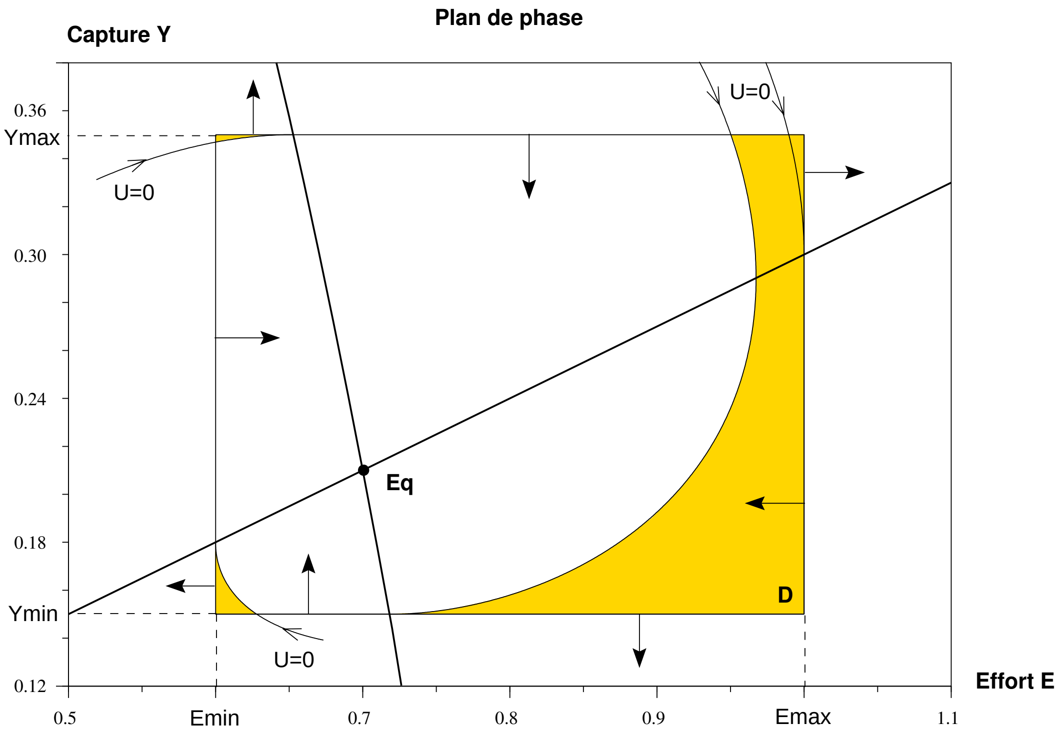


FIG. IV.19 *Identification du sous-domaine invariant de D sans contrôle (zone non grisée) : cas 1.*

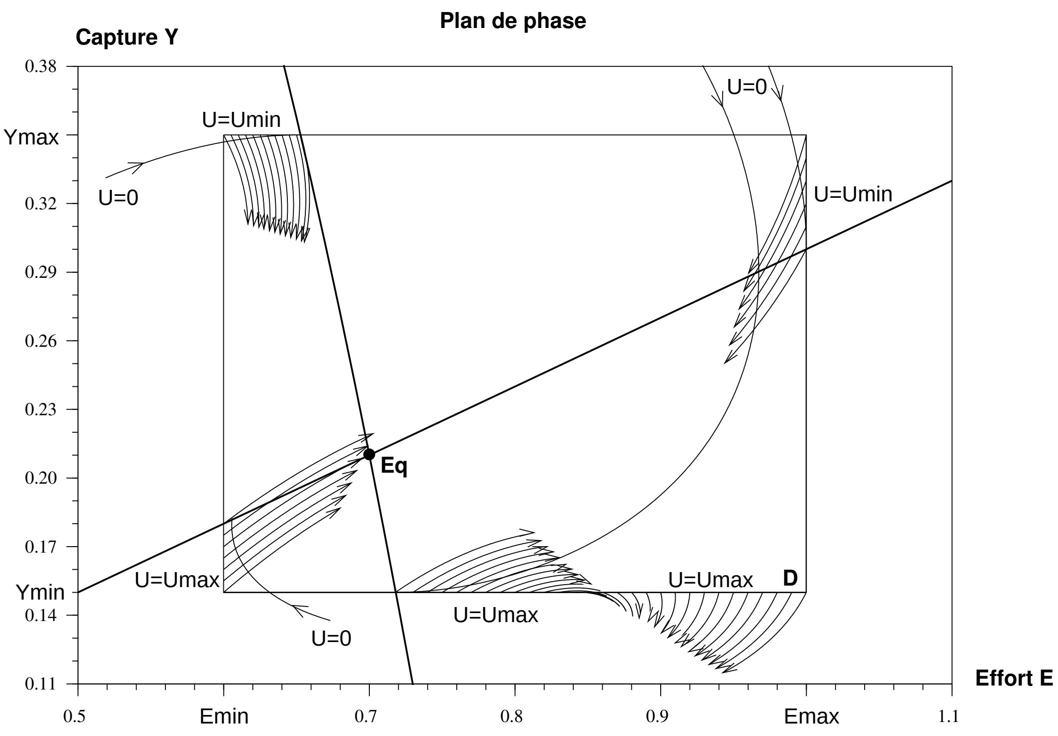


FIG. IV.20 *Détermination du contrôle le plus favorable à la frontière du domaine D, afin de le rendre invariant : cas 1.*

Le champ est alors rentrant, à condition que :

$$Y \geqslant \frac{\beta E_{min} - U_{max}}{\alpha} = 0,055$$

Cette condition étant toujours vérifiée dans D, il est possible de contrôler le système de manière à ce qu'il ne sorte pas du domaine D au niveau de la borne E_{min}.

2. En $E = E_{max}$, par un raisonnement symétrique au précédent, il faut prendre U_{min} comme contrôle. La condition pour que le champ soit rentrant est :

$$Y \leqslant \frac{\beta E_{max} - U_{min}}{\alpha} = 0,425$$

Elle est toujours vérifiée sur D, donc par un contrôle bien choisi, la zone non viable sans contrôle associée à E_{max} et déterminée dans la figure IV.19, devient invariante.

3. En $Y = Y_{max}$, on veut que le champ $\dot{Y}$ soit négatif. Or dans ce cas :

$$\dot{Y} = [(\alpha - 1)Y_{max} + (1 - \beta)E - E^2 + U]\ Y_{max}/E$$

Le plus favorable est donc de choisir U_{min} comme contrôle. La condition pour que le champ soit rentrant est que :

$$-E^2 + (1 - \beta)E + (\alpha - 1)Y_{max} + U_{min} \leqslant 0$$

Comme le polynôme associé n'a pas de racines réelles (discriminant strictement négatif), elle est toujours vérifiée et donc la zone non viable sans contrôle associée à Y_{max} devient elle aussi invariante.

4. En $Y = Y_{min}$, par un raisonnement symétrique au précédent, il faut prendre U_{max} comme contrôle. La condition pour que le champ soit rentrant est :

$$E^2 + (1 - \beta)E + (\alpha - 1)Y_{min} + U_{max} \geqslant 0$$

Les racines du polynôme associé étant $E_1 \simeq 0,843$ et $-0,083$, elle est vérifiée sur la borne Y_{min} pour $E \leqslant E_1$. Pour les efforts supérieurs à E_1 et vers la frontière Y_{min}, le domaine n'est donc pas invariant.

Interprétation *– Diminuer l'effort (U_{min}) quand celui-ci est grand ou l'augmenter (U_{max}) quand il est faible afin de demeurer dans le domaine D est un résultat naturel. Il l'est moins en ce qui concerne la capture. En effet, diminuer l'effort a deux conséquences immédiates antagonistes : a priori diminuer la capture, mais aussi augmenter le stock, ce qui peut finalement faire augmenter la capture sur un horizon plus ou moins long. Cela dépend de l'état du stock. Ce qui est bien mis en évidence sur la borne Y_{min}.*

Grâce au contrôle bien choisi décrit ci-dessus, on a pu réduire les zones critiques de la frontière, c.-à-d. celles où le champ est sortant. Il n'en demeure qu'une seule, pour des efforts importants sur Y_{min} : quel que soit le contrôle appliqué alors, la capture chute au-dessous de son niveau minimal. Cet état correspond à un stock de faible abondance fortement exploité ; il est donc naturel qu'il soit impossible à la capture de croître avant un certain laps de temps pendant lequel le stock peut se reconstituer.

Augmenter l'exploitation ne semble alors pas être la meilleure solution, néanmoins il faut considérer que cette stratégie est ponctuelle : c'est tout ce qu'il reste à faire lorsque l'on a atteint le niveau de capture minimal, mais cela ne suffit pas pour rester dans le domaine.

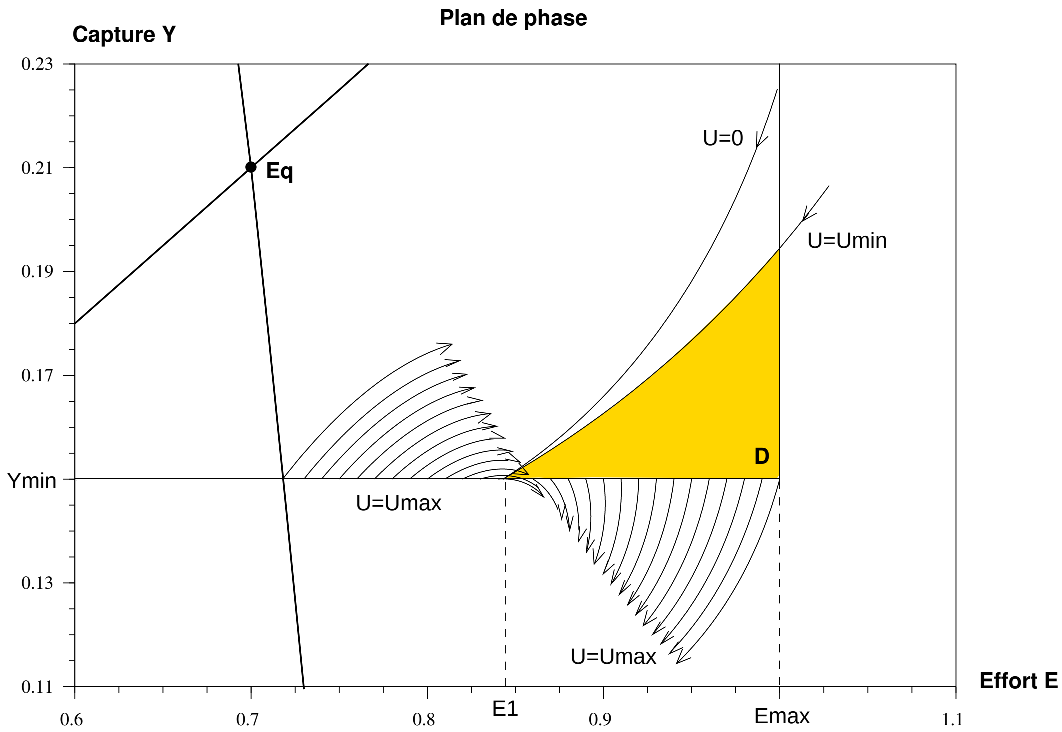


FIG. IV.21 *Mise en évidence « a priori » de la zone non viable sous contrôle du domaine D (zone grisée) : cas 1.*

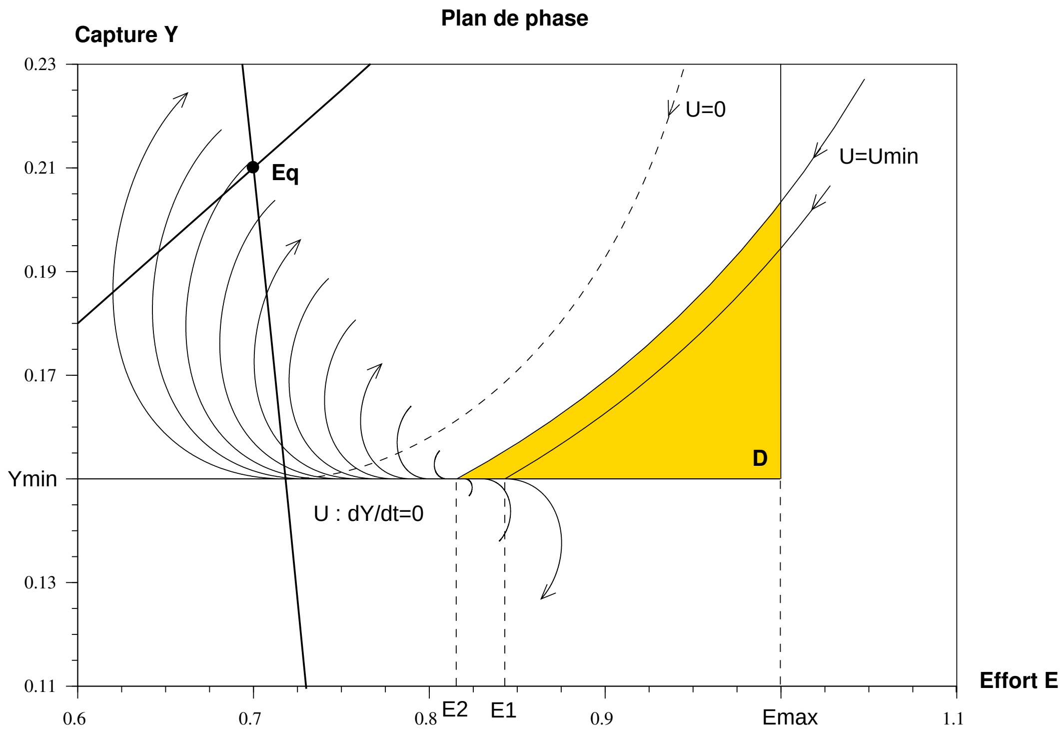


FIG. IV.22 *Détermination de la zone non viable sous contrôle du domaine D (zone grisée) : cas 1.*

➤ FIGURE IV.21 Sur cette figure, on met en évidence d'après les résultats précédents, la zone non viable sous contrôle du domaine (zone grisée). Pour cela, on détermine la trajectoire limite du système aboutissant sur la frontière Y_{min} au niveau de l'effort E_1. À partir de tout point à l'intérieur (par rapport à l'équilibre) de cette trajectoire, on ne peut atteindre la borne Y_{min} que pour un effort inférieur à E_1. Et donc en augmentant l'effort au maximum, il est possible de ne pas sortir du domaine. On peut même choisir cette trajectoire limite pour $U = U_{min}$, ce qui permet de réduire la zone non viable comme le montre la figure.

Néanmoins si l'on regarde le champ sur la frontière Y_{min} pour le contrôle U_{max}, on constate que à gauche de E_1, si la capture est croissante, l'effort l'est aussi. Et cela tend à ramener le système vers la zone non viable. Par conséquent, une étude un peu plus précise s'impose.

➤ FIGURE IV.22 Pour être certain que le système s'éloigne de la zone non viable au niveau de la frontière Y_{min}, on voudrait que les deux conditions suivantes soient vérifiées simultanément :

$$\dot{Y} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \dot{E} \leqslant 0 \qquad \text{pour } Y = Y_{min}$$

Elles équivalent à prendre l'effort E inférieur à E_1 et tel que :

$$E^2 - E + Y_{min} \leqslant 0$$

Les racines du polynôme associé étant :

$$0,18 \text{ et } E_a = 0,5 + \sqrt{0,1} \simeq 0,816$$

il convient de ne sélectionner dans le sous-domaine invariant de D, que les points de la frontière Y_{min} d'effort inférieur à $E_2 = E_a$.

> REMARQUE : Le raisonnement ci-dessus est vrai quels que soient les paramètres α et β. La valeur de l'effort limite E_a ne dépend pas non plus de ces paramètres, elle est donc toujours valable pour les prochains cas. En outre, elle correspond aussi à la valeur limite observée dans l'étude précédente, sur le système sans dynamique de l'effort. ▮

Sur la figure on a représenté des trajectoires issues de la frontière et obtenues pour un contrôle constant, choisis en chaque point de manière à ce que $\dot{Y}$ soit nul au temps initial. C'est le contrôle limite pour demeurer dans le domaine D et il permet de bien mettre en évidence l'effort limite E_2.

Comme dans la figure précédente, on détermine ensuite la trajectoire limite, mais atteignant la frontière en E_2 et non E_1. De même, la prendre pour $U = U_{min}$ permet de définir la plus petite zone non viable ; ce résultat est montré dans la figure suivante.

➤ FIGURE IV.23 Cette figure représente différentes trajectoires aboutissant au point limite (E_2, Y_{min}). Elles ont toutes la même pente en ce point car pour tout contrôle U :

$$\dot{E}(E_2, Y_{min}) = \dot{Y}(E_2, Y_{min})\, Y_{min}/E_2$$

Il est clair sur cette figure que la trajectoire limite définissant le plus grand sous-domaine invariant de D est obtenue pour le contrôle U_{min}.

Interprétation *– Ce résultat est assez intuitif : le sous-domaine invariant de D exclut les cas de forte exploitation sur un stock de faible abondance. Pour que le système n'évolue pas vers cet état, il convient tout d'abord de diminuer l'effort le plus vite possible (contrôle U_{min}) lorsqu'il est élevé et que la capture se met à diminuer de manière marquée ; ceci est en effet signe que le stock s'affaiblit. Ensuite, si malgré cela la capture devient très proche de la valeur minimale, il faut alors augmenter l'effort au maximum (contrôle U_{max}). En respectant cette loi de contrôle, ainsi que*

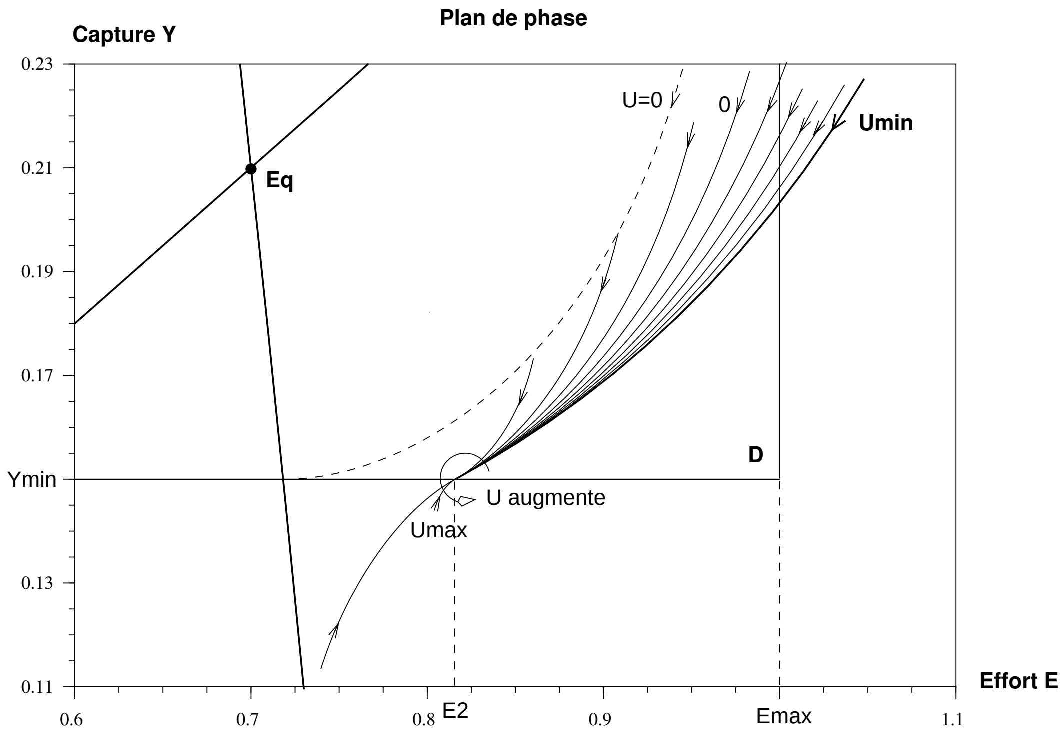


Fig. IV.23 *Étude de la limite du sous-domaine invariant de D : cas 1.*

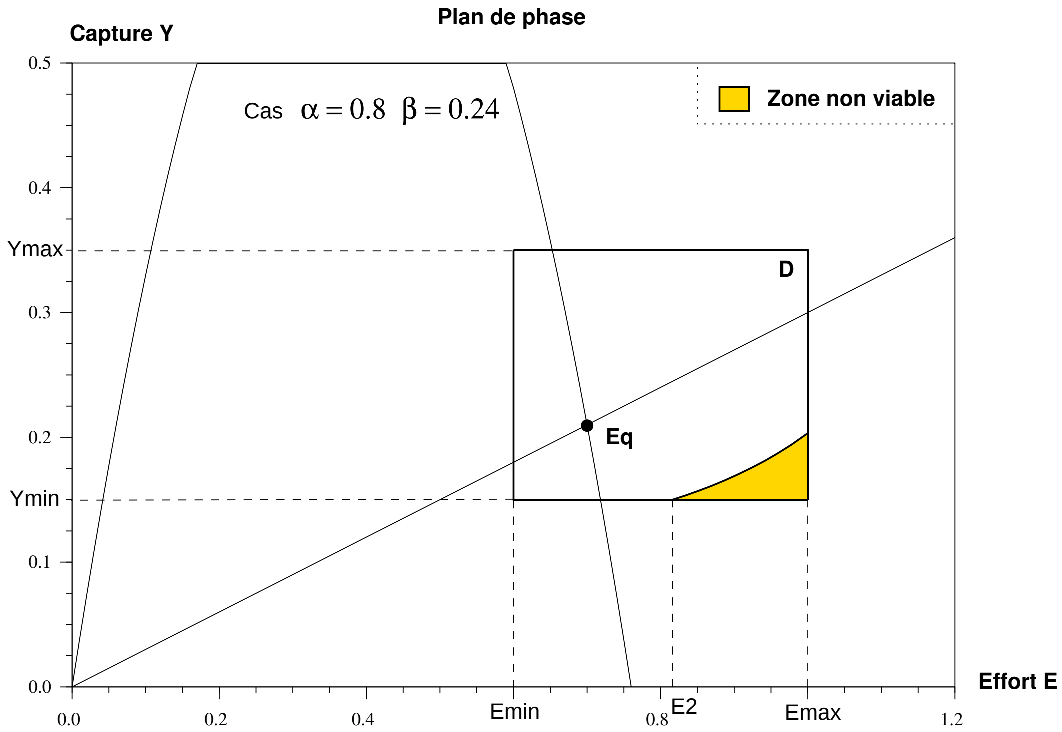


Fig. IV.24 *Mise en évidence du sous-domaine invariant de D (zone non grisée) : cas 1.*

celles déterminées précédemment pour les autres zones critiques, on peut maintenir les coûts et revenus de la pêcherie à peu près stables.

➤ FIGURE IV.24

En guise de conclusion, cette figure met en évidence le sous-domaine invariant de D ainsi déterminé, dans le plan de phase (U, Y).

Interprétation – *Le changement de variable afin d'obtenir un système admettant comme variables dynamiques l'effort et la capture (et plus la biomasse) est intéressant, car il permet de suivre l'évolution d'un système pêche à partir de la connaissance de l'effort appliqué et de l'observation de la capture réalisée sur ce système. Ainsi le résultat de régulation ci-dessus devient plus applicable : une connaissance approximative de la dynamique du stock et du seuil de rentabilité de la pêche peut suffire. En effet, en majorant largement toutes les incertitudes, il est toujours possible d'appliquer la méthode de régulation par domaine viable. Et ce d'autant plus aisément pour une pêcherie où le niveau d'exploitation n'a pas trop varié depuis quelques années et où les prises sont débarquées en un nombre restreint de lieux.*

c) Détermination du domaine invariant : cas 2

Ce deuxième cas correspond à $\alpha > 1$. Les valeurs des paramètres choisies sont :

$$\alpha = 4 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1,2 \text{ d'après (IV.15)}$$

◆ En annexe D un cas supplémentaire 2 bis (cf. figure ci-dessous), relativement similaire au cas 1, est traité pour $\alpha = 1,2$ et $\beta = 0,36$.

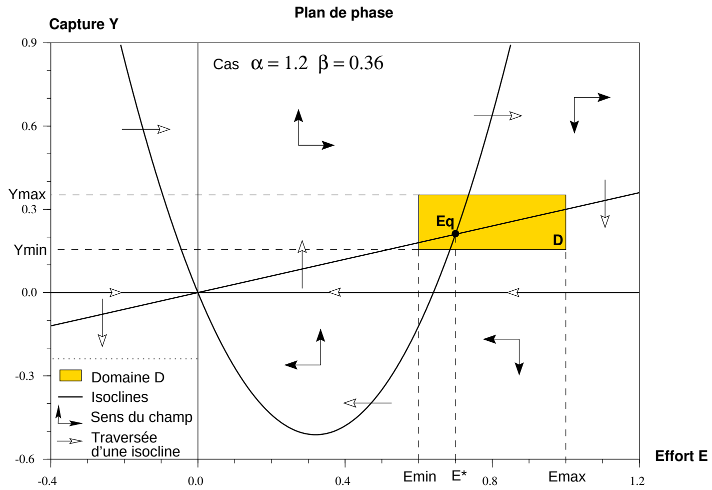


FIG. IV.25 *Mise en évidence du domaine D et du champ associé au système (IV.14′) non commandé : cas 2 bis.*

La détermination du domaine invariant est similaire à celle réalisée dans le cas 1. Ainsi pour la description détaillée des étapes de résolution non graphique, on se reportera au cas précédent. Seuls les résultats et commentaires particuliers à ce cas sont présentés ci-dessous.

➤ FIGURE IV.26 Cette figure sert de base : elle met en évidence le domaine D contenant l'équilibre Eq dans lequel on veut maintenir le système, ainsi que les isoclines et le champ associés au système (IV.14′) non commandé.

➤ FIGURE IV.27 Cette figure montre que le sous-domaine invariant sans contrôle est très petit dans ce cas, ce qui laisse présager d'un domaine invariant sous contrôle plus petit que précédemment. En particulier car sur une grande partie de la frontière, le champ est sortant (pour U nul). C'est lié au fait que l'effort varie vite dans ce cas, α et β étant grands.

➤ FIGURE IV.28 On applique sur les zones critiques de la frontière, le contrôle le plus favorable déterminé précédemment. Mais même avec ce contrôle, on voit sur cette figure qu'il reste une zone non viable assez importante, constituée de quatre secteurs situés aux quatre coins du domaine. α et β étant grands, le contrôle a une moindre influence sur le système, d'où ce résultat.

Contrairement au cas précédent, le champ avec contrôle aux frontières du sous-domaine invariant ne tend pas à ramener le système vers les zones non viables. Il n'est donc pas nécessaire d'effectuer une étude plus poussée pour déterminer les points limites sur la frontière de D, soit :

$$\left|\begin{array}{l} E_1 = 0,155 \\ E_2 = 0,325 \\ Y_1 \simeq 0,648 \\ Y_2 \simeq 0,880 \end{array}\right.$$

Interprétation *– La taille réduite du sous-domaine invariant s'explique par le fait que dans ce cas, les revenus de la capture et les coûts de l'effort qu'elle engendre sont élevés. La consigne sur la variation de l'effort a donc une importance moindre pour les pêcheurs.*

➤ FIGURE IV.29 Le choix des trajectoires limites des zones non viables associées aux bornes E_{min} et E_{max} est assez clair sur cette figure. Il est même évident : il faut diminuer l'effort lorsqu'il devient trop grand et l'augmenter lorsqu'il devient trop faible.

➤ FIGURE IV.30 Le choix des trajectoires limites des zones non viables associées aux bornes Y_{min} et Y_{max} est moins évident. On voit sur cette figure que l'on a intérêt à diminuer l'effort au maximum quand la capture devient trop grande. Mais pour la borne Y_{min}, il faut faire un choix. Prendre le contrôle U_{max} est globalement un meilleur choix. On pourrait par un contrôle un peu plus compliqué augmenter légèrement la taille du sous-domaine invariant, mais ce n'est pas le but recherché : nous voulons identifier des stratégies simples.

Interprétation *– Augmenter l'effort quand la capture est faible et vice versa est une tactique à court terme : elle ne tient pas compte de la variation du stock pendant ce temps. Ce qui est normal, car le stock évolue relativement lentement par rapport aux gains et coûts de la pêcherie dans ce cas.*

➤ FIGURE IV.31

En guise de conclusion, cette figure met en évidence le sous-domaine invariant de D ainsi déterminé, dans le plan de phase (U, Y).

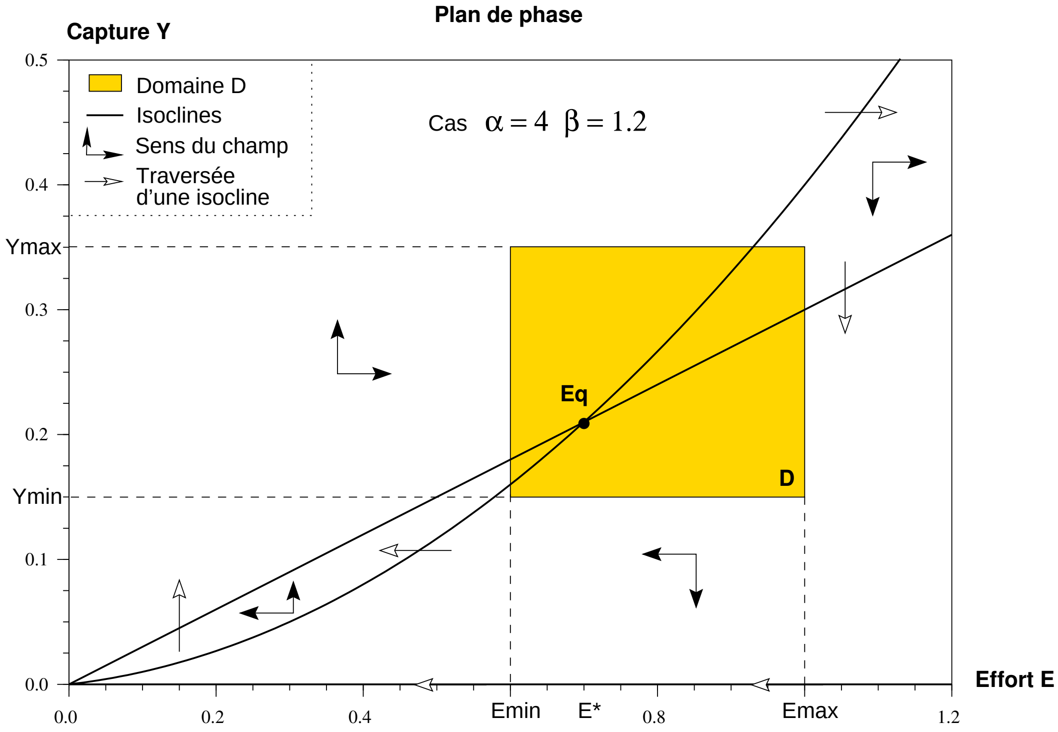


FIG. IV.26 *Mise en évidence du domaine D et du champ associé au système (IV.14′) non commandé : cas 2.*

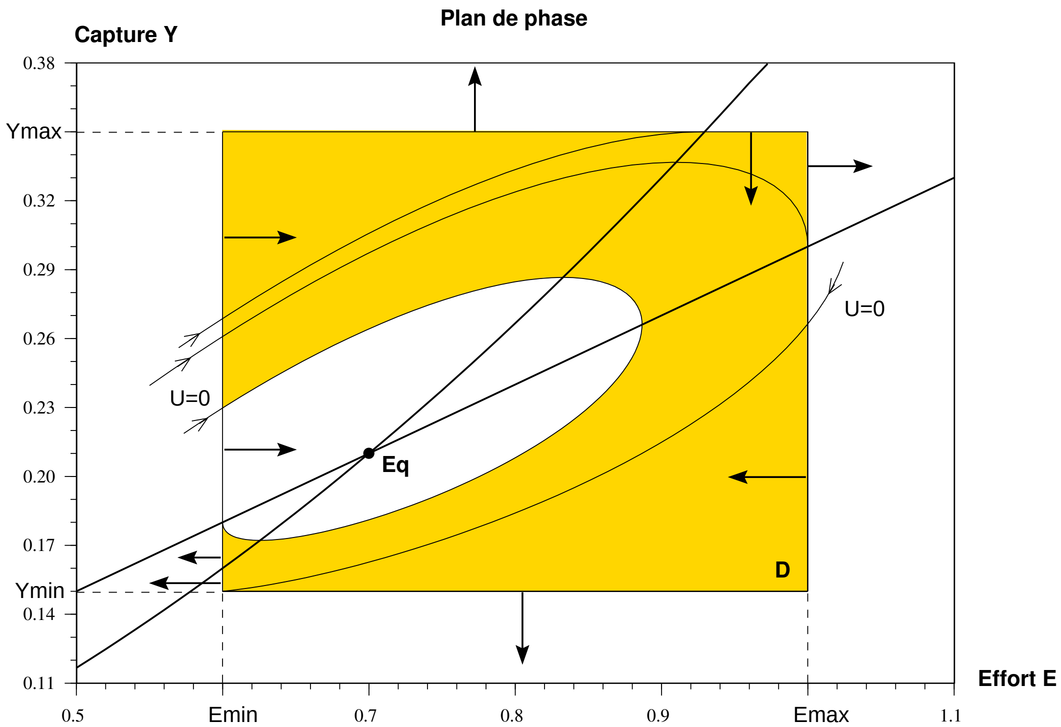


FIG. IV.27 *Identification du sous-domaine invariant de D sans contrôle (zone non grisée) : cas 2.*

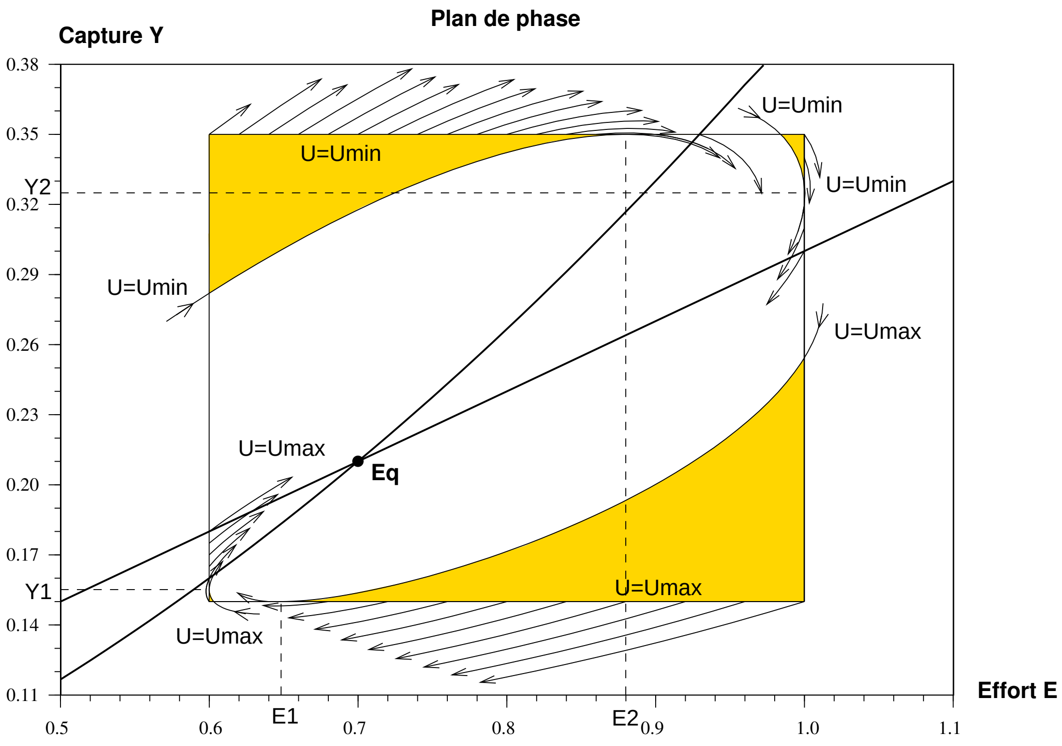


FIG. IV.28 *Détermination du contrôle le plus favorable à la frontière du domaine D, ainsi que de la zone non viable issue de ce contrôle (zone grisée) : cas 2.*

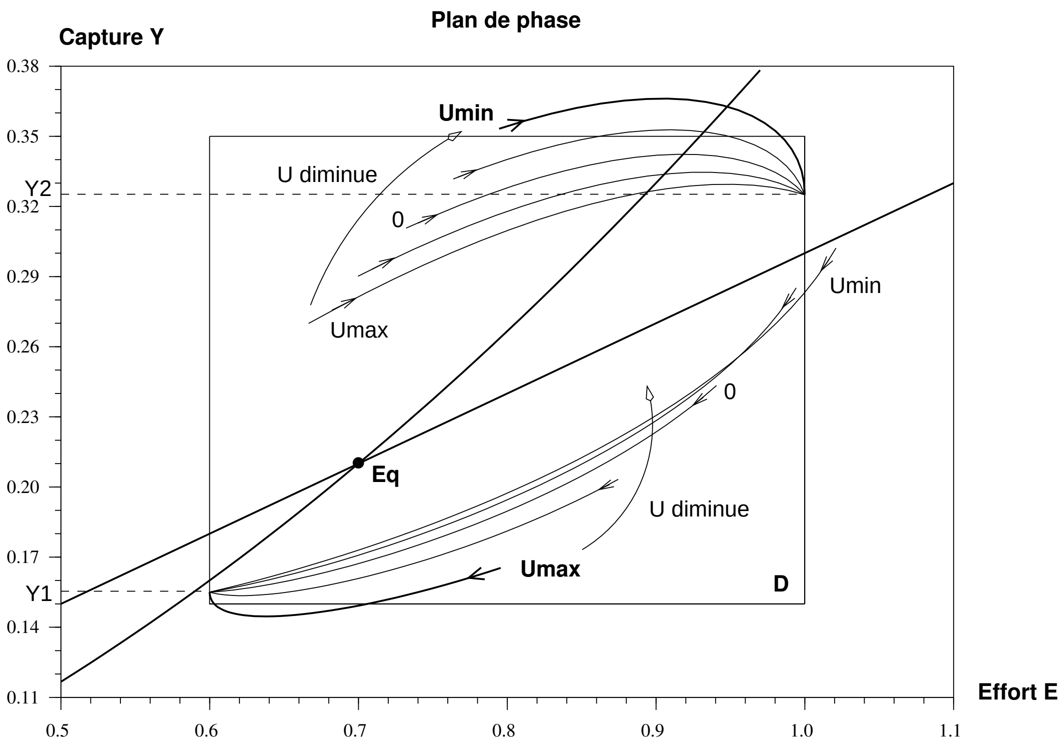


FIG. IV.29 *Étude de la limite du sous-domaine invariant de D : cas 2.*

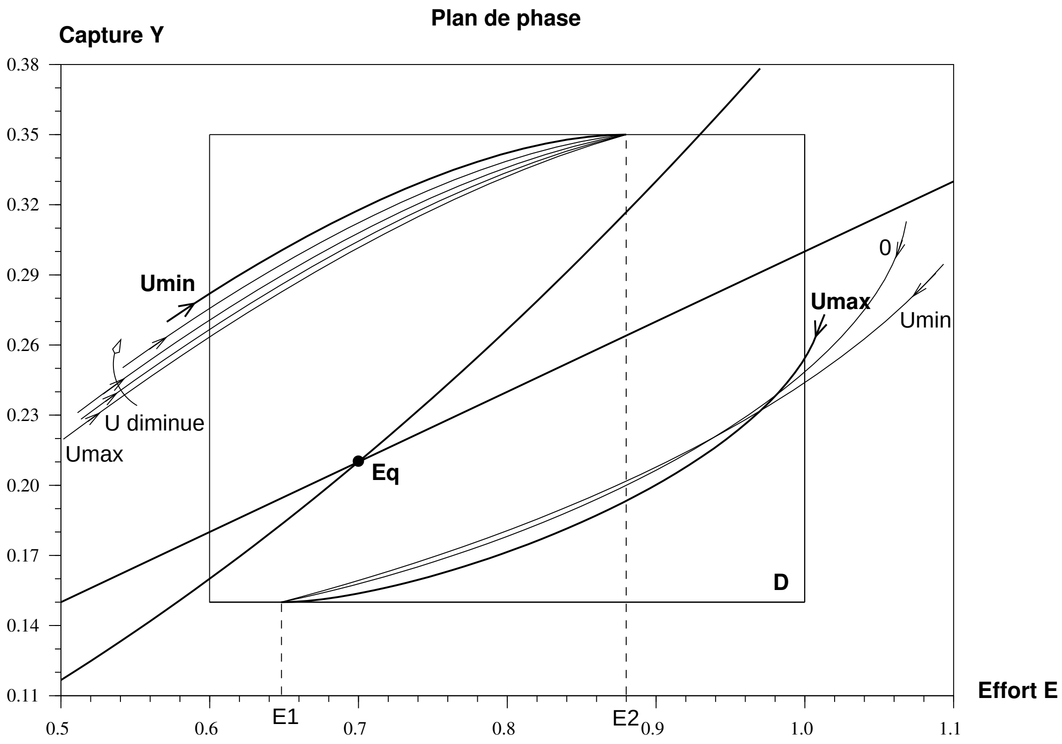


FIG. IV.30 *Étude de la limite du sous-domaine invariant de D (bis) : cas 2.*

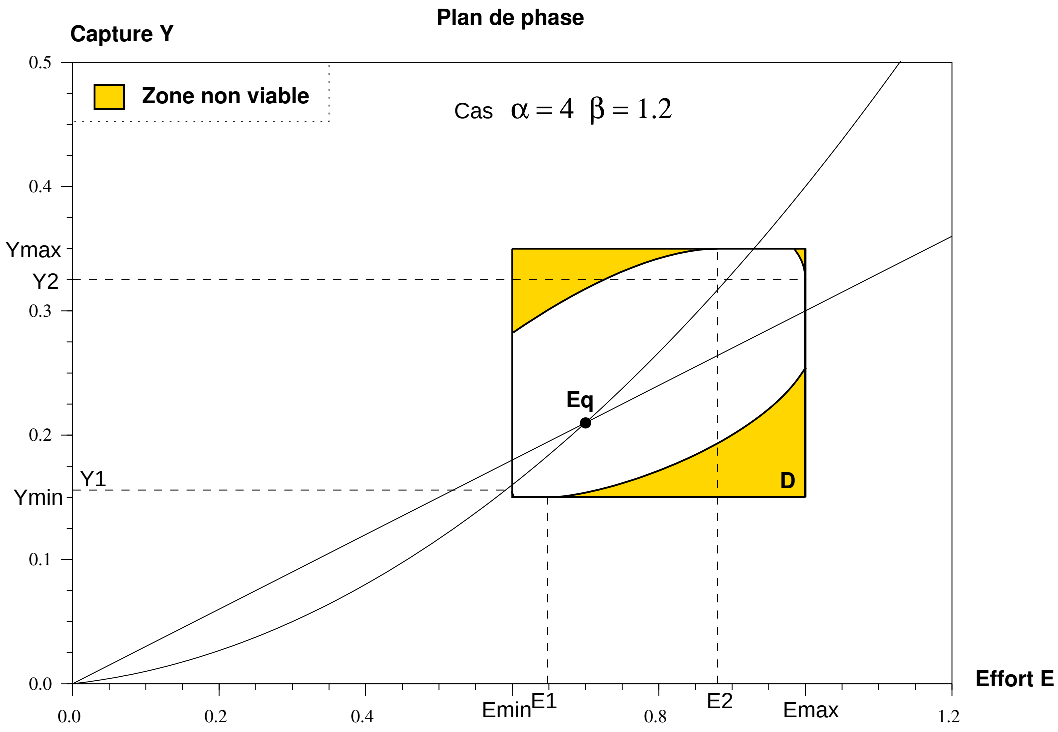


FIG. IV.31 *Mise en évidence du sous-domaine invariant de D (zone non grisée) : cas 2.*

d) Détermination du domaine invariant : cas 3

Ce dernier cas correspond à $\alpha = 1$. Les valeurs des paramètres choisies sont donc :

$$\alpha = 0,8 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0,24 \text{ d'après (IV.15)}$$

◆ Ce cas présente un comportement très similaire à celui du cas 1. Les isoclines associées au système (IV.14′) non commandé sont ici trois droites et non plus une parabole et deux droites ; mais au voisinage du domaine D elles sont assez semblables (cf. figure ci-dessous). Comme en outre les paramètres α et β ont des valeurs très proches par rapport au cas 1, cela explique pourquoi les sous-domaines invariants sont similaires dans les deux cas. Cette étude est donc reportée en annexe D.

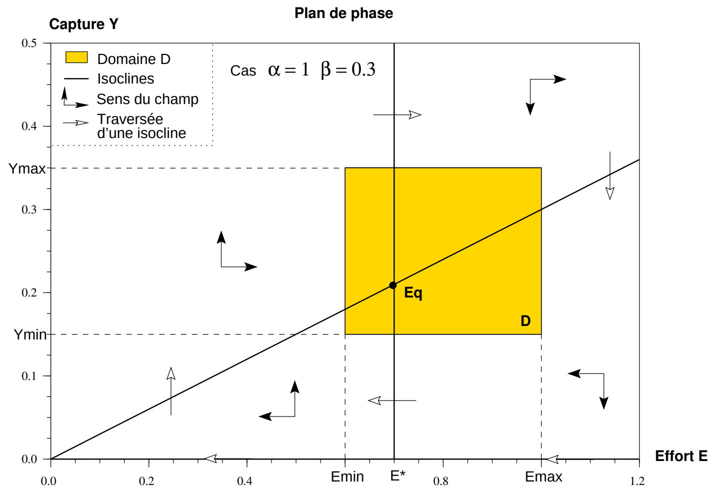


FIG. IV.32 *Mise en évidence du domaine D et du champ associé au système (IV.14′) non commandé : cas 3.*

IV.3.3 Conclusion

On a donc utilisé une méthode de résolution très simple, essentiellement graphique, pour réguler une pêcherie. Les buts poursuivis sont de gérer la pêcherie de manière à ce que l'effort et la capture ne s'écartent pas trop d'un niveau de référence. Ce critère de régulation traduit une rentabilité économique très simple : les revenus et les coûts ou moyens mis en œuvre doivent demeurer à peu près fixes.

Le système intégrant une dynamique de l'effort est plus intéressant, car il traduit le fait réel que les consignes données au pêcheurs ne sont pas exécutées à la lettre. Non seulement à cause des fraudes ou fausses déclarations, mais aussi car les pêcheurs ont des contraintes économiques propres. La comparaison entre les deux systèmes est illustrée sur la figure IV.33. Y sont représentés les trois sous-domaines invariants correspondant respectivement aux trois systèmes suivants : le système sans dynamique du pêcheur et le système avec, cas 1 et 2. On constate très nettement que rajouter une dynamique sur l'effort enrichit le système : avec les mêmes contraintes de régulation on peut obtenir des comportements très différents, qui sont liés au contexte économique. La régulation peut même être plus efficace, ce qui ne semble pas évident vu que le système devient moins facilement commandable. D'où l'intérêt d'intégrer une dynamique du comportement des pêcheurs, même simple.

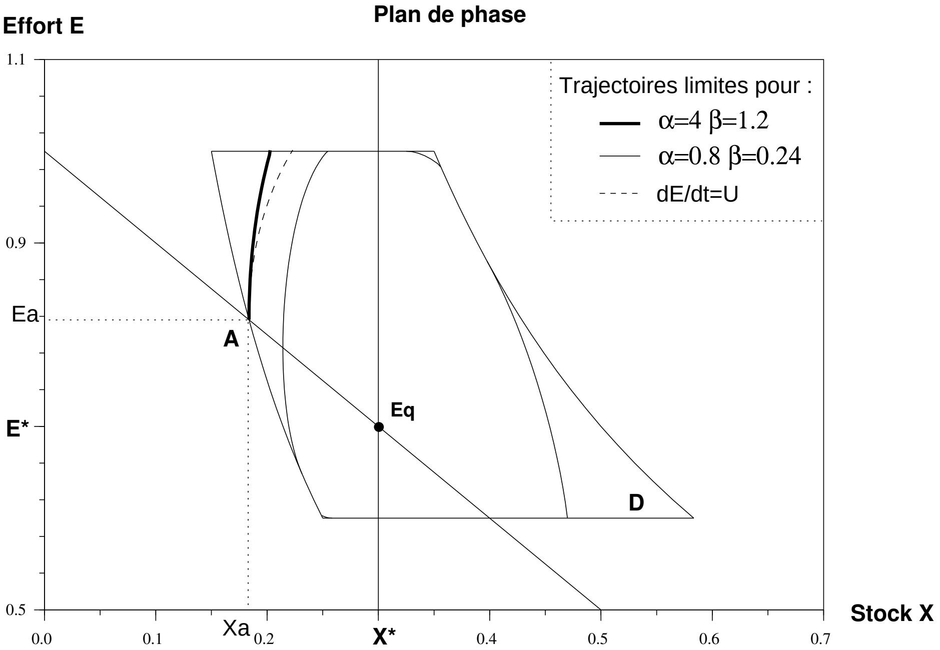


FIG. IV.33 *Comparaison des domaines invariants obtenus dans les cas 1 et 2, ainsi que pour le système sans dynamique propre de l'effort (en pointillés).*

Les stratégies issues de cette étude sont simples, mais pas toujours intuitives. La résolution graphique que nous présentons est claire, mais certainement limitée si l'on complique le système, en particulier en augmentant sa dimension. Cependant l'approche domaine peut encore être appliquée. Elle donne en outre une grande robustesse à ses résultats, c'est pourquoi ils sont beaucoup plus applicables que ceux issus de la régulation optimale de la section précédente.

Identification appliquée à un stock halieutique

Chapitre V

Identification appliquée à un stock halieutique

Contenu

Introduction

Pour identifier les paramètres intervenant dans les modèles, il existe deux grandes façons de procéder : soit par connaissance empirique des paramètres biologiques qui interviennent ; soit à partir de relevés expérimentaux. C'est cette dernière solution que nous adoptons dans ce chapitre.

L'identification suit les étapes suivantes : admettons que nous sommes en possession d'un jeu de données suffisant, i.e. de relevés portant sur un nombre de variables suffisant (par rapport au nombre de paramètres à identifier), et ce pour de relativement longues séries temporelles. Il faut tout d'abord retenir une structure de modèle à identifier, cohérente avec les données disponibles. Puis il faut déterminer un critère, admettant comme variables les paramètres du modèle et faisant intervenir les données expérimentales. Les paramètres retenus par l'identification sont ceux qui optimisent ce critère. Cette procédure est décrite plus en détails dans l'ouvrage de Walter & Pronzato [52].

Selon la façon dont le modèle est construit, il est possible qu'il soit structurellement impossible d'identifier certains paramètres. Il existe à cet effet des méthodes pour tester l'identifiabilité des paramètres [51].

Une procédure d'identification menée sur le stock de flétan du Pacifique fait l'objet de la première section de ce chapitre, qui est suivie par une illustration simple du concept d'identifiabilité.

V.1 Identification sur un stock de flétan

V.1.1 Données

Les données dont on dispose pour cette étude[1] concernent le flétan du Pacifique. Elles sont constituées des relevés de capture et de capture par unité d'effort (cpue) entre 1929 et 1987, à raison d'un relevé par an. Une partie de ces données provient de RICKER [40].

On en déduit aisément une série de 59 relevés annuels d'effort et de capture, que l'on utilise pour la procédure d'identification.

V.1.2 Méthode

On choisit de représenter notre système par un modèle global en temps continu, plus précisément par le *modèle de* SCHAEFER (cf. section I.1.1). Il se formule de la manière suivante :

$$\dot{X}(t) = rX(t)\left(1 - \frac{X(t)}{k}\right) - Y(t) \tag{V.1a}$$

$$Y(t) = qE(t)X(t) \tag{V.1b}$$

$$X(1929) = X_0 \quad \text{(condition initiale)} \tag{V.1c}$$

Les paramètres à identifier sont donc : r, k, q. Comme nous n'avons aucune indication sur le niveau du stock, nous ajoutons sa valeur X_0 à l'instant initial dans les paramètres à identifier. Cette valeur est nécessaire pour l'intégration de l'équation différentielle V.1a.

Comme *critère d'identification*, on choisit de minimiser les écarts entre la capture réelle et la capture simulée, par une méthode des moindres carrés, sur les 59 années des relevés. Cette méthode consiste à minimiser la somme des carrés des écarts. Le problème correspondant s'exprime de la manière suivante:

$$\text{Trouver : } (r,\, k,\, q,\, X_0)_{opt} = \min_{\{r,\, k,\, q,\, X_0\}} \frac{1}{2} \int_{t=1929}^{1987} (Y_{exp.} - Y_{simul.})^2 \, dt$$

où : $Y_{simul.}$ est calculée grâce à la relation (V.1b) avec $U = U_{exp.}$ et X ;
X étant obtenu par intégration de (V.1a) avec $Y = Y_{exp.}$ et la condition initiale (V.1c).

V.1.3 Outil numérique

La résolution numérique des problèmes d'identification a été réalisée sur le logiciel MATLAB, avec l'*Optimization Toolbox.* Pour la fonction implémentée, permettant de résoudre ces problèmes d'optimisation par les moindres carrés non-linéaires, nous avons fait appel à l'algorithme de LEVENBERG–MARQUARDT.

1. Communication personnelle de R. B. DERISO par l'intermédiaire de D. PELLETIER.

Méthode de Levenberg–Marquardt Cette méthode d'optimisation est est un mélange de la méthode du gradient et de celle de GAUSS–NEWTON. L'algorithme de recherche associé est, en notant $\boldsymbol{J}$ la matrice jacobienne de la fonction $\boldsymbol{f}$ à optimiser :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)^T \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k) + \lambda_k \boldsymbol{I}\right)^{-1} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k) \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$$

On commence par prendre λ_k grand, et en proche de l'optimum, on diminue λ_k. Ainsi cette méthode se comporte comme celle du gradient loin de l'optimum, et comme celle de GAUSS–NEWTON au voisinage de l'optimum et elle conjugue les avantages des deux : convergence assurée si le point de départ est bien choisi et rapide au voisinage de l'optimum.

Cette méthode est bien adaptée à notre cas, car on ne connaît pas à priori les ordres de grandeur pour les paramètres du modèle halieutique.

V.1.4 Résultats

Par la méthode des moindres carrés décrite ci-dessus, nous avons obtenu pour le stock de flétan les valeurs des paramètres optimaux suivantes :

$$\left| \begin{array}{ll} r = 0.278 & \text{en année}^{-1} \\ k = 1055 & \text{en } 10^6 \text{ livres} \\ q = 0.222 & \text{en } 10^3 \text{ longueur d'engin} \times \text{année}^{-1} \\ X_0 = 249 & \text{en } 10^6 \text{ livres} \end{array} \right. \tag{V.2}$$

Les résultats obtenus sont satisfaisants, comme le montre la figure V.1 illustrant la comparaison entre les captures expérimentale et simulée issues de ce modèle identifié. Sont aussi représentés dans les figures V.2 et V.3, les efforts appliqués sur le stock de flétan ayant servi à l'identification, ainsi que l'évolution de la biomasse résultant du modèle de SCHAEFER identifié par (V.2).

Nous considérons donc que, pour le stock de flétan du Pacifique, le modèle de SCHAEFER muni des paramètres et de la condition initiale de d'abondance (V.2), est validé.

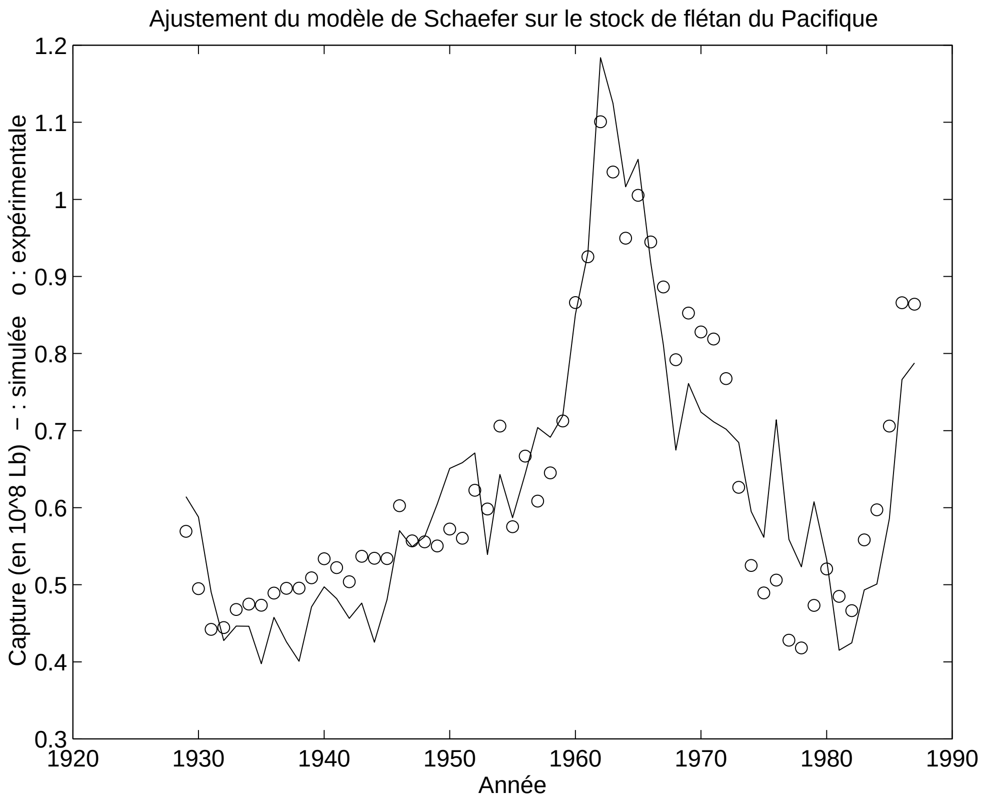


FIG. V.1 *Comparaison, pour le flétan du Pacifique, entre les captures expérimentale et simulée par le modèle de* SCHAEFER *(V.1) muni des paramètres identifiés (V.2).*

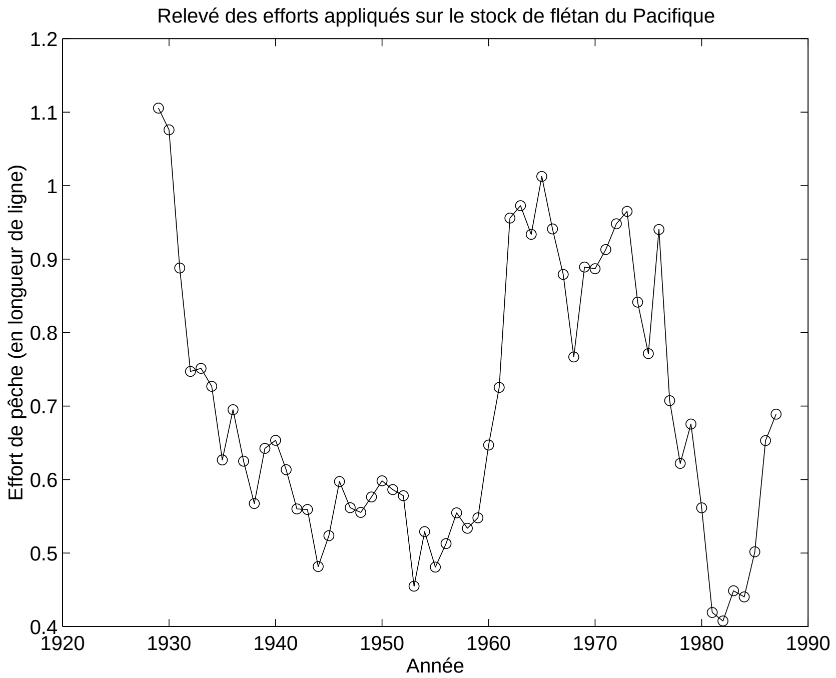


FIG. V.2 *Relevés des efforts de pêche appliqués sur le stock de flétan du Pacifique sur la période d'identification.*

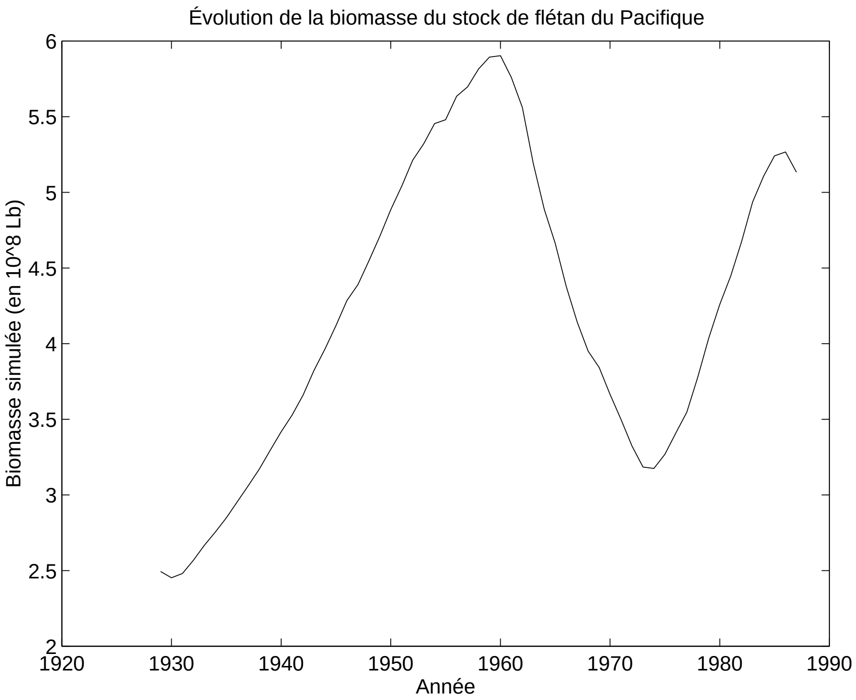


FIG. V.3 *Simulation de la biomasse du stock de flétan du Pacifique résultant du modèle de* SCHAEFER *identifié par (V.2).*

V.2 Identifiabilité

Soit un système donné, représenté par un modèle dont on connaît la forme. Un modèle est dit identifiable, si à partir de l'observation de la sortie Y et en supposant l'entrée E connue, on peut en déduire de manière unique la valeur de ses paramètres.

Dans le cadre halieutique, un modèle de stock exploité est identifiable si, à partir de la connaissance de relevés de capture et d'effort, il est possible de déterminer un unique jeu de paramètres pour le modèle.

Diverses méthodes permettant de tester l'identifiabilité des modèles sous forme d'état sont présentées dans l'ouvrage édité par WALTER [51].

V.2.1 Identifiabilité du modèle de Schaefer

Nous pouvons tout d'abord vérifier l'identifiabilité du modèle de SCHAEFER. Ce résultat a été obtenu en collaboration avec M. Z. HADJ-SADOK.

On note ($\theta = r, k, q, X_0$) les « véritables paramètres» du modèle de SCHAEFER (V.1) et $\hat{\theta}$ leurs valeurs estimées. En appliquant l'approche par série de Taylor, les conditions :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{d^k}{dt^k} y(t, \hat{\theta}) = \lim_{t \to 0^+} \frac{d^k}{dt^k} y(t, \theta) \quad k = 0, 1, 2 \tag{V.3}$$

aboutissent après simplification au système suivant :

$$\begin{cases} \hat{q}\hat{X}_0 = qX_0 \\ \hat{r}(1 - \dfrac{\hat{X}_0}{\hat{k}}) = r(1 - \dfrac{X_0}{k}) \\ \hat{q} = q \\ \dfrac{\hat{r}\hat{X}_0}{\hat{k}} = \dfrac{rX_0}{k} \end{cases} \tag{V.4}$$

Une condition suffisante pour que le modèle soit identifiable, est que les équations (V.4) admettent une solution unique $\hat{\theta} = \theta$. Or cette condition est bien vérifiée si la valeur initiale du stock X_0 n'est pas nulle. Cette situation particulière ($X_0 = 0$) n'a pas d'intérêt puisqu'elle signifie l'extinction de l'espèce et donc qu'il n'y a pas d'évolution dynamique.

La structure du modèle de SCHAEFER est donc bien identifiable.

V.2.2 Exemple de modèle non identifiable

Nous voulons montrer ici qu'un modèle où l'on connaît presque tous les paramètres n'est pas nécessairement identifiable. Pour cela, nous étudions un cas très simple. Il ne s'agit pas en effet de présenter un modèle très réaliste et appliqué, mais plutôt un contre-exemple au modèle de SCHAEFER dont on a montré l'identifiabilité ci-dessus.

Considérons une population exploitée à un taux constant, structurée en deux stades : le premier comprend les juvéniles et le second les adultes matures et exploités. Les phénomènes pris en compte sont la pêche, le vieillissement, la mortalité naturelle et la reproduction. Ils sont introduits de manière très simple, grâce à des coefficients supposés constants, qui donnent au modèle une structure linéaire :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = -\alpha X_1 - m_1 X_1 + f X_2 \\ \dot{X}_2 = \alpha X_1 - m_2 X_2 - qEX_2 \\ Y = qEX_2 \end{cases} \tag{V.5}$$

avec :

Y	: capture
E	: effort de pêche supposé constant
X_i	: effectif du stade i
q	: capturabilité
α	: coefficient de passage du stade 1 au stade 2
m_i	: taux de mortalité naturelle du stade i
f	: nombre moyen d'œufs déposés par adulte fécond et par unité de temps

On cherche donc à estimer les paramètres de ce modèle, à partir de l'observation de la capture. Dans ce cas, on suppose non seulement que l'on connaît l'effort de pêche, mais aussi certains paramètres du modèle :

Hypothèses : E, q, α et f sont connus.

Ces hypothèses signifient que l'on a accès à la mortalité par pêche qE, la durée moyenne du stade pré-recruté $1/\alpha$ et le taux de fécondité du stock f. Les paramètres inconnus que l'on cherche à identifier sont les mortalités naturelles m_1 et m_2.

Comme l'on ne connaît pas les effectifs des différents stades, on transforme le système d'équations (V.5) en une équation différentielle admettant la capture comme variable. Cette équation s'obtient par des dérivées successives de la capture Y et s'exprime ainsi :

$$\ddot{Y} + [(\alpha + m_1) + (m_2 + qE)]\dot{Y} + (\alpha + m_1)(m_2 + qE)Y = \alpha f Y \tag{V.6}$$

On observe Y au cours du temps, d'où l'on peut en déduire ses dérivées. En outre on suppose connus les paramètres f et α. On peut donc estimer le produit et la somme des deux quantités suivantes :

$$\mathcal{M}_1 = \alpha + m_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_2 = m_2 + qE$$

Connaissant α et qE, on peut déduire des quantités $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ la valeur des mortalités naturelles m_1 et m_2. Mais ayant uniquement accès à la somme et au produit de ces quantités, il est impossible de distinguer $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. Il existe donc deux jeux de solutions pour les mortalités naturelles.

> On a donc montré que le modèle de population exploitée à deux stades (juvéniles et adultes) décrit ci-dessus n'est pas identifiable. Même en connaissant la mortalité par pêche, le coefficient de passage et la fécondité de la population, il est impossible de déterminer de manière unique la mortalité naturelle de chaque stade. Deux solutions sont possibles pour le couple (m_1, m_2).

Remarque : Il arrive que l'on possède des indications supplémentaires. Comme par exemple pour ce modèle, où il est plus réaliste que la mortalité du stade juvénile soit plus importante que celle du stade adulte. En ajoutant cette hypothèse, il est possible d'identifier les paramètres du modèle (V.5), si elle est vérifiée sur un seul des couples solution. Mais le but recherché ici n'est pas de tester l'identifiabilité de ce modèle particulier de dynamique de population, mais de donner un contre-exemple simple, sur un «cas d'école».

V.3 Conclusion

Ce court chapitre a essentiellement pour but de justifier les paramètres utilisés pour l'étude de régulation optimale sur le stock de flétan dans le section IV.2, ainsi que d'introduire la notion d'identifiabilité.

Cependant d'autres travaux ont été menés dans cette direction. La procédure d'identification décrite dans ce chapitre a été réalisée sur d'autres stocks, mais les résultats ne sont pas satisfaisants ; soit que le modèle de SCHAEFER ne soit pas adapté à l'évolution de ces stocks, soit que les données soient insuffisantes. Il est en outre assez difficile d'obtenir des relevés extensifs de données capture/effort pour un stock déterminé, en particulier sur une période de temps assez longue. Ce qui explique que l'identification de modèles halieutiques sur des stocks réels ne soit pas plus développée.

Nous nous sommes aussi intéressés à l'identification de modèles structurés en stades, comme par exemple le modèle avec pré-recrutés du chapitre II. Faute d'une série temporelle suffisamment longue et complète de capture par classe d'âge et d'effort, nous n'avons pas pu mettre cette procédure en place sur un stock halieutique. En revanche quelques essais ont été réalisés sur un système plus simple : des copépodes planctoniques élevés en laboratoire, grâce à des données fournies par la Station Zoologique de Villefranche/mer. Il n'y a certes pas de captures dans ce cas, mais les copépodes sont recensés par stades à intervalles réguliers ; les stades sont bien différenciés car ils correspondent à des étapes physiologiques distinctes. Ainsi on obtient une longue série de mesures.

Il nous semble intéressant de développer ce genre d'approche. Il est difficile d'obtenir des données suffisantes à partir de l'exploitation d'un stock ; en outre les campagnes scientifiques pour estimer la ressource sont de par leur coût trop peu nombreuses. Par conséquent, raisonner sur des systèmes plus simples constitue une étape préalable utile pour l'identification de stock halieutique.

Perspectives

Conclusion et perspectives

Nous nous sommes penchés dans ce mémoire sur quelques applications d'outils de l'automatique à la pêche. Des outils conceptuels tout d'abord ont été utilisés, pour *formaliser* les systèmes pêche. L'approche système avec entrées/sorties propre à l'automatique s'applique bien à la pêche et elle permet d'expliciter les relations entre les diverses composantes d'une pêcherie. Cela est d'autant plus utile dans les cas complexes comme celui de la section I.4.

Ces outils ont aussi permis l'élaboration de deux *modèles* dynamiques, afin d'étudier le terme de recrutement dans les populations structurées. Le premier modèle, décrit dans le chapitre II, introduit une dynamique sur les pré-recrutés en prenant en compte les processus qui interviennent à ce niveau. Le second, présenté dans le chapitre III, considère une relation stock-recrutement généralisée, car une troisième composante intervient : le recrutement est déterminé à partir du stock fécond, mais aussi du temps. Cela permet d'inclure par exemple l'influence de facteurs climatiques ou environnementaux.

L'*analyse* de ces deux modèles a été réalisée par des outils usuels de l'automatique, comme le critère du cercle qu'il a fallu adapter néanmoins à nos systèmes ; ou par d'autres moins classiques, comme les résultats issus des systèmes coopératifs. Elle a permis de montrer la stabilité des équilibres, condition nécessaire à la pérennité de la population. Elle a en outre mis en évidence les limites des relations stock-recrutement classiques.

Dans le chapitre IV, nous avons utilisé des outils de *contrôle* très classiques, comme le théorème de Riccati pour le contrôle optimal. Mais nous avons aussi développé une approche par domaine invariant, qui consiste à chercher un domaine où il est possible de maintenir le système (bornes sur la capture et l'effort) en fixant des contraintes sur le contrôle, soit la vitesse de variation de l'effort de pêche. Ces études ont permis de réguler la pêcherie, i.e. de réduire les fluctuations de capture et d'effort de pêche, afin d'assurer aux pêcheurs des revenus et des coûts relativement stables. Les résultats obtenus ne sont pas directement appliqués, mais ils constituent une base de réflexion intéressante pour déterminer l'impact et l'efficacité de certains contrôles et extraire des tendances pour la gestion des stocks.

Enfin, le chapitre V traitant de l'*identification* a permis, par des techniques usuelles (critère des moindres carrés), d'estimer les paramètres caractéristiques d'un stock réel : le flétan du Pacifique. Ce résultat, obtenu à partir de relevés de pêche, valide le modèle de Schaefer employé. En outre des études d'identifiabilité ont montré qu'à partir des données disponibles, ces paramètres sont déterminés de manière unique.

Perspectives

Il manquerait un chapitre à cette thèse, ayant pour sujet l'*observation*. En effet un des problèmes essentiels posés aux halieutes est d'estimer l'état de la ressource, afin de produire des avis scientifiques. Un outil utilisé à cet effet est la VPA, Virtual Population Analysis, présentée dans le glossaire en annexe A ; cette méthode simple sous-tend des hypothèses très fortes. Développer des techniques liées aux observateurs serait une application très intéressante de l'automatique à l'halieutique. Comme pour tout modèle de diagnostic, on se heurterait au faible nombre de données exploitables.

Il nous semble aussi intéressant de développer des modèles avec *dynamique du pêcheur* : on entend par là modéliser le comportement du pêcheur, en introduisant par exemple les contraintes économiques qui le motivent (prix du poisson, coût de l'effort...). Des modèles similaires à celui présenté dans la section I.4, où un cycle complet de gestion est modélisé, de l'élaboration de la mesure de gestion à l'exploitation de la ressource (cf. figure I.13, page 53), sont très utiles pour la validation de mesures de gestion. Néanmoins il serait nécessaire de procéder au préalable à l'étude de systèmes simplifiés, pour bien comprendre les différents mécanismes impliqués et leurs interactions.

L'interface entre le stock et les mesures de gestion n'est pas totalement passive : sans parler des fraudes et rejets (souvent dus à des mesures ambiguës et au manque de contrôle), les pêcheurs ont leurs contraintes économiques propres qui les poussent à interpréter la mesure de gestion. Ils constituent une composante active dans le processus de gestion, et leurs intérêts doivent être pris en compte. Gestion des stocks ne signifie pas préservation à tout prix. Même à l'heure actuelle où la surcapacité des flottilles de pêche menace la pérennité de stocks, ces problèmes ne peuvent se résoudre sans prendre en compte les difficultés que traversent les pêcheurs. La fermeture de la pêcherie de hareng de Mer du Nord vers la fin des années 70, contrainte par l'épuisement du stock, a bouleversé son exploitation : le stock s'est reconstitué et a retrouvé un bon niveau, mais le marché n'existe plus. Il faudrait éviter d'en arriver à de telles extrémités. Prendre en compte la viabilité d'une pêcherie, dans l'optique de la méthode par domaine invariant de la section IV.3, serait d'un intérêt certain.

Pour finir, une perspective plus appliquée est de développer les procédures d'identification afin de pouvoir appliquer et valider certains résultats. Pour cela nous avons évoqué en introduction la difficile et coûteuse recherche des données. D'où l'intérêt de prolonger cette thèse par des travaux plus halieutiques : pour être plus proche du terrain, afin de mieux réaliser ses contraintes.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

[1] ANON. Draft Council Regulation for "fixing management objectives and strategies for certain fisheries or group of fisheries for the period 1994 to 1997" and. EC Com(663), 1993.

[2] ANON. The new components of the common fisheries policy and their practical implementation. EC Com(664), 1993.

[3] AUBIN, J.-P. *Viability theory.* Systems and control: foundations and applications. Birhäuser, Boston, 1991.

[4] BEAMISH, R. J., AND MCFARLANE, G. A., Eds. *Effects of ocean variability on recruitment and an evaluation of parameters used in stock assessment models* (1989), no. 108 in Can. Spec. Publ. Fish. Aquat. Sci. Symposium held in Vancouver, Oct. 26–29, 1987.

[5] BELTRAMI, E. *Mathematics for dynamic modeling.* Academic Press, San Diego, California, 1987.

[6] BERMAN, A., AND PLEMMONS, R. J. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, vol. 9 of *Classics in Applied Mathematics.* SIAM, Philadelphia, 1994. Originally published by Academic Press, 1979.

[7] BEVERTON, R. J. H., AND HOLT, S. J. *On the dynamics of exploited fish populations.* Chapman & Hall, London, 1993. First edition in 1957.

[8] BEVERTON, R. J. H., AND HOLT, S. J. Section 6: Recruitment and egg-production. In *On the dynamics of exploited fish populations.* Chapman & Hall, London, 1993, pp. 44–67. See [7].

[9] CLARK, C. W. *Mathematical bioeconomics: the optimal management of renewable resources.* Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, New York, 1976.

[10] D'ANDRÉA NOVEL, B., AND COHEN DE LARA, M. *Commande linéaire des systèmes dynamiques.* Masson, Paris, 1994.

[11] DERISO, R. B. Harvesting strategies and parameter estimation for an age-structured model. *Can. J. Fish. Aquat. Sci. 37* (1980), 268–282.

[12] DOYEN, L., AND GABAY, D. Économie des ressources renouvelables et viabilité. Manuscrit, 1996.

[13] FAURRE, P., AND ROBIN, M. *Éléments d'automatique.* Dunod, 1984.

[14] FISHER, M. E. An age-structured fish population model with coupled size and population density. *Mathematical Biosciences 86* (1987), 15–34.

[15] GORDON, H. S. The economic theory of a common-property ressource: the fishery. *J. Pol. Econ. 82* (Apr. 1954), 124–142.

[16] GRAHAM, M. Modern theory of exploiting a fishery, and application to North Sea trawling. *J. Cons. Int. Explor. Mer 37*, 3 (1977).

[17] HILBORN, R., AND WALTERS, C. J. *Quantitative fisheries stock assessment: choice, dynamics & uncertainty.* Chapman & Hall, New York, 1992.

[18] HORWOOD, J. W., Ed. *Modelling of fisheries management strategies* (1994), Privately published. Report of a meeting held in Dublin, February 1994.

[19] HORWOOD, J. W., JACOBS, O. L. R., AND BALLANCE, D. J. A feed-back control law to stabilize fisheries. *J. Cons. int. Explor. Mer 47* (1990), 57–64.

[20] JACOBS, O. L. R., BALLANCE, D. J., AND HORWOOD, J. W. Fishery management as a problem in feedback control. *Automatica 27*, 4 (1991), 627–639.

[21] JAKOBSSON, J. Exploitation of the icelandic spring- and summer-spawning herring in relation to fisheries management, 1947–1977. *Rapp. P-v. Réun. Cons. Perm. Int. Explor. Mer. 177* (1980), 23–42.

[22] KHALIL, H. K. *Nonlinear systems.* Macmillan, New York, 1992.

[23] KWAKERNAAK, H., AND SIVAN, R. *Linear control systems.* Wiley-Interscience, New York, 1972.

[24] LAUREC, A. Étalonnage de l'analyse des cohortes en halieutique. In *Biométrie et Environnement*, J. D. Lebreton and B. Asselain, Eds. Masson, Paris, 1993, pp. 205–239.

[25] LAUREC, A., AND LE GUEN, J.-C. Dynamique des populations marines exploitées – Tome I : Concepts et modèles. Rapports scientifiques et techniques 45, CNEXO (cf. Éditions de l'IFREMER), 1981.

[26] LLEONART, J., FRANQUESA, R., SALAT, J., AND OLIVER, P. "Heures" a bio-economic model for Mediterranean fisheries, towards an approach for the evaluation of management strategies. *Scientia Marina 60*, 2–3 (1996), 427–430.

[27] MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature 261* (June 1976), 459–467.

[28] MURRAY, J. D. *Mathematical biology*, vol. 19 of *Biomathematics.* Springer, Berlin, 1989.

[29] NISBET, R. M., AND GURNEY, W. S. C. *Modelling fluctuating populations.* Wiley-Interscience, New york, 1982.

[30] NISBET, R. M., AND GURNEY, W. S. C. The formulation of age-structure models. In *Mathematical ecology*, T. G. Hallam and S. A. Levin, Eds., vol. 17 of *Biomathematics.* Springer, 1986.

[31] PAULIK, G. J. Studies of the possible form of the stock-recruitment curve. *Rapp. P.-v. R un. Cons. int. Explor. Mer 164* (1973), 303–315.

[32] PAVÉ, A. *Modélisation en biologie et en écologie.* Aléas, Lyon, 1994.

[33] Pearl, R. *The biology of population growth.* Alfred A. Knopf, New York, 1925.

[34] Pella, J. J., and Tomlinson, P. K. A generalized stock production model. *Bull. IATTC 13* (1969), 419–496.

[35] Pelletier, D. *Les sources d'incertitude en gestion des pêcheries: évaluation et propagation dans les modèles.* Thèse de doctorat, Institut National Agronomique Paris-Grignon, Oct. 1991.

[36] Rice, J. C. Quantitative methods in recruitment. In *Report from the National Workshop on Recruitment, held in St. John's, Newfoundland, Feb. 1988* (1988), M. Sinclair, J. T. Anderson, M. Chadwick, J. Gagn, W. D. McKone, J. C. Rice, and D. Ware, Eds., no. 1626 in Canadian Technical Report of Fisheries and Aquatic Sciences, pp. 148–164.

[37] Ricker, W. E. A method of estimating minimum size limits for obtaining maximum yield. *Copéia 2* (1945), 84–94.

[38] Ricker, W. E. Stock and recruitment. *J. Fish. Res. Board Can. 11* (1954), 559–623.

[39] Ricker, W. E. Handbook of computations for biological statistics of fish populations. Bulletin 119, Fisheries Research Board of Canada, 1958.

[40] Ricker, W. E. Computation and interpretation of biological statistics of fish populations. Bulletin 191, Fisheries Research Board of Canada, 1975. See [41] for French translation.

[41] Ricker, W. E. Calcul et interprétation des statistiques biologiques des populations de poissons. Bulletin 191F, Fisheries Research Board of Canada, 1980. French translation of [40].

[42] Rothschild, B. J. *Dynamics of marine fish populations.* Harvard University Press, Cambridge, MA, 1986.

[43] Schaefer, M. B. Some aspects of the dynamics of populations important to the management of the commercial marine fisheries. *Bulletin of Mathematical Biology 53*, 1/2 (1991), 253–279. Reprinted from the *Bulletin of the Inter-American Tropical Tuna Commission 1*, 2 (1954), 27–56.

[44] Schnute, J. A general theory for analysis for catch and effort data. *Can. J. Fish. Aquat. Sci. 42* (1985), 414–429.

[45] Smith, H. L. Systems of ordinary differential equations which generate an order preserving flow. A survey of results. *SIAM Review 30*, 1 (Mar. 1988), 87–113.

[46] Smith, V. L. Economics of production from natural ressources. *Am. Econ. Rev. 58* (1968), 409–431.

[47] Tikhonov, A. N. Systems of differential equations with small parameters of the derivatives. *Math. Sb. 31* (1952), 575–586. In Russian.

[48] Touzeau, S. Contrôle optimal et identification en halieutique. DEA d'Automatique Industrielle, École Centrale de Lyon, Université Lyon 1, INSA Lyon et Université de Savoie, 1993.

[49] VERHULST, P. F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Corr. Math. et Phys. 10* (1838), 113–121.

[50] VON BERTALANFFY, L. A quantitative theory of organic growth. *Human Biology 10*, 2 (1938), 181–213.

[51] WALTER, E., Ed. *Identifiability of parametric models.* Pergamon Press, 1987.

[52] WALTER, E., AND PRONZATO, L. *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales.* MASC (modélisation, analyse, simulation, commande). Masson, Paris, 1994.

[53] WOOSTER, W. S., AND BAILEY, K. M. Recruitment of marine fisheries revisited. In *Effects of ocean variability on recruitment and an evaluation of parameters used in stock assessment models* (1989), R. J. Beamish and G. A. McFarlane, Eds., no. 108 in Can. Spec. Publ. Fish. Aquat. Sci., pp. 153–159. See [4].

ANNEXES

Annexe A

Glossaire halieutique – *automatique*

La partie halieutique de ce glossaire est réalisée à partir de l'ouvrage de LAUREC–LE GUEN [25], la partie *automatique* à partir de D'ANDRÉA-NOVEL & COHEN DE LARA [10].

Abondance : L'abondance est l'effectif total du stock.
☞ *cf. stock*

Approche d'état / approche fréquentielle : Soient u le vecteur entrée, y le vecteur sortie et x l'état d'un système ; t représente le temps. Un modèle du système issu de l'approche d'état a la forme suivante :

$$\begin{cases} & \text{Cas général} \qquad \text{Cas linéaire} \\ \dfrac{dx(t)}{dt} & = f(x(t), u(t), t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = g(x(t), u(t), t) \ = Cx(t) \end{cases}$$

En opposition avec la représentation d'état ou interne par les fonctions f et g ou par les matrices (A, B, C) dans le cas linéaire, il existe une approche externe ou entrée/sortie. Cette dernière caractérise un système linéaire par sa ***fonction de transfert*** G. Elle permet, dans un espace spécial dit fréquentiel, de déduire la sortie Y de l'entrée U :

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Le passage de la variable temporelle $y(t)$ à la variable $Y(s)$ se fait par la transformation de LAPLACE.

La représentation entrée/sortie est moins riche que l'approche d'état, car elle ne permet pas de voir les modes inobservables et non commandables du système. Le lien entre ces deux approches, toujours dans le cas linéaire, est donné par la relation suivante :

$$G(s) = C\,(s\,I - A)^{-1}\,B$$

☞ *cf. système, transformation de Laplace*

Automatique : L'automatique peut être définie comme la science qui étudie et contrôle des systèmes dynamiques. L' approche système est une caractéristique de cette science qui va de la théorie à l'application.

Biomasse : La biomasse est la masse totale du stock.
☞ *cf. stock*

Capturabilité : La capturabilité est la probabilité d'être capturé par une unité d'effort, pour un poisson pris au hasard dans un ensemble donné. Elle est notée q. Le schéma suivant (figure A.1) décompose le coefficient de capturabilité en plusieurs termes, qu'il est souvent difficile de distinguer, d'où l'intérêt de la notion globale de capturabilité.

La **vulnérabilité** varie selon la taille ou l'âge : un jeune poisson est moins vulnérable à cause de sa petite taille, un vieux poisson à cause de sa rapidité. D'autres facteurs interviennent, tels la saison, le sexe, les courants, le rythme nychtéméral, la nature du fond, la profondeur...

Un animal est dit **accessible** s'il est présent sur les lieux de pêche. La phase accessible est limitée par l'âge de recrutement et l'âge éventuel de réforme ; elle ne demeure pas nécessairement constante, à cause des migrations.

capturabilité
- **efficience**
  (dépend entre autres de la stratégie ou tactique de pêche)
- **disponibilité**
  (dépend du poisson, par rapport à l'engin, indépendamment du comportement du pêcheur)
  - **accessibilité**
    (déplacements vers et hors des lieux de pêche, composante géographique)
  - **vulnérabilité**
    (dominée par les problèmes de comportement par rapport à l'engin)

TAB. A.1 *La capturabilité ; d'après [25].*

Capture : La capture ou prise est définie comme le nombre ou la masse de poissons pêchés par une flottille déterminée pendant une période donnée.

Classe d'âge : La classe à laquelle appartient un poisson est définie par référence au nombre de « premier janvier » qu'a connu l'animal. La population comporte en général à tout moment des animaux d'âges différents. Dans le cas le plus favorable, la reproduction prend place chaque année sur une unique et courte période, ce qui permet de distinguer facilement des groupes d'animaux nés la même année. À chaque année est ainsi associée une classe d'âge (ou groupe d'âge).

Dans la réalité, les dates de naissance ne sont pas connues avec une grande précision, d'autant plus que la reproduction peut s'étaler sur plusieurs semaines, voire plusieurs mois. Il est également difficile de déterminer l'âge des vieux animaux. La dernière classe n comprend donc généralement tous les animaux d'âge supérieur ou égal à n.
☞ *cf. cohorte*

Cohorte : Une cohorte est constituée par l'ensemble des animaux nés une année donnée. Au fil des années, une cohorte passe d'une classe d'âge à l'autre.
☞ *cf. classe d'âge*

Contrôle / commande : Le contrôle consiste à élaborer une loi d'entrée sur le système, de manière à lui faire suivre un comportement donné. Si le contrôle dépend des autres variables du système, états ou sorties, on dit qu'il est en boucle fermée ou *feedback* ; s'il ne dépend que du temps, on dit qu'il est en boucle ouverte.

Commandabilité : Un système est dit commandable (ou *contrôlable*) si, partant d'un état initial X_0 quelconque, il est possible de trouver un contrôle U en temps fini permettant d'amener cet état en tout point X_1 de l'espace. C'est une notion liée, comme son nom l'indique, au fait que l'on maîtrise le système. Grâce au contrôle, on peut amener un système commandable où l'on veut.
☞ *cf. observabilité, réalisation minimale*

Cpue : La cpue, **c**apture **p**ar **u**nité d'**e**ffort (ou **c**atch **p**er **u**nit of **e**ffort), traduit le rendement de la pêche. Elle est définie comme le rapport de la capture réalisée pendant un intervalle de temps donné et de l'effort déployé à cet effet.
☞ *cf. capture, effort de pêche*

Effort de pêche : Nous considérons qu'il s'agit de l'**effort nominal**, soit le *point de vue du pêcheur* sur l'exploitation. L'effort de pêche appliqué à un stock d'animaux aquatiques est une mesure de l'ensemble des moyens de capture mis en œuvre par les pêcheurs sur ce stock, pendant un intervalle de temps donné. L'effort est donc mesuré en longueur de ligne déployée, traits de chalut...

C'est l'intégration de l'intensité de pêche sur un intervalle de temps donné et il est relié à la mortalité par pêche. Avec les notations suivantes :

P : prises instantanées, taux de capture	(en nombre *ou* masse / unité de temps)
q : capturabilité	(en unité d'effort^{-1})
X : abondance *ou* biomasse du stock	(en nombre *ou* masse)
U : effort instantané, intensité de pêche	(en unité d'effort / unité de temps)
Y : capture sur Δt	(en nombre ou masse)
E : effort de pêche sur Δt	(en unité d'effort)

on a par définition de l'intensité de pêche :

$$P(t) = q(t)\,U(t)\,X(t)$$

Si le stock et la capturabilité ne varient pas sur l'intervalle de temps Δt, alors en intégrant l'équation précédente, on obtient l'équation aux captures suivante :

$$Y = q\,E\,X.$$

Cette formulation est la plus classique car on considère généralement des grandeurs annuelles intégrées ($\Delta t = 1$ an).
☞ *cf. mortalité par pêche*

> REMARQUE : Dans ce document, nous conservons l'équation aux captures instantanée, mais en l'exprimant d'une manière similaire à la formulation classique intégrée. En notant E_1 l'intensité de pêche et Y_1 le taux de capture, on aura donc :
>
> $$Y_1 = qE_1X$$
>
> que souvent on notera par abus : $Y = qEX$. ▮

Halieutique : L'halieutique est la science étudie la relation entre l'homme et les populations qu'il exploite par la pêche. Par des avis scientifiques sur les mesures de gestion à mettre en place et par des études destinées à mieux connaître et comprendre le fonctionnement du système pêche, elle cherche à améliorer la situation des pêches.

Identifiabilité : Soit un système donné, représenté par un modèle dont on connaît la forme. Un modèle est dit identifiable, si à partir de l'observation de la sortie Y et en supposant l'entrée E connue, on peut en déduire de manière unique la valeur de ses paramètres.

Identification : Soit un système muni d'une forme de modèle donnée. L'identification revient à déterminer les valeurs des paramètres associés à ce modèle.

Métier : Un métier correspond à une pratique de la pêche donnée. Il se caractérise en général par le choix d'un engin, d'une espèce cible et d'un lieu de pêche à un moment donné. Il peut y avoir sur un lieu de pêche plusieurs métiers définissant chacun une entrée en phase exploitable différente. Un âge au recrutement est associé à chacun.

Mortalité par pêche : La mortalité par pêche F est le *point de vue du poisson* sur l'exploitation. Elle est définie comme le rapport entre la capture réalisée par unité de temps et la valeur du stock à cet instant. Soit avec les notations précédentes :

$$F(t) = P(t)/X(t) = q(t)U(t)$$

ou si l'on considère que les variables sont constantes pendant un intervalle de temps donné : $F = C/X = q\,E$
☞ *cf. effort de pêche*

Observabilité : Un système est dit observable si, en supposant que l'on observe la sortie Y à tout instant, il est possible de trouver un contrôle U en temps fini qui permette de déterminer l'état à l'instant initial X_0. La sortie est la variable que l'on observe. La notion d'observabilité est liée au fait que connaissant cette sortie, à condition d'exciter un peu le système grâce au contrôle, on peut en déduire son état.
☞ *cf. commandabilité, réalisation minimale*

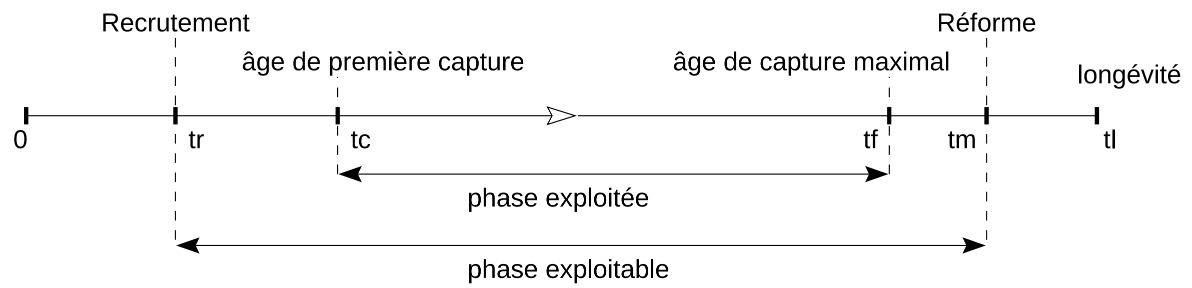


FIG. A.1 *Phases de la vie d'une cohorte ; d'après [25].*

Phase exploitable : Un individu est dit exploitable s'il est susceptible d'être pêché. La phase exploitable est comprise entre le recrutement et la réforme.
☞ *cf. recrutement, réforme, figure A.1*

Phase exploitée : Selon les métiers présents sur les lieux de pêche, un animal exploitable n'est pas nécessairement exploité. Si l'animal est trop jeune ou trop petit pour risquer d'être capturé par l'un des métiers présents, il y a *échappement*. Sinon, dès lors qu'un animal n'est pas happé par le chalut, il y a *évitement* ; soit parce que grâce à la rapidité de sa nage, il évite le filet, soit parce qu'il est enfoui ou plaqué au sol. On distingue donc à l'intérieur de la phase exploitable, une phase dite exploitée.
☞ *cf. figure A.1*

Population : Une population en halieutique est l'ensemble des individus vivant dans un écosystème déterminé et possédant des caractères communs transmissibles par hérédité. Apparaît ainsi une double exigence d'*isolement* et d'*homogénéité*. Ce terme d'homogénéité peut avoir deux sens : uniformité des caractéristiques individuelles ou brassage. Le second, plus réaliste, est généralement retenu.

Réalisation minimale : Un système linéaire en représentation d'état est dit minimal si son état est de taille minimale dans la classe de tous les systèmes ayant la même fonction de transfert. On peut montrer qu'un tel système est une réalisation minimale si et seulement si il est commandable et observable.
☞ *cf. commandabilité, observabilité*

Recrutement : C'est le processus par lequel la fraction la plus jeune de la population s'intègre pour la première fois à l'ensemble des poissons accessibles à la pêche. Le recrutement ne s'accompagne pas toujours d'un phénomène biologique marqué comme une migration. On définit donc plus généralement l'*âge au recrutement* comme l'âge du plus petit animal exploitable pour un ensemble de métiers donné.
☞ *cf. phase exploitable, figure A.1*

Réforme : C'est le processus qui conduit les individus à quitter définitivement les lieux de pêche au-delà d'un certain âge. De même, l'*âge de réforme* correspond à l'âge au-delà duquel, quelle qu'en soit la cause, les animaux ne sont plus exploitables.
☞ *cf. phase exploitable, figure A.1*

Relation stock-recrutement : Une relation stock-recrutement est une fonction reliant le recrutement, i.e. l'entrée des jeunes individus dans le stock, au stock fécond, constitué de l'ensemble des femelles matures.
☞ *cf. recrutement*

Stock : Le stock est défini comme l'ensemble des animaux exploitables. Il est associé dans le cas idéal à une population biologique, mais dans la pratique il peut être plurispécifique. C'est donc plus une *unité de gestion*, liée à l'exploitation, qu'une unité biologique.
☞ *cf. population*

Système : Un système au sens automatique est isolé du monde extérieur et caractérisé à l'aide de variables qui traduisent son organisation : les entrées sont de manière générale maîtrisées ou connues et servent à contrôler le système ; les sorties sont observées et mesurées ; dans l'approche d'état, les variables internes (ou d'état) décrivent l'état du système ; dans l'approche fréquentielle un système linéaire est caractérisé par sa fonction de transfert, qui relie les sorties aux entrées.

On représente usuellement un système par un schéma-bloc, comme sur la figure A.2.

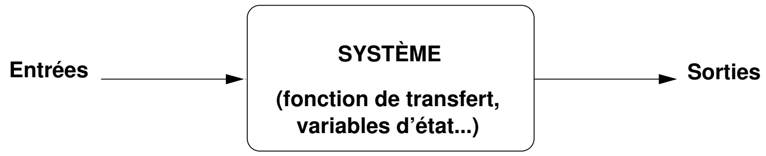


FIG. A.2 *Schéma-bloc décrivant un système automatique.*

☞ *cf. approche d'état / approche fréquentielle*

Transformation de Laplace : C'est une transformation qui associe à toute fonction f localement intégrable de la variable réelle t, nulle pour $t < 0$ et vérifiant des conditions restrictives convenables, la fonction F de la variable complexe s définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

☞ *cf. approche d'état / approche fréquentielle (fonction de transfert)*

VPA : La VPA, de l'anglais **V**irtual **P**opulation **A**nalysis, ou analyse des cohortes en français, consiste à reconstituer les mortalités par pêche d'un stock structuré en A classes d'âge, sur une période de T années, à partir des données de capture par âge. Elle est fondée sur le modèle de Ricker en temps discret (cf. section I.1.2) et elle permet d'estimer les effectifs de chaque classe d'âge sur la période considérée.

Pour cela, on suppose connues sur toute la période de temps :
– toutes les mortalités naturelles ;
– les mortalités par pêche terminales (i.e. pour la dernière année T) de toutes les cohortes encore exploitées ;
– celles de la dernière classe A pour les cohortes n'étant plus exploitées l'année T.

Ces deux dernières hypothèses constituent la condition aux limites de la VPA, représentée sur la figure A.3, et à partir de laquelle on peut reconstituer les mortalités par pêche antérieures. En effet, d'après le modèle de Ricker, on a :

$$C(a,t) = N(a,t)\frac{F(a,t)}{F(a,t)+M(a)}\left(1 - e^{-F(a,t)-M(a)}\right) \tag{A.1}$$

$$C(a-1,t-1) = N(a,t)\frac{F(a-1,t-1)}{F(a-1,t-1)+M(a-1)}\left(e^{F(a-1,t-1)+M(a-1)} - 1\right) \tag{A.2}$$

avec :
- $N(a,t)$: effectif de la classe d'âge a l'année t (*inconnu*)
- $F(a,t)$: mortalité par pêche de la classe a l'année t (*inconnue*)
- $M(a)$: mortalité naturelle de la classe a (*connue*)
- $C(a,t)$: capture réalisée sur la classe a l'année t (*connues*)

Connaissant la mortalité par pêche $F(a,t)$, l'équation (A.1) permet de déduire l'effectif $N(a,t)$ de la cohorte cette année-là ; grâce à l'équation (A.2) on peut alors déterminer la mortalité par pêche $F(a-1,t)$ de cette même cohorte l'année précédente ; d'où $N(a-1,t-1)$ par l'équation (A.1) et ainsi de suite en remontant dans le temps le long d'une cohorte.

Il existe d'autres VPA plus sophistiquées où l'on fait intervenir une « calibration » avec les efforts de pêche [35, 24], ce qui permet d'estimer les mortalités par pêche terminales.

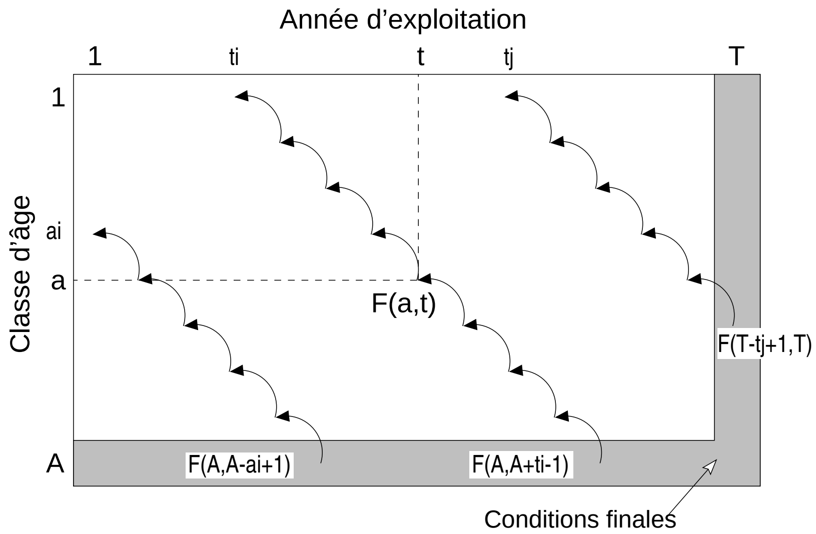


FIG. A.3 *Schéma de résolution de la VPA par cohorte ; d'après [35].*

Annexe B

Résolution du problème de régulation par contrôle optimal

Cette annexe constitue un complément à la section IV.2 *Régulation par contrôle optimal* de ce document. La première section énonce les *théorèmes de* RICCATI pour un système linéaire continu, tandis que la suivante applique ces résultats au système de pêche global puis au stock de flétan.

B.1 Optimisation quadratique pour un système linéaire continu

Cette section expose des résultats de contrôle optimal avec coût quadratique, en temps continu, obtenus pour un système linéaire. Il s'agit du cadre classique du théorème de RICCATI en temps continu, dont les versions en horizon fini et horizon infini font l'objet des deux théorèmes suivants [13, 10] .

Soit le système dynamique linéaire commandé et continu suivant :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{avec :} \left| \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^p \end{array} \right. \tag{B.1}$$

et considérons connues les matrices suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} Q : \text{matrice symétrique positive de taille } n \times n \\ R : \text{matrice symétrique définie positive de taille } p \times p \\ S : \text{matrice de taille } n \times p \\ L : \text{matrice symétrique positive de taille } n \times n \end{array} \right.$$

☞ Un vecteur ou une matrice «prime», e.g. A', représente la transposée de ce vecteur ou cette matrice.

Une matrice S est dite *symétrique* si elle est égale à sa transposée : $S = S'$. Une matrice symétrique est donc carrée (même nombre de colonnes et de lignes) et ses composants s_{ij} – où le premier indice donne la ligne et le second la colonne – sont symétriques par rapport à la diagonale : $\forall i, j \; s_{ij} = s_{ji}$.

Une matrice symétrique S est dite *positive* (respectivement *définie positive* si pour tout vecteur x non nul, on a : $x'Sx \geq 0$ (respectivement $x'Sx > 0$). ▮

Théorème 6 (Optimisation quadratique en horizon fini)
Soit $K_0 = K(0)$ la valeur terminale de la solution de l'équation différentielle rétrograde sui-

vante, appelée ***équation de Riccati**:*

$$\begin{aligned}\dot{K} + A'K + KA - (KB+S)R^{-1}(B'K+S') + Q = 0\\ K(T) = L\end{aligned} \tag{B.2}$$

Considérons pour $T > 0$ le critère quadratique en horizon fini suivant :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \left[x(t)'Q\,x(t) + u(t)'R\,u(t) + x(t)'S\,u(t) + u(t)'S'x(t)\right]\,dt + x(T)'L\,x(T) \tag{B.3}$$

Alors, en notant $x_0 = x(0)$, le minimum de ce critère (B.3) est :

$$\min_u J(u) = x_0'K_0\,x_0$$

De plus, ce minimum est atteint pour la commande en boucle fermée suivante :

$$u^*(t) = -R^{-1}(B'K+S')\,x^*(t) \tag{B.4}$$

où $x^*(t)$ est la solution de :

$$\begin{aligned}&\dot{x}^* = Ax^* + Bu^* = [A - BR^{-1}(B'K+S')]\,x^*\\ &x_0^* = x_0\end{aligned}$$ ◊

Nous allons à présent considérer le problème d'optimisation en horizon infini. Le prochain théorème est analogue au théorème 6 en horizon fini, sauf que l'existence d'une solution à l'équation de Riccati algébrique (et non plus différentielle en horizon infini) nécessite des conditions supplémentaires. Le théorème 8 donne des conditions suffisantes d'existence.

Théorème 7 (Optimisation quadratique en horizon infini)
Supposons qu'il existe une matrice symétrique, définie positive K telle que :

1. *K est solution de l'**équation de Riccati algébrique** (ou stationnaire) suivante :*

$$A'K + KA - (KB+S)R^{-1}(B'K+S') + Q = 0 \tag{B.5}$$

2. *La matrice $(A - BR^{-1}(B'K+S'))$ est asymptotiquement stable.*

Considérons en outre le critère quadratique en horizon infini suivant :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left[x(t)'Q\,x(t) + u(t)'R\,u(t) + x(t)'S\,u(t) + u(t)'S'x(t)\right]\,dt \tag{B.6}$$

Alors, le minimum de ce critère, sur l'ensemble des commandes u telles que l'intégrale de (B.6) converge et que le système, une fois bouclé, soit asymptotiquement stable, vaut :

$$\min_u J(u) = x_0'K_0\,x_0 \tag{B.7}$$

De plus, ce minimum est atteint pour la commande en boucle fermée suivante :

$$u^*(t) = -R^{-1}(B'K+S')\,x^*(t) \tag{B.8}$$

où $x^*(t)$ est la solution de :

$$\begin{aligned}&\dot{x}^* = Ax^* + Bu* = (A - BR^{-1}(B'K+S'))\,x^*\\ &x_0^* = x_0\end{aligned}$$ ◊

L'existence d'une matrice K qui satisfasse les deux hypothèses du théorème 7 est assurée sous les hypothèses de structure du théorème suivant, portant sur les matrices de dynamique A et de commande B, ainsi que la matrice Q de pondération sur l'état.

Théorème 8
Supposons que :

1. *La paire (A, B) est commandable.*
2. *Il existe une décomposition de la matrice Q de la forme : $Q = H'H$, telle que la paire (A, H) est observable.*

Alors, il existe une unique solution symétrique positive de l'équation de Riccati algébrique (B.5) telle que $A - BR^{-1}(B'K + S')$ soit asymptotiquement stable.

En outre, cette matrice K est définie positive et s'obtient comme la limite, quand t tend vers $+\infty$, de toute solution de l'équation différentielle de Riccati :

$$\dot{K} + A'K + KA - (KB + S)R^{-1}(B'K + S') + Q = 0 \qquad \lozenge$$

B.2 Résolution du problème de régulation

On cherche à résoudre les problèmes de contrôle optimal 1 en horizon fini et 2 en horizon infini, associés au système pêche linéarisé (IV.5). On commence par identifier les matrices définies ci-dessus à partir de ce système, soit avec $E_e = \frac{F(X_e)}{qX_e}$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{dF}{dx}(X_e) - qE_e & -qX_e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} qE_e & qX_e \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \beta q^2 E_e^2 & \beta q^2 E_e X_e \\ \beta q^2 E_e X_e & \alpha + \beta q^2 X_e^2 \end{pmatrix} \qquad R = (\gamma) \qquad S = 0 \qquad L = 0$$

Les coefficients de pondération α, β et γ sont supposés positifs. À condition que γ soit strictement positif, R est symétrique définie positive. S et L sont évidemment symétriques positives. Q est symétrique et elle est positive, car :

$$\begin{aligned} w'Qw &= \beta q^2 (E_e w_1 + X_e w_2)^2 + \alpha w_2^2 \\ &\geq 0 \quad \forall w \end{aligned}$$

La matrice K du théorème de RICCATI est une matrice symétrique 2×2 pour ce système. On pose :

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{pmatrix}$$

L'équation de RICCATI associée au problème en horizon fini est équivalente au système suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} &\dot{K}_{11} + 2\left(\frac{dF}{dx}(X_e) - qE_e\right)K_{11} - \frac{1}{\gamma}K_{12}^2 + \beta q^2 E_e^2 = 0 && \text{(a)} \\ &\dot{K}_{12} + \left(\frac{dF}{dx}(X_e) - qE_e\right)K_{12} - qX_eK_{11} - \frac{1}{\gamma}K_{12}K_{22} + \beta q^2 E_e X_e = 0 && \text{(b)} \\ &\dot{K}_{22} - 2qX_eK_{12} - \frac{1}{\gamma}K_{22}^2 + (\alpha + \beta q^2 X_e^2) = 0 && \text{(c)} \end{aligned} \right. \tag{B.9}$$

Le théorème 6 permet de déterminer la commande optimale à partir de la solution de ce système d'équations différentielles et de la condition finale : $K(T) = 0$.

L'équation de RICCATI algébrique associée au problème en horizon infini est :

$$\begin{cases} 2\left(\frac{dF}{dx}(X_e) - qE_e\right)K_{11} - \frac{1}{\gamma}K_{12}^2 + \beta q^2 E_e^2 = 0 & \text{(a)} \\ \left(\frac{dF}{dx}(X_e) - qE_e\right)K_{12} - qX_eK_{11} - \frac{1}{\gamma}K_{12}K_{22} + \beta q^2 E_e X_e = 0 & \text{(b)} \\ -2qX_eK_{12} - \frac{1}{\gamma}K_{22}^2 + (\alpha + \beta q^2 X_e^2) = 0 & \text{(c)} \end{cases} \tag{B.10}$$

Sous certaines hypothèses, il existe une solution K à cette équation, qui permet de déterminer la commande optimale. Ces hypothèses sont vérifiées si les deux conditions du théorème 8 le sont. Montrons tout d'abord la première condition : (A, B) commandable.

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A\,B = \begin{pmatrix} -qX_e \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par définition X_e est non nul, ainsi que la capturabilité q sinon le système n'a pas de sens. Par conséquent (B, AB) est un système libre ; d'après le critère de KALMAN (A, B) est donc commandable.

Montrons à présent la seconde condition. La matrice Q peut se décomposer de la manière suivante : $Q = H'H$; avec :

$$H = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta}qE_e & \sqrt{\beta}qX_e \\ 0 & \sqrt{\alpha} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow HA = \sqrt{\beta}qE_e \begin{pmatrix} \frac{dF}{dx}(X_e) - qE_e & -qX_e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(H, HA) vérifie le critère de KALMAN si et seulement si β est non nul et si en outre α ou $\frac{dF}{dx}(X_e)$ est non nul. Sous cette hypothèse, (A, H) est observable et la deuxième condition est vérifiée. On peut ainsi appliquer les résultats du théorème 7 en horizon infini pour déterminer le contrôle optimal.

Le problème en horizon fini conduit à résoudre un système de trois équations différentielles. La résolution en horizon infini se ramène à trouver les racines d'un polynôme de degré quatre. Les calculs engendrés par ces deux problèmes n'ont pas de solution formelle simple. En revanche, une *résolution numérique* est tout à fait envisageable, comme par exemple sur le *stock de flétan* identifié dans le chapitre V.

Pour l'application au stock de flétan, on a choisi un modèle de SCHAEFER, d'où :

$$\frac{dF}{dx}(X_e) - qE_e = -\frac{r}{k}X_e$$

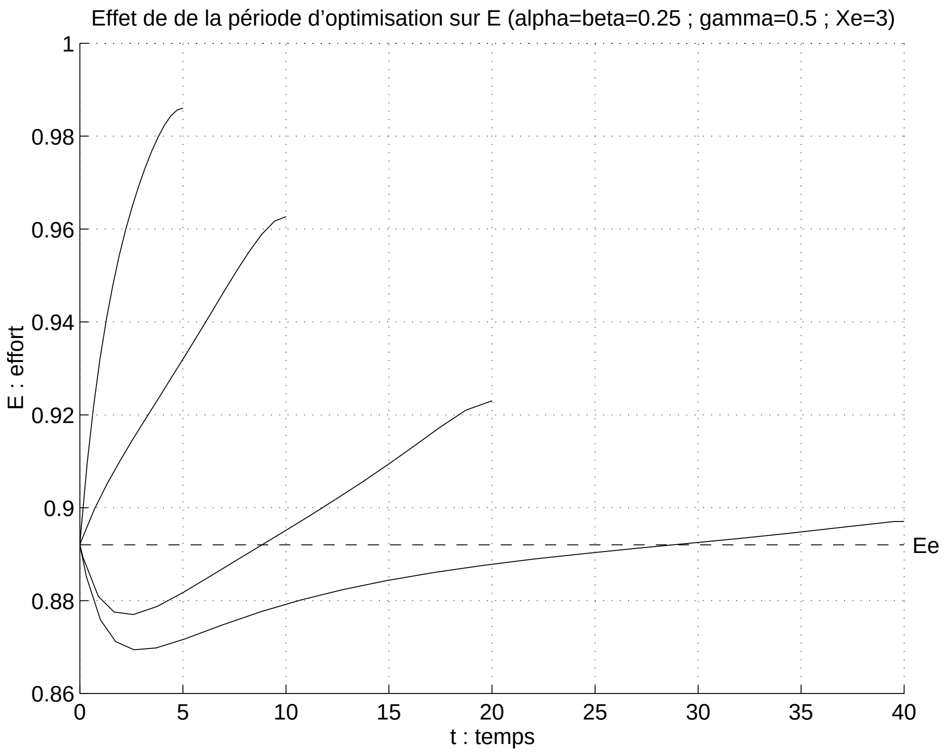
Les paramètres r, k et q du modèle sont connus (cf section V.1.4). Il suffit donc de fixer une valeur pour l'équilibre de référence X_e, dont on déduit E_e, et de choisir les coefficients de pondération α, β quelconques et $\gamma \neq 0$.

Annexe C

Courbes de régulation par contrôle optimal

Cette annexe contient des courbes relatives à la section IV.2 *Régulation par contrôle optimal* de ce document. Elles représentent l'influence des divers paramètres $(T, \alpha, \beta, \gamma)$ sur la régulation optimale, pour les deux équilibres de référence $X_e = 3; 5$ et pour plusieurs états initiaux (X_0, E_0).

Fig. C.1–C.6 :	$X(0) = X_e - 1,5$	$E(0) = E_e$	pour $X_e = 3$
Fig. C.7–C.10 :	$X(0) = X_e - 1,5$	$E(0) = E_e$	pour $X_e = 5$
Fig. C.11–C.16 :	$X(0) = X_e$	$E(0) = E_e + 0,5$	pour $X_e = 3$
Fig. C.17–C.24 :	$X(0) = X_e - 1,5$	$E(0) = E_e + 0,5$	pour $X_e = 3$
Fig. C.25–C.32 :	$X(0) = X_e - 1,5$	$E(0) = E_e + 0,5$	pour $X_e = 5$



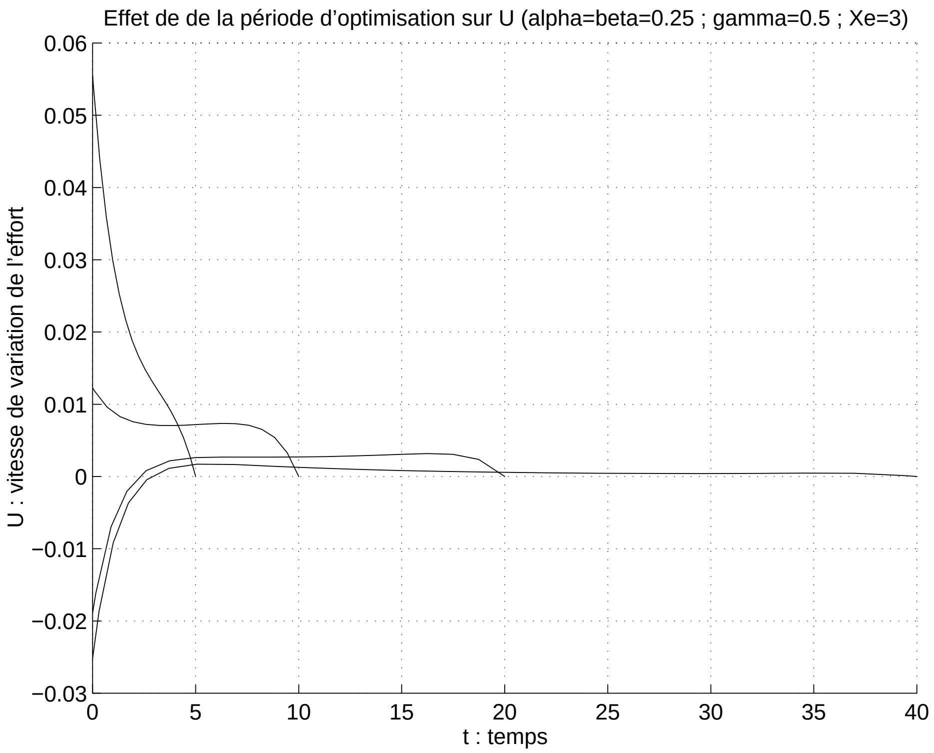


FIG. C.1 *Influence de la durée d'optimisation sur le système commandé suite à une chute de la biomasse du stock* ($X(0) = X_e - 1,5$; $E(0) = E_e$) *pour* $X_e = 3$.

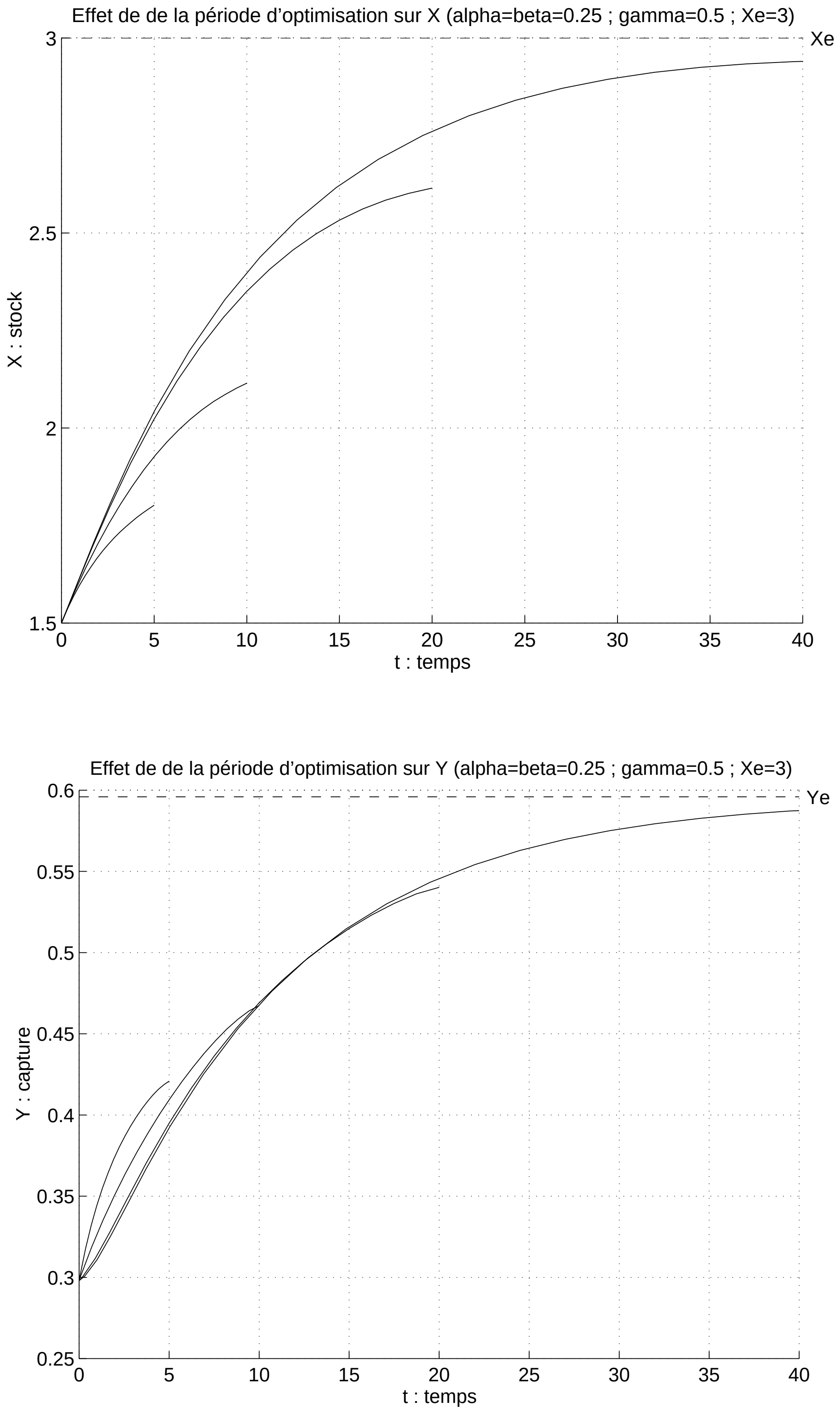
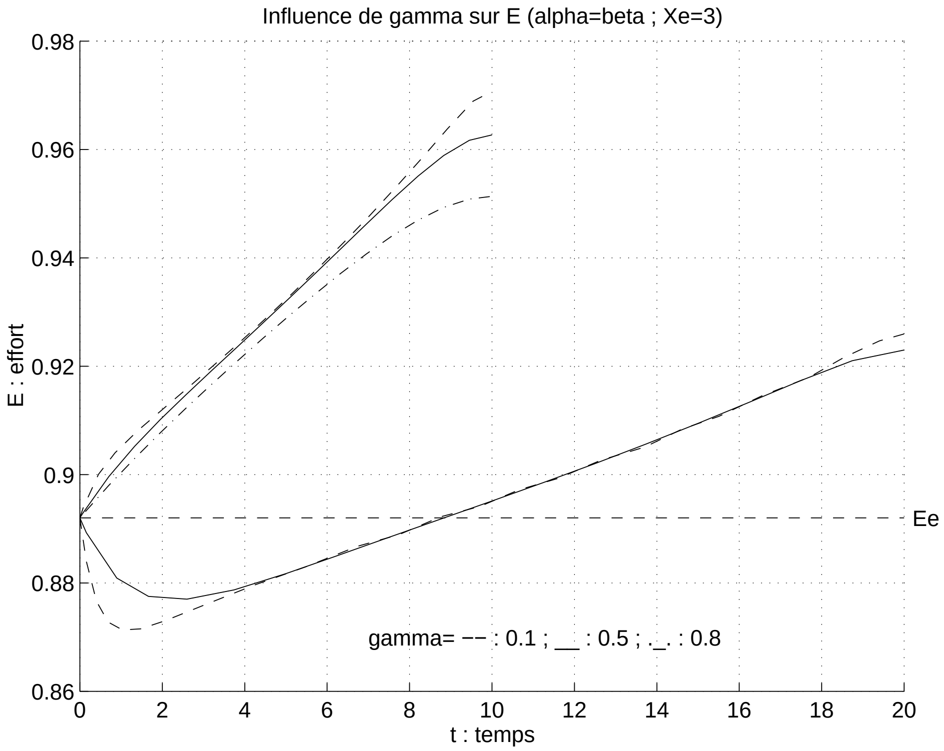


FIG. C.2 *Suite de la figure C.1.*



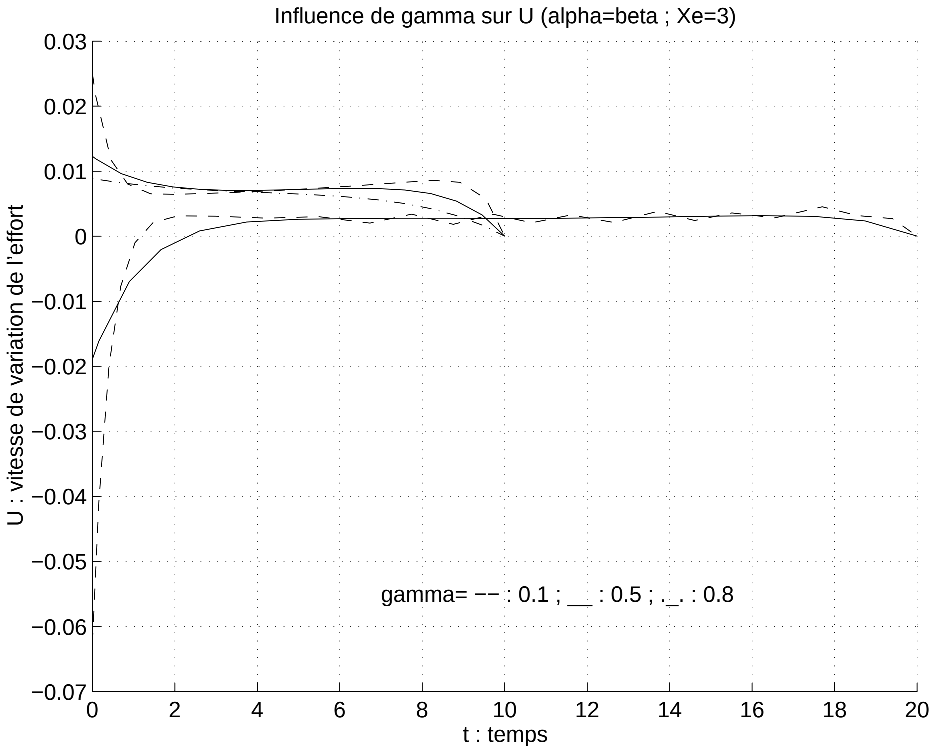
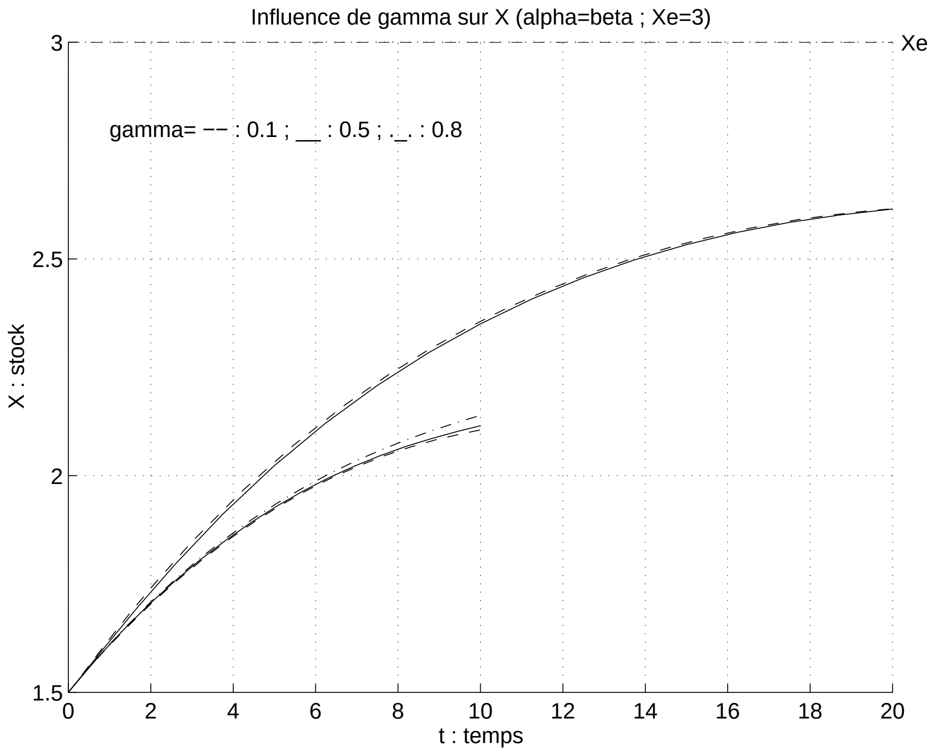


FIG. C.3 *Influence du coefficient de pondération γ sur le système commandé suite à une chute de la biomasse du stock ($X(0) = X_e - 1,5$; $E(0) = E_e$) pour $X_e = 3$.*



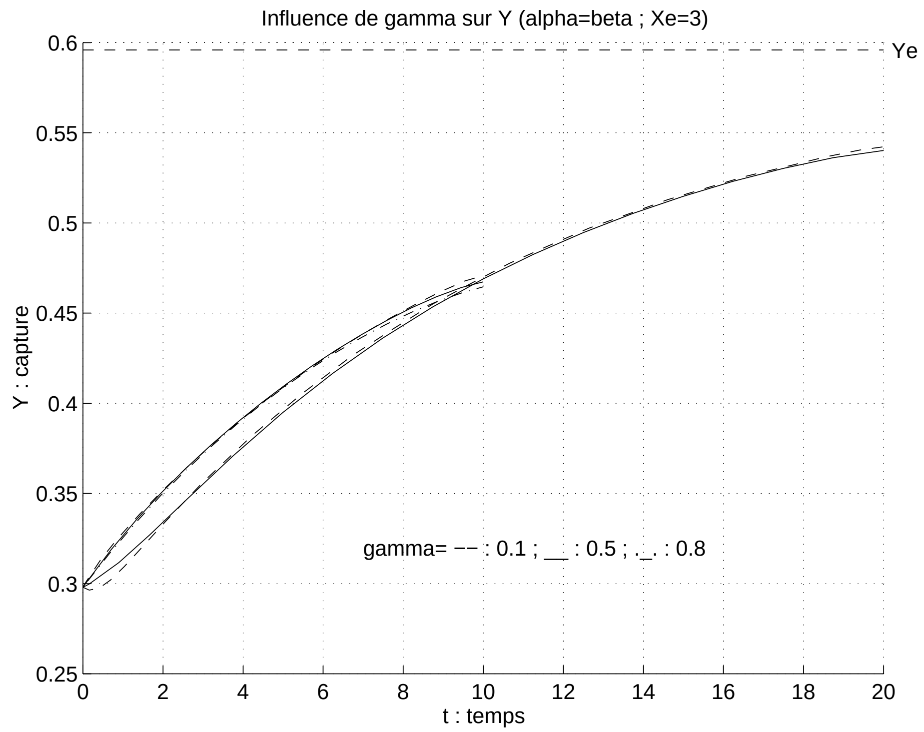
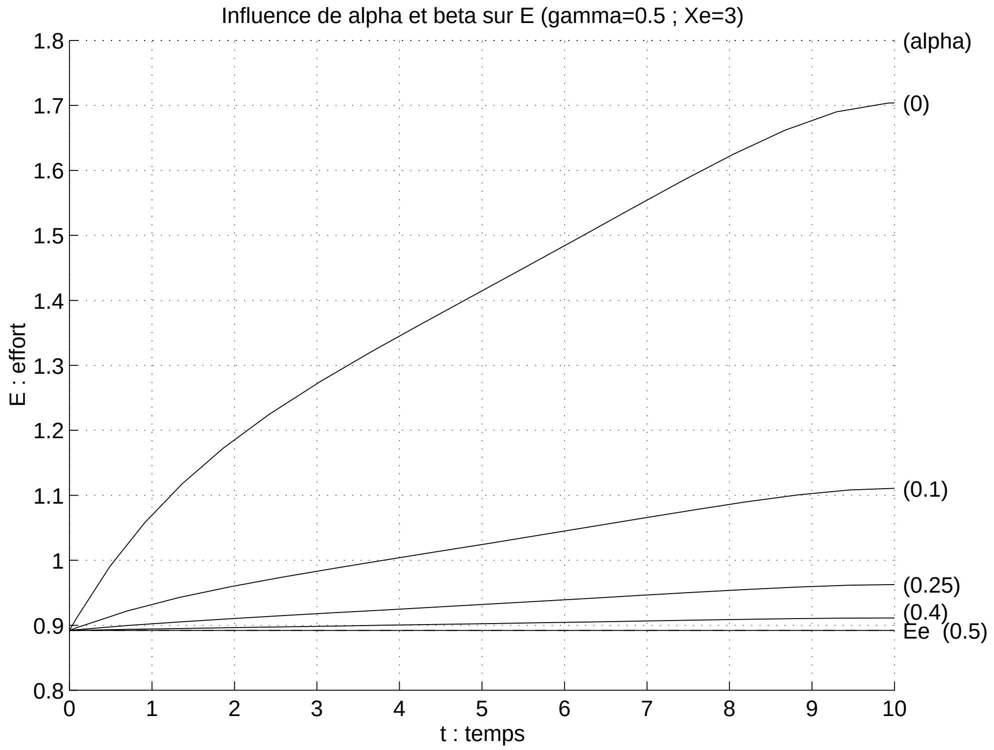


FIG. C.4 *Suite de la figure C.3.*



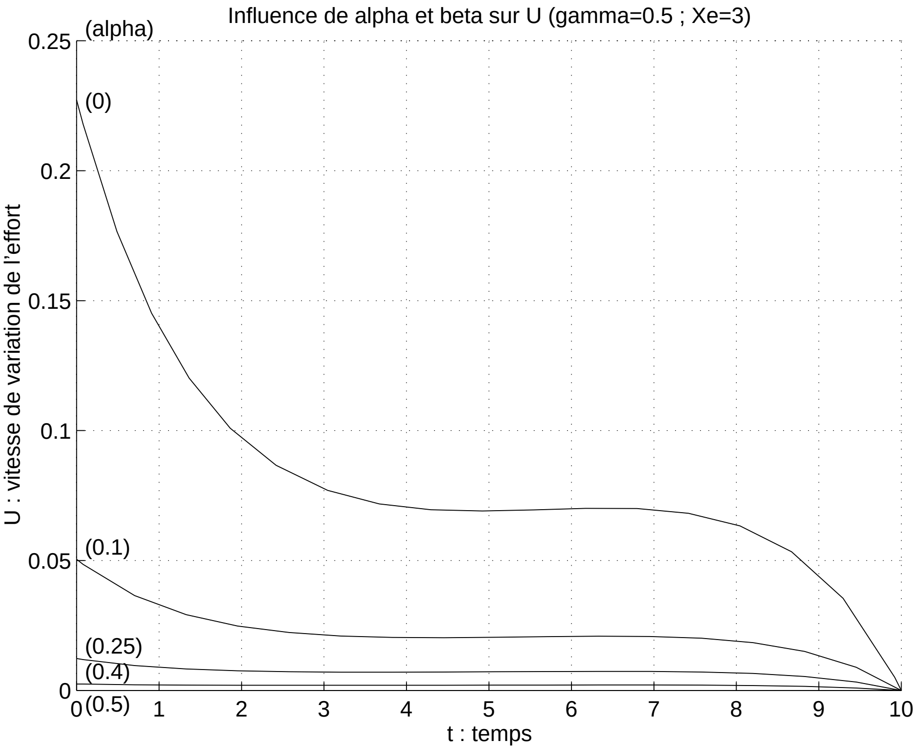
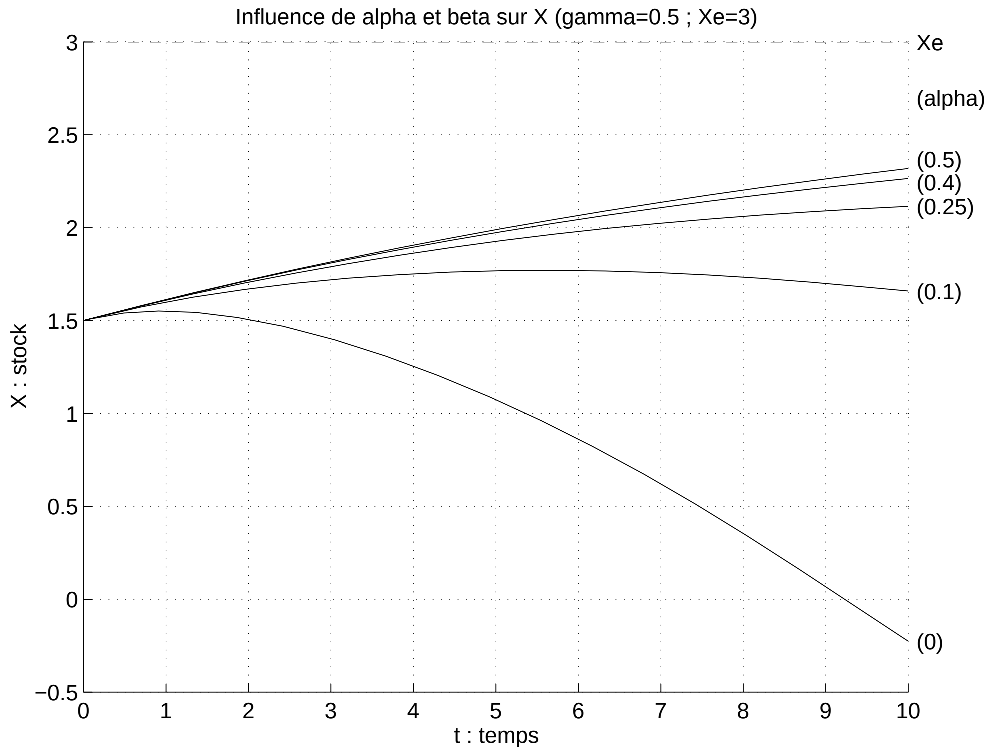


FIG. C.5 *Influence des coefficients de pondération α et β sur le système commandé suite à une chute de la biomasse du stock ($X(0) = X_e - 1,5$; $E(0) = E_e$) pour $X_e = 3$.*



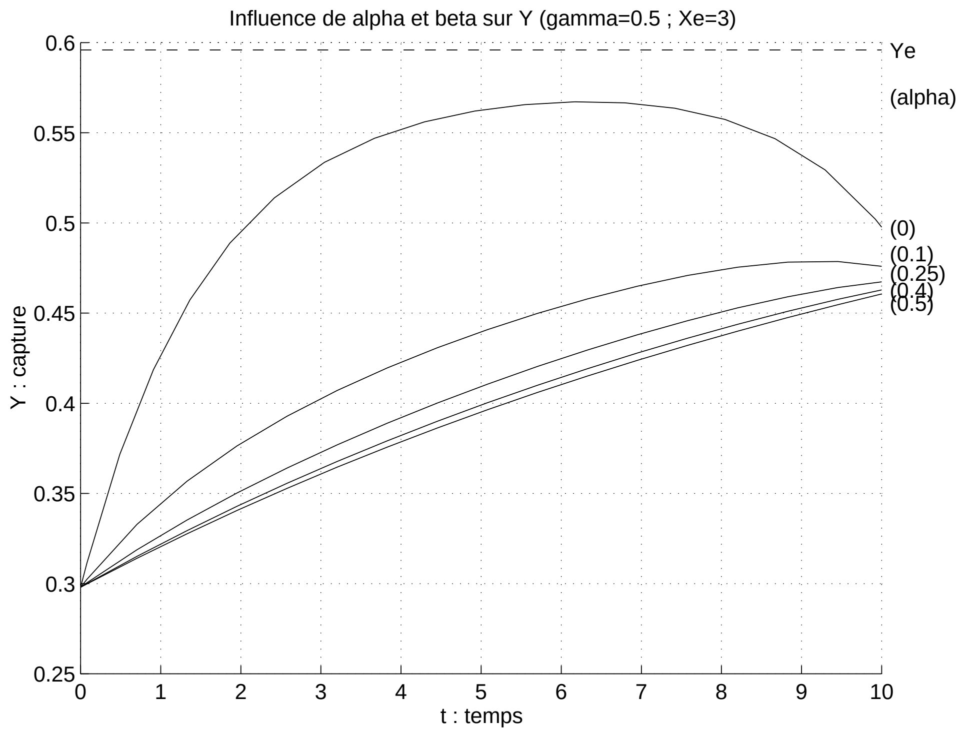
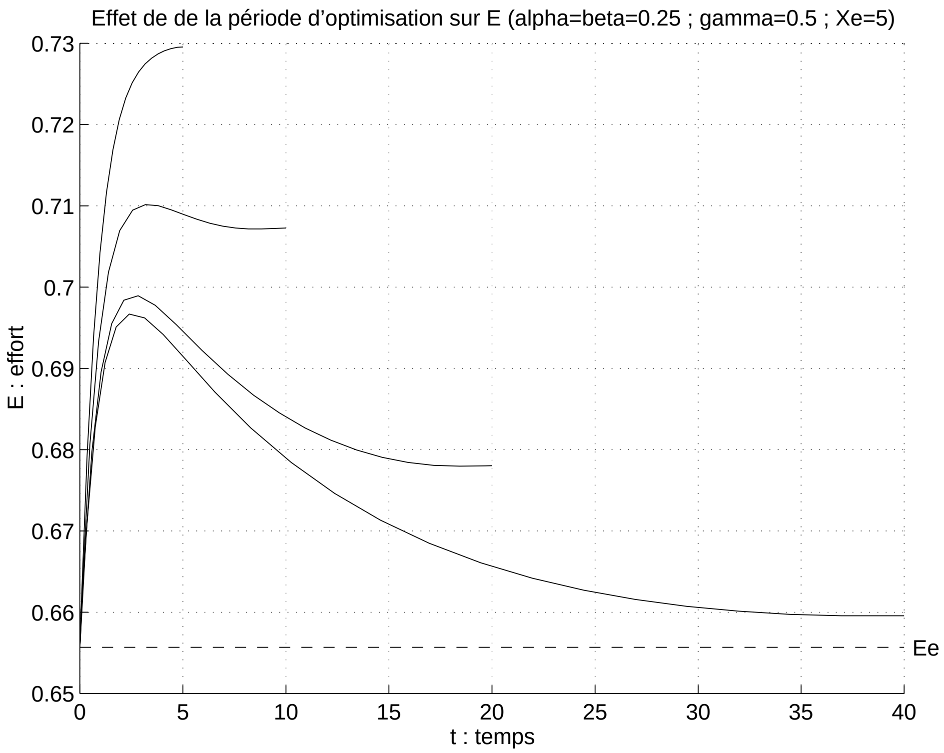


FIG. C.6 *Suite de la figure C.5.*



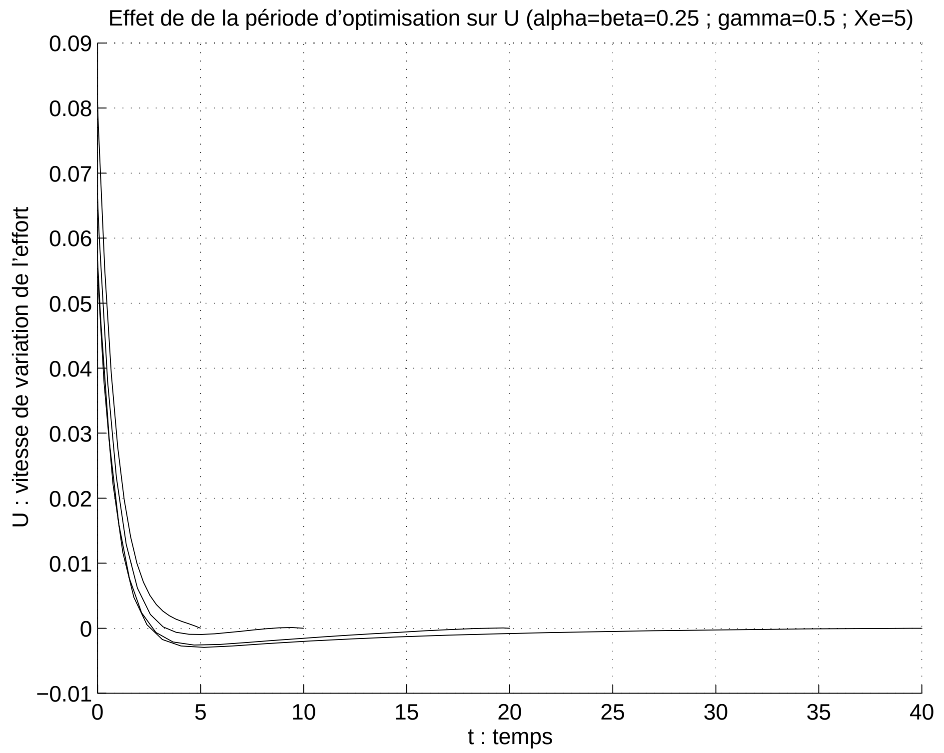
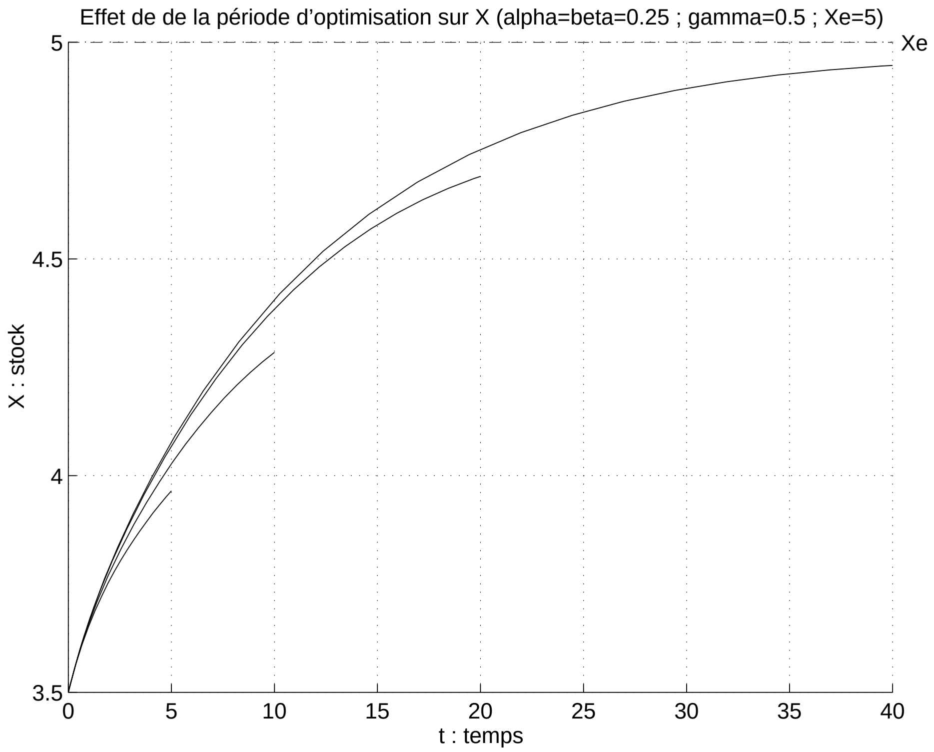


FIG. C.7 *Influence de la durée d'optimisation sur le système commandé suite à une chute de la biomasse du stock ($X(0) = X_e - 1,5$; $E(0) = E_e$) pour $X_e = 5$.*



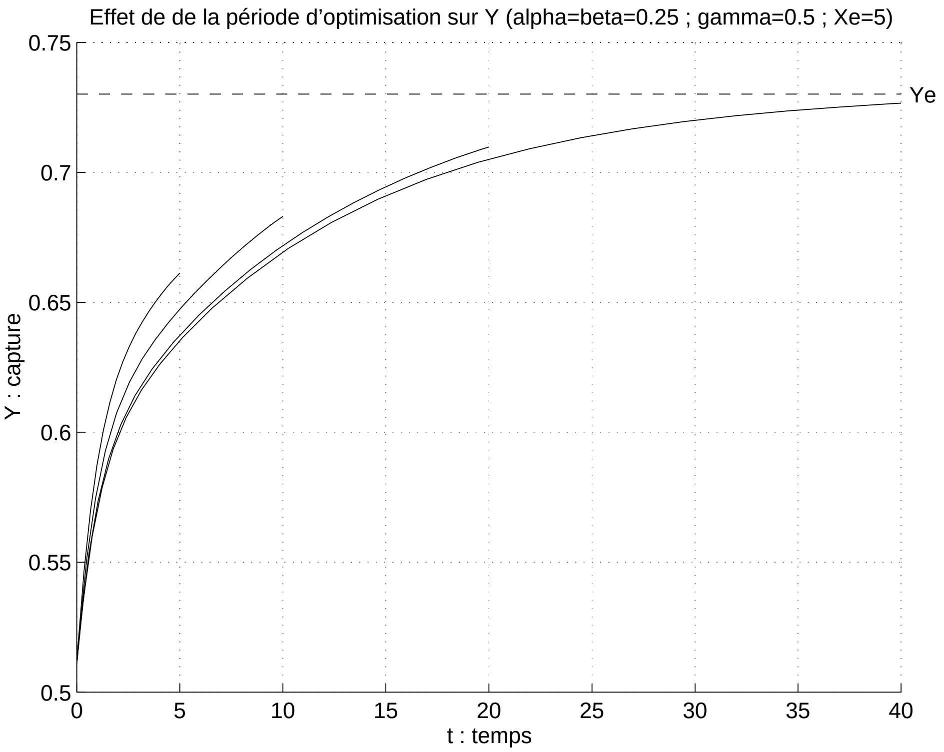
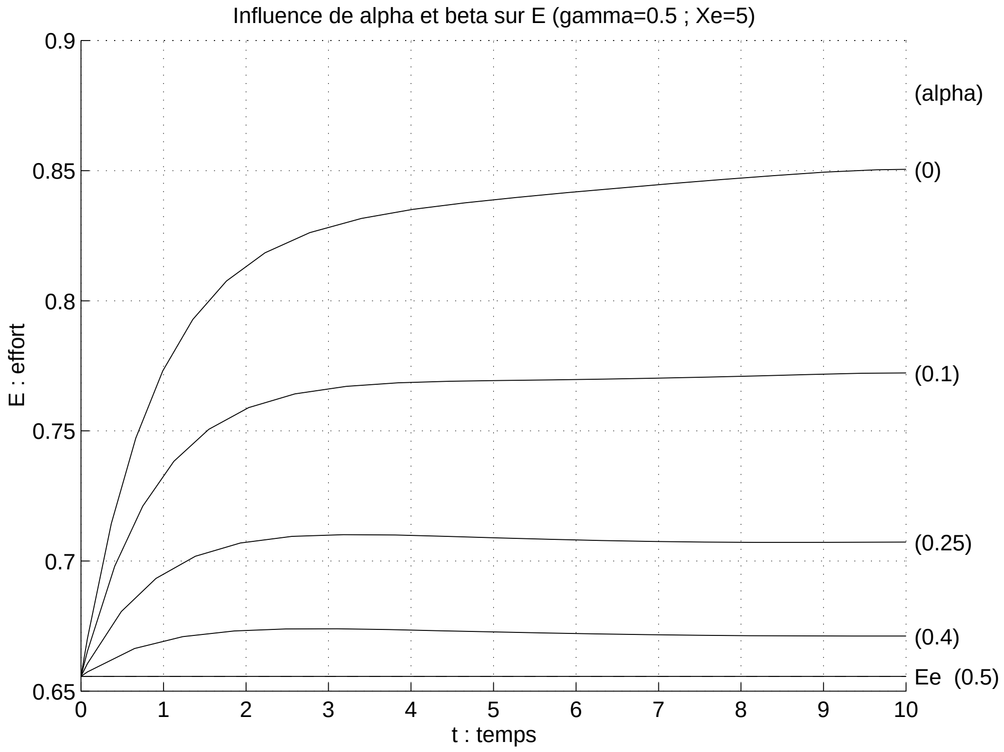


FIG. C.8 *Suite de la figure C.7.*



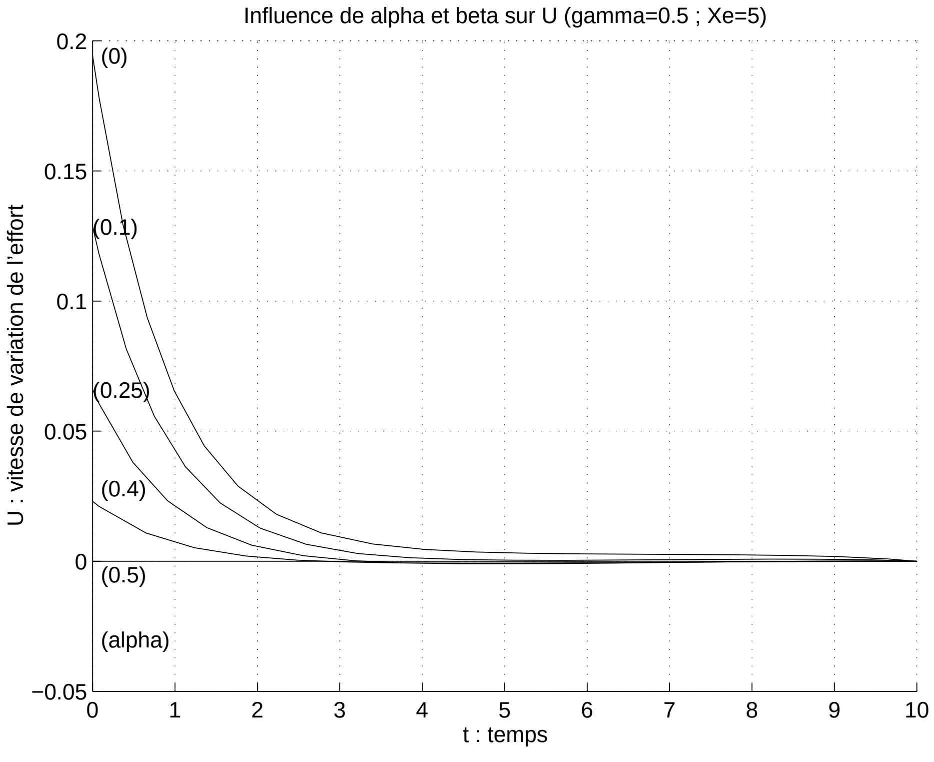


FIG. C.9 *Influence des coefficients de pondération α et β sur le système commandé suite à une chute de la biomasse du stock ($X(0) = X_e - 1,5$; $E(0) = E_e$) pour $X_e = 5$.*

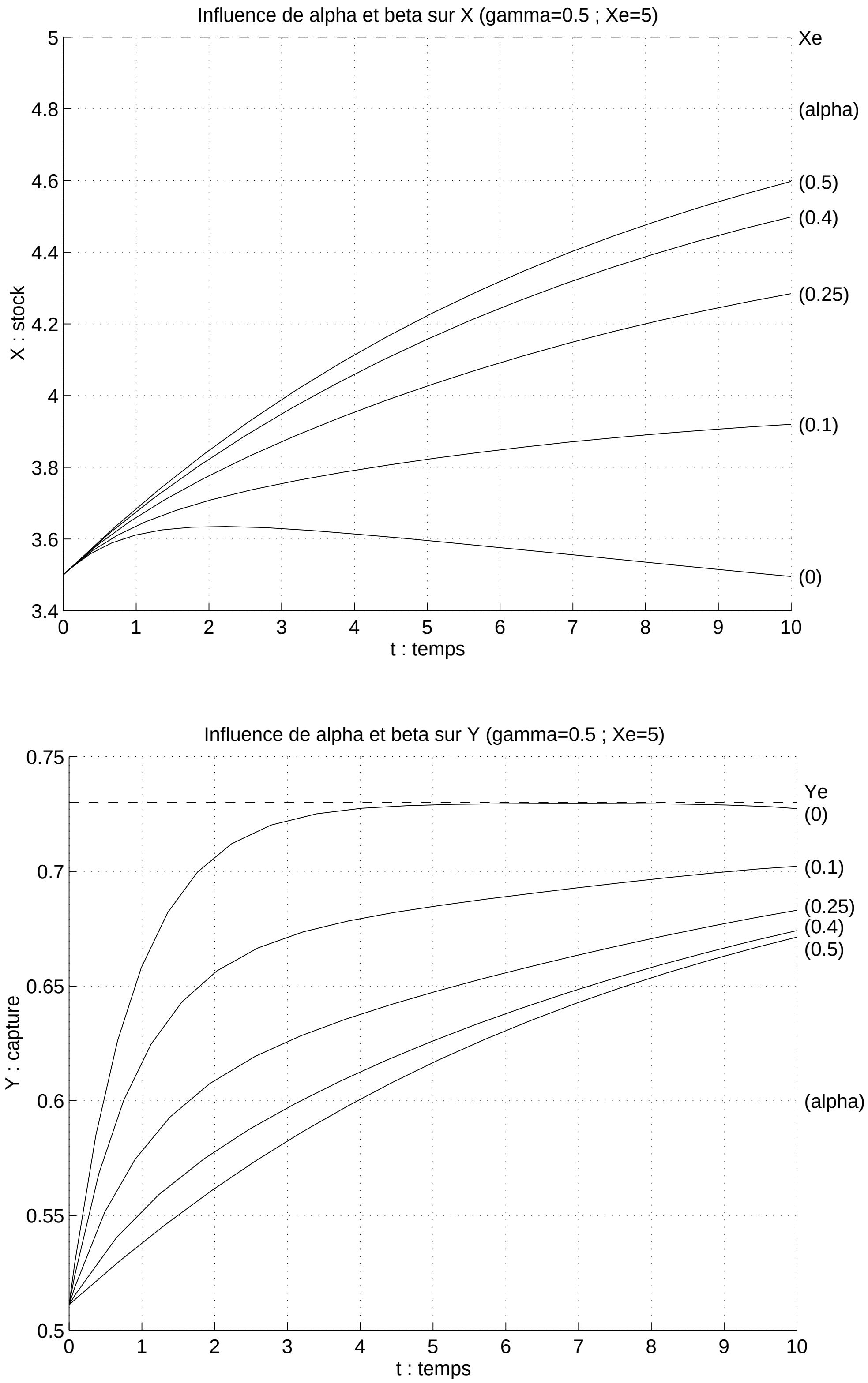
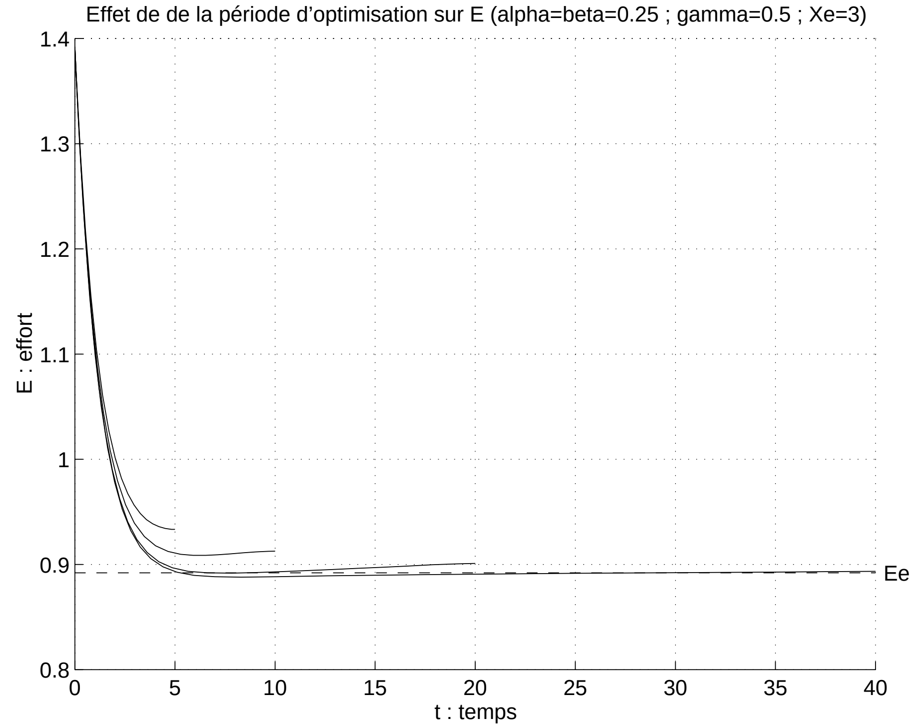


FIG. C.10 *Suite de la figure C.9.*



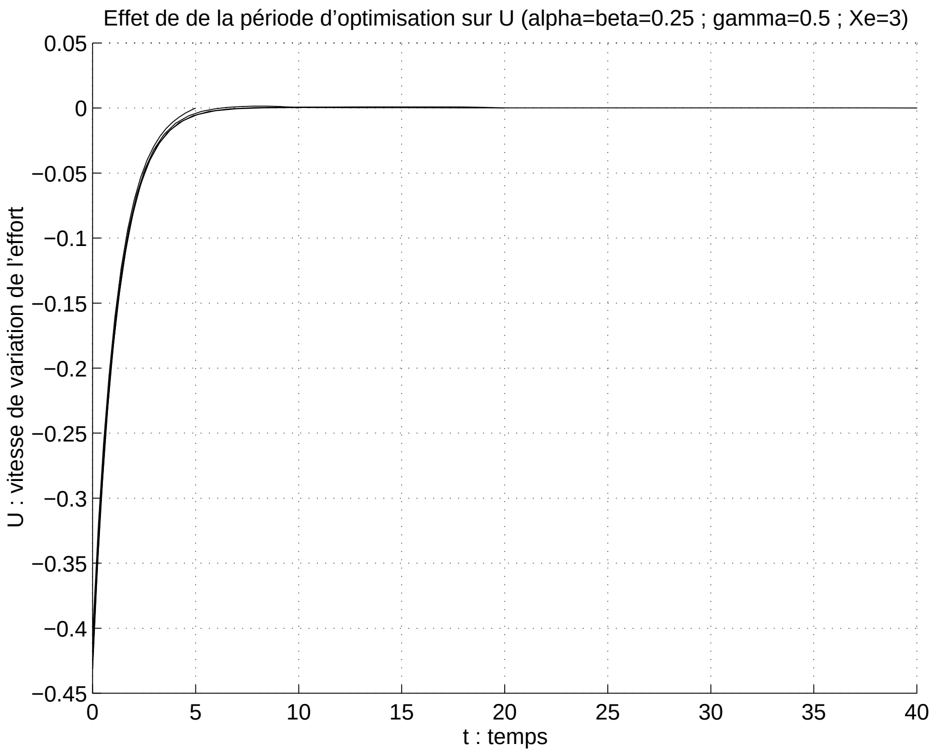
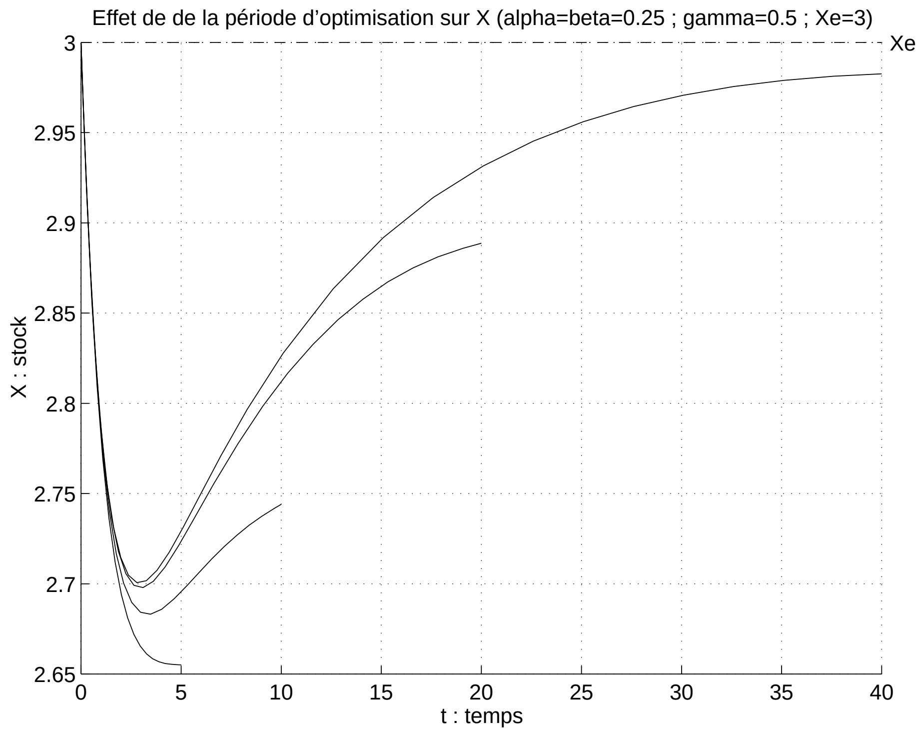


FIG. C.11 *Influence de la durée d'optimisation sur le système commandé suite à une surexploitation* ($X(0) = X_e$; $E(0) = E_e + 0,5$) *pour* $X_e = 3$.



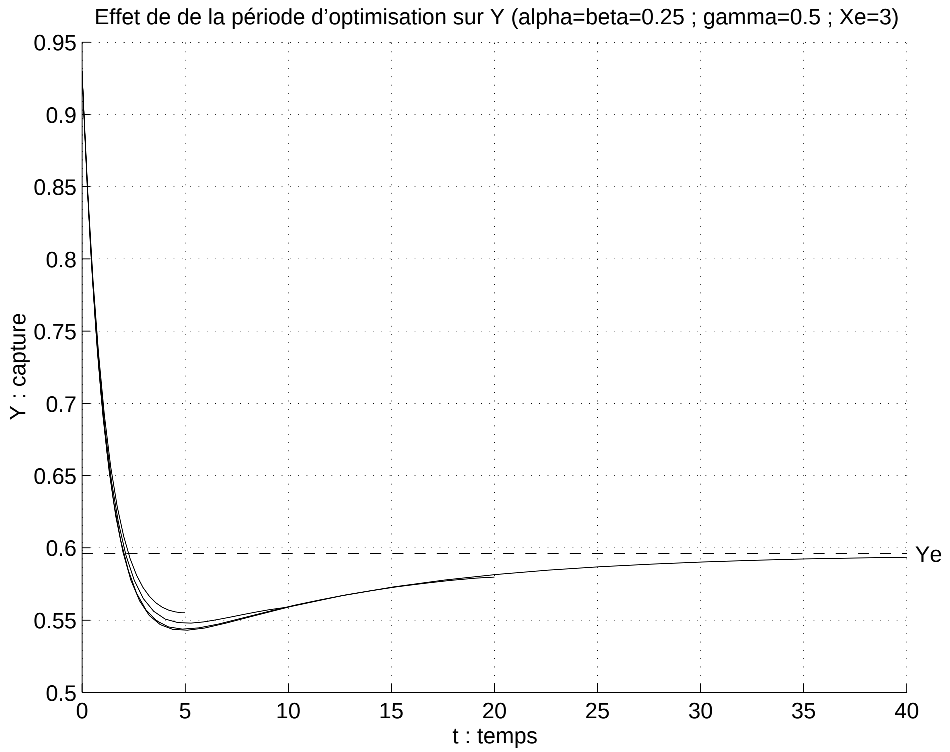


FIG. C.12 *Suite de la figure C.11.*

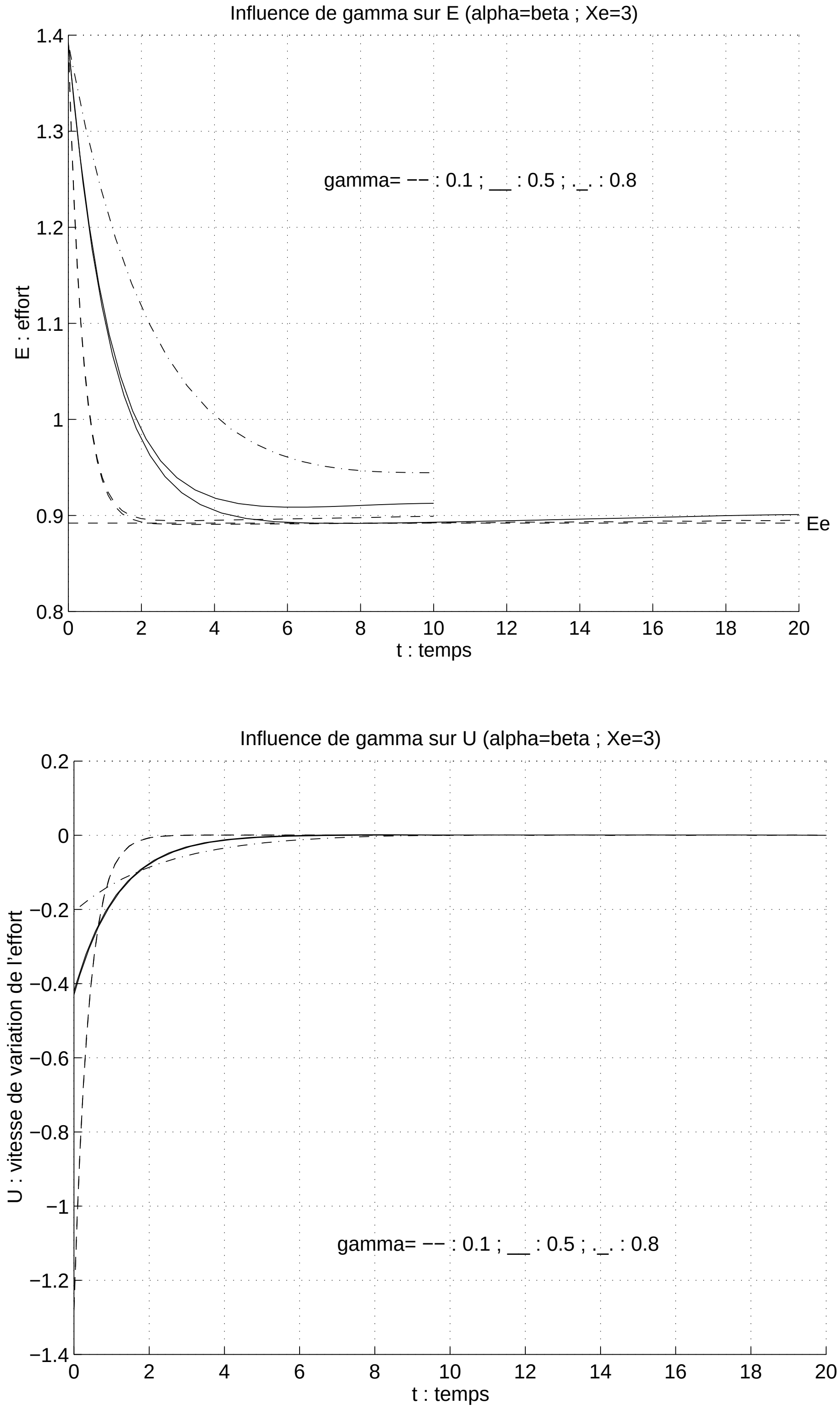
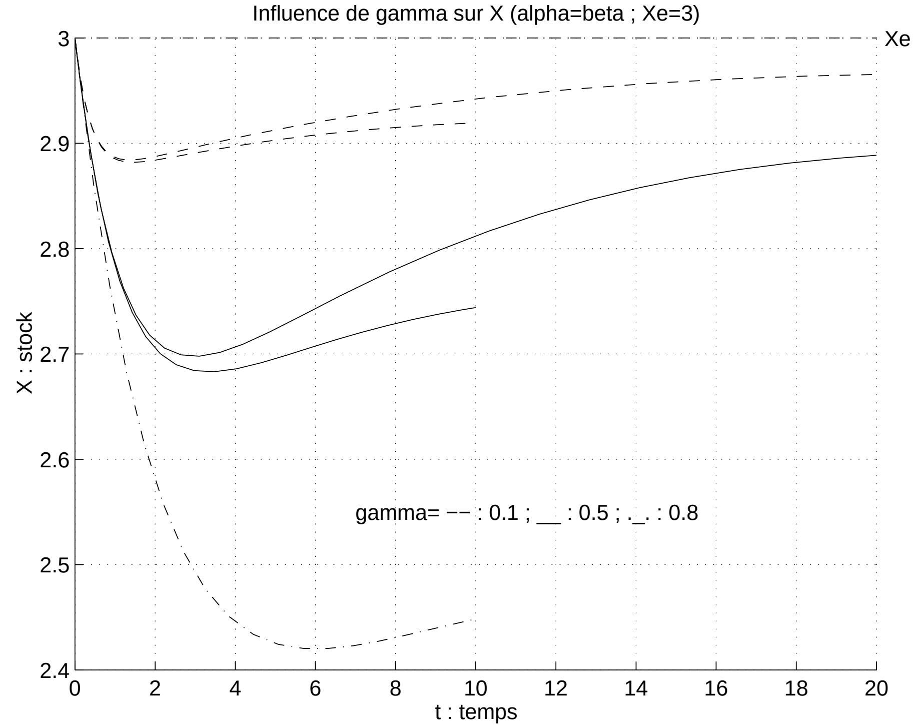


FIG. C.13 *Influence du coefficient de pondération γ sur le système commandé suite à une surexploitation ($X(0) = X_e$; $E(0) = E_e + 0,5$) pour $X_e = 3$.*



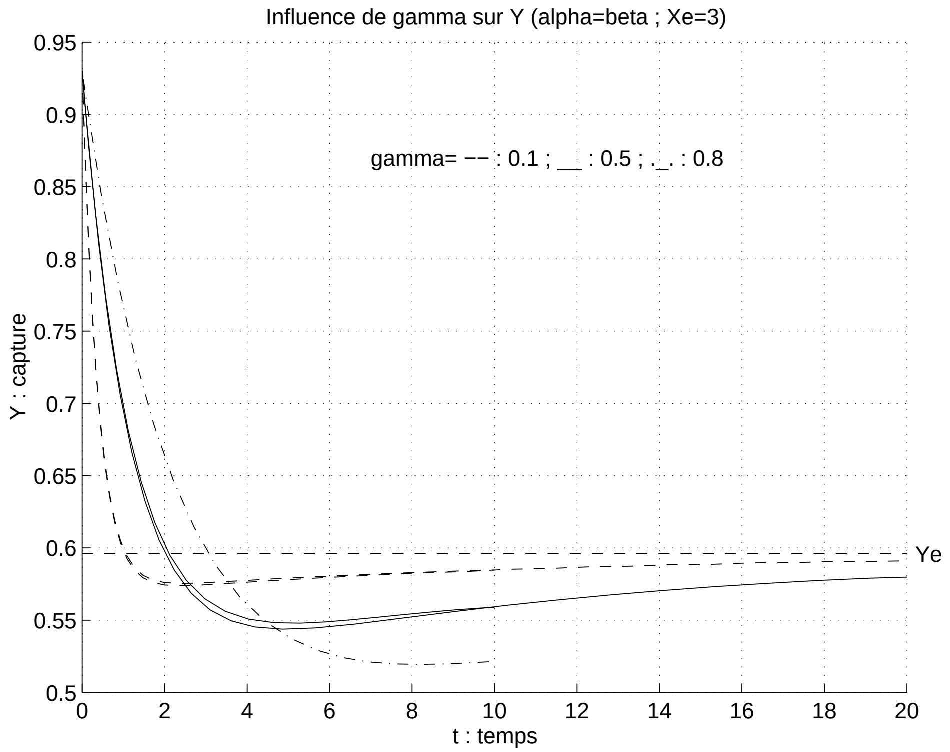
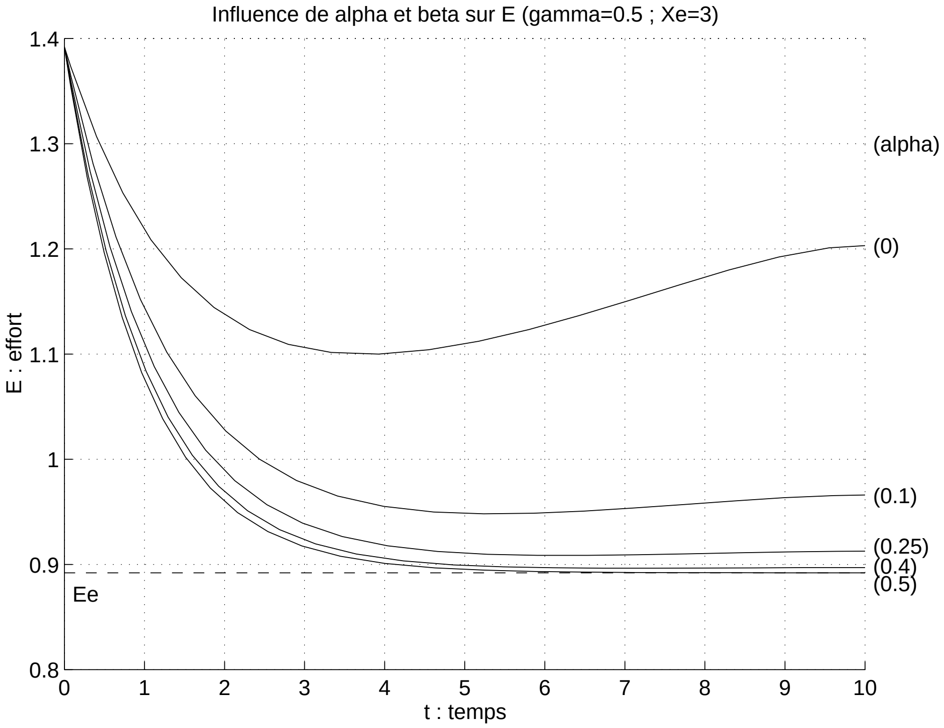


FIG. C.14 *Suite de la figure C.13.*



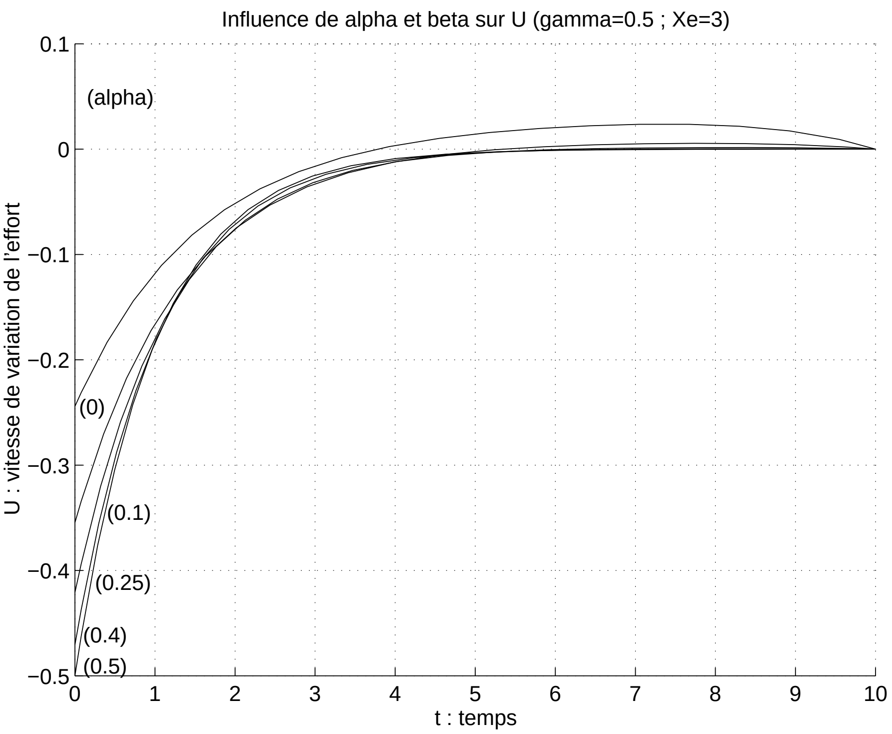


FIG. C.15 *Influence des coefficients de pondération α et β sur le système commandé suite à une surexploitation ($X(0) = X_e$; $E(0) = E_e + 0,5$) pour $X_e = 3$.*

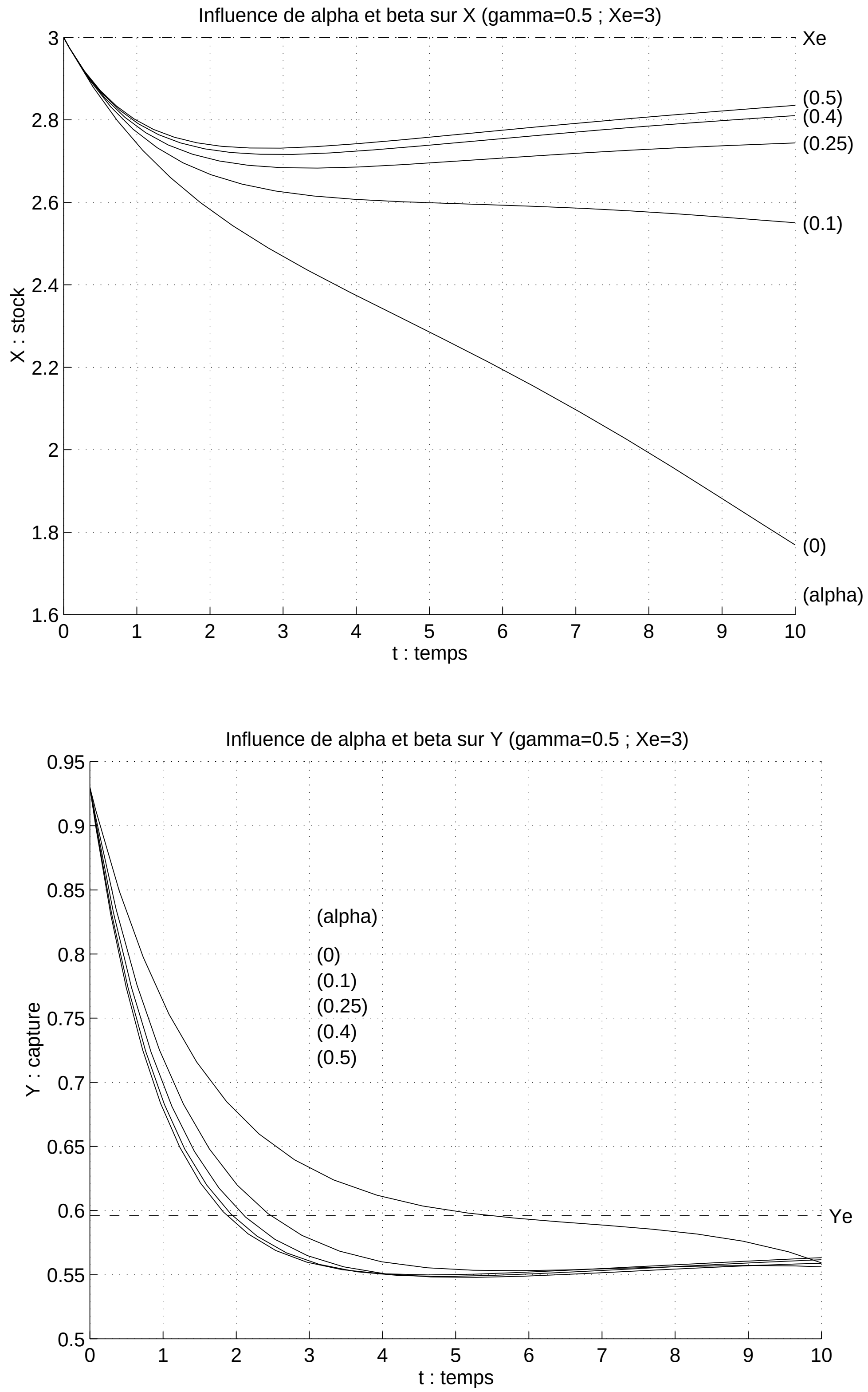
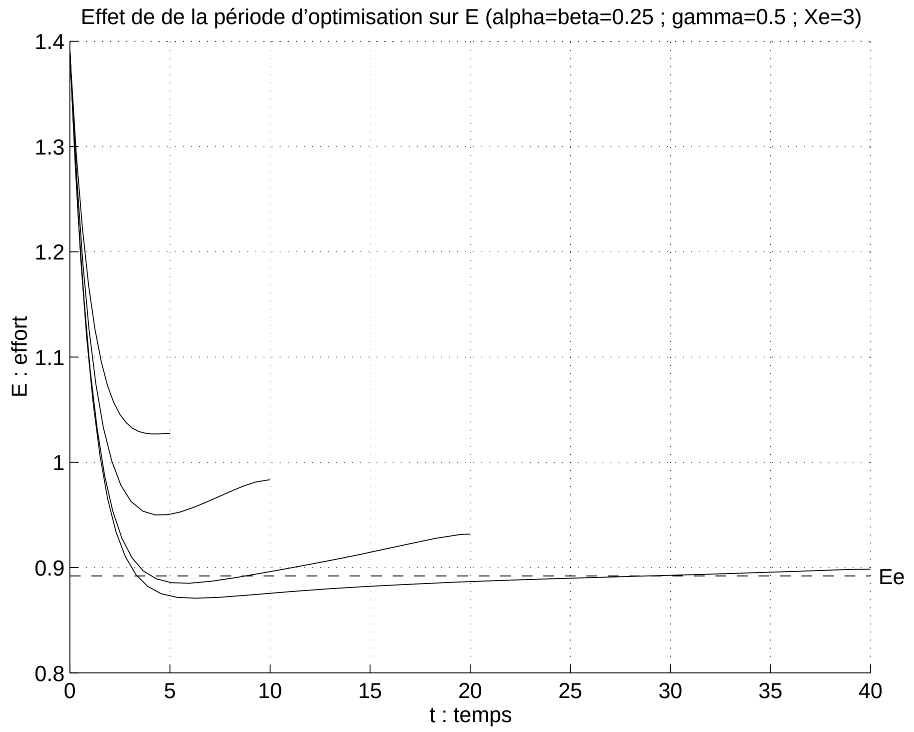


FIG. C.16 *Suite de la figure C.15.*



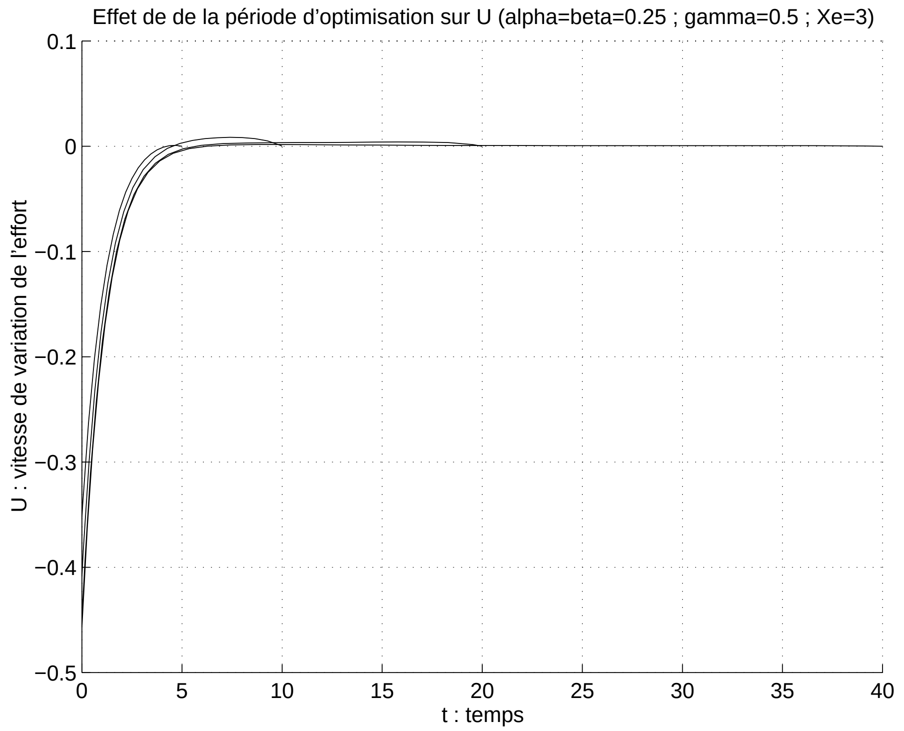
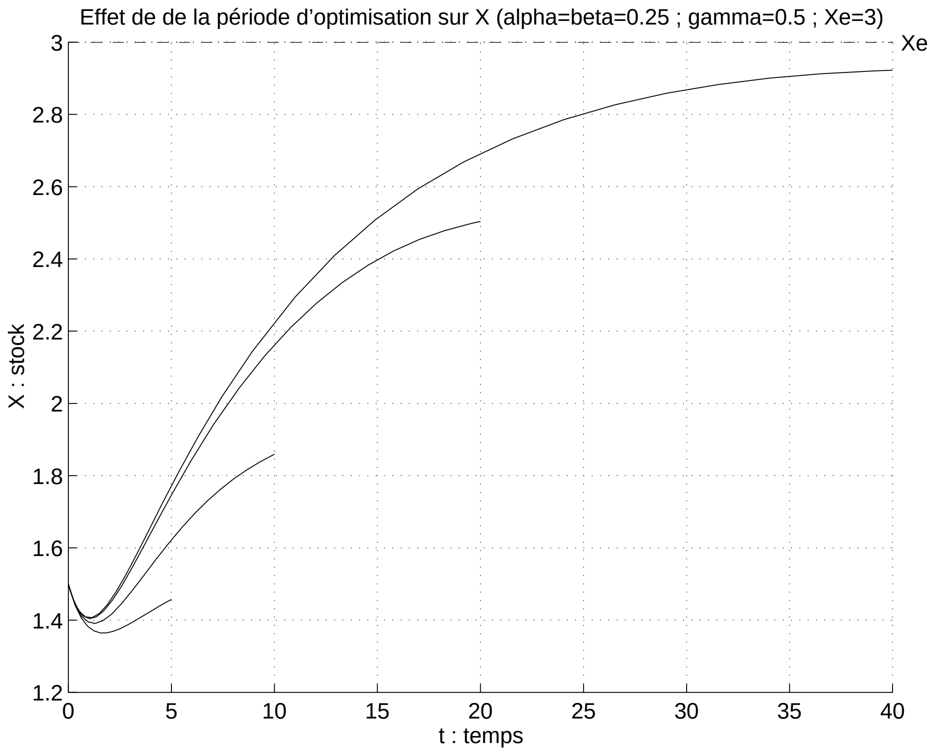


FIG. C.17 *Influence de la durée d'optimisation sur le système commandé suite à une surexploitation avec chute de biomasse ($X(0) = X_e - 1,5$; $E(0) = E_e + 0,5$) pour $X_e = 3$.*



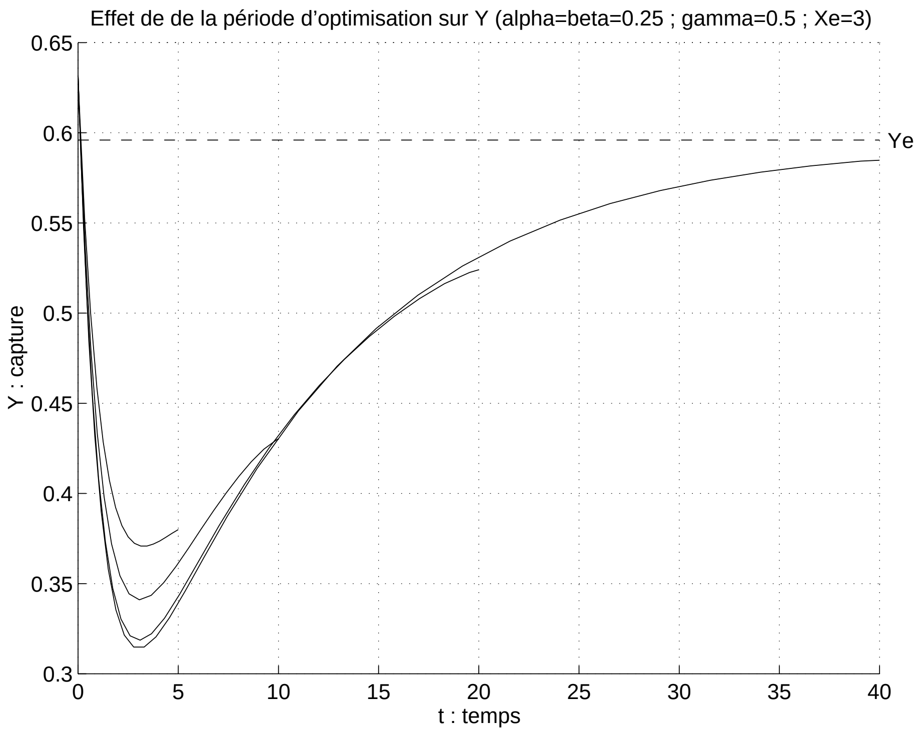


FIG. C.18 *Suite de la figure C.17.*

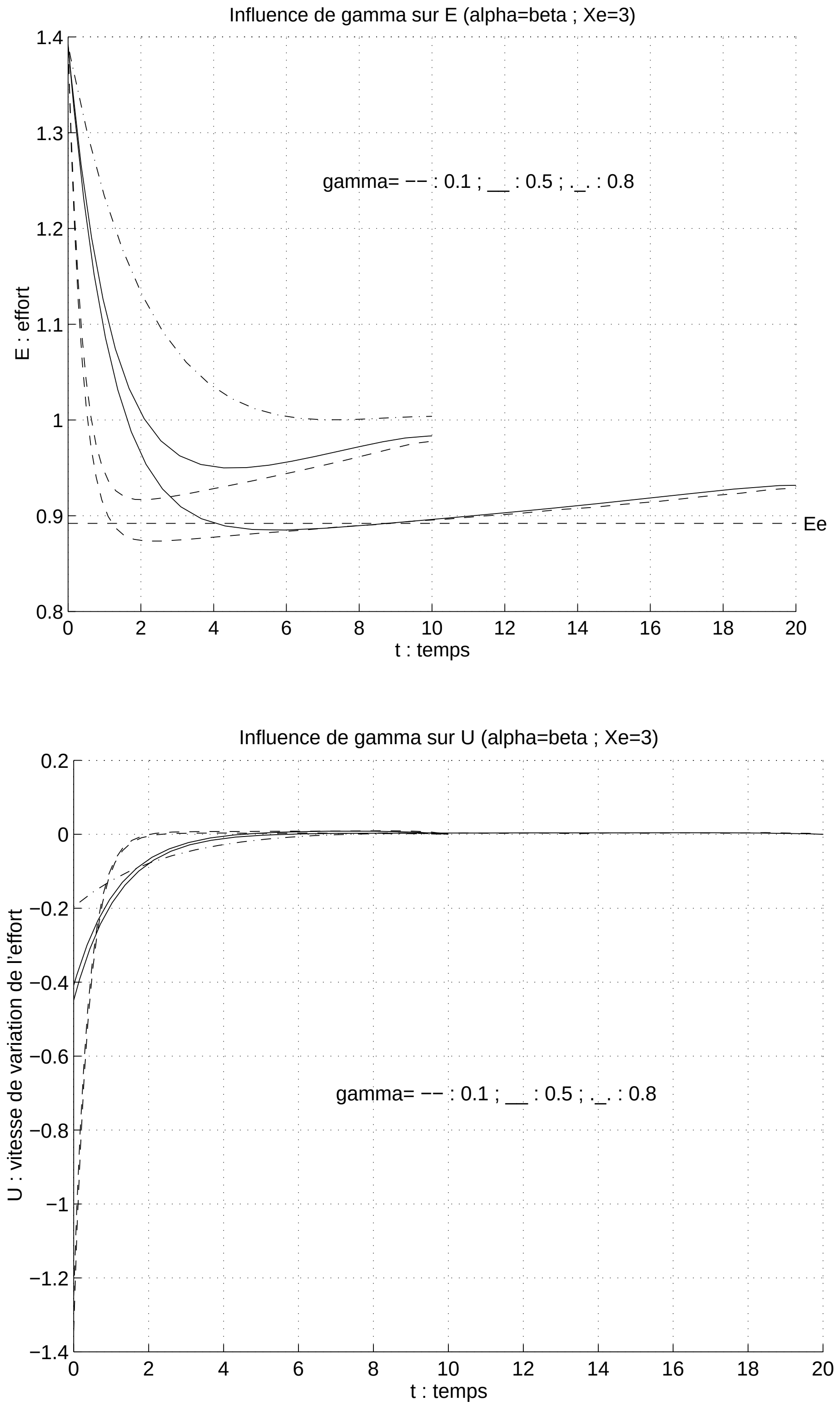


FIG. C.19 *Influence du coefficient de pondération γ sur le système commandé suite à une surexploitation avec chute biomasse ($X(0) = X_e - 1,5$; $E(0) = E_e + 0,5$) pour $X_e = 3$.*

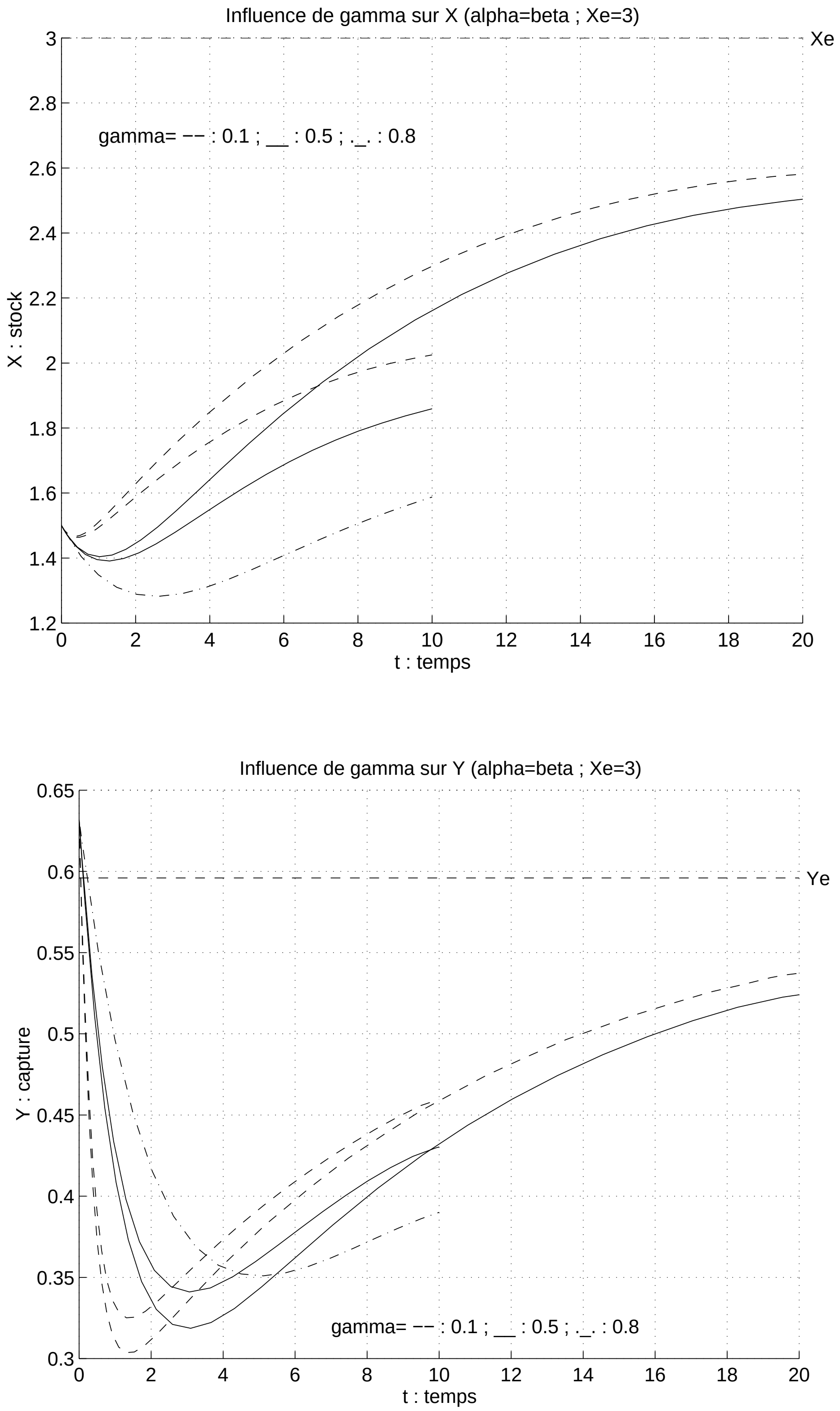
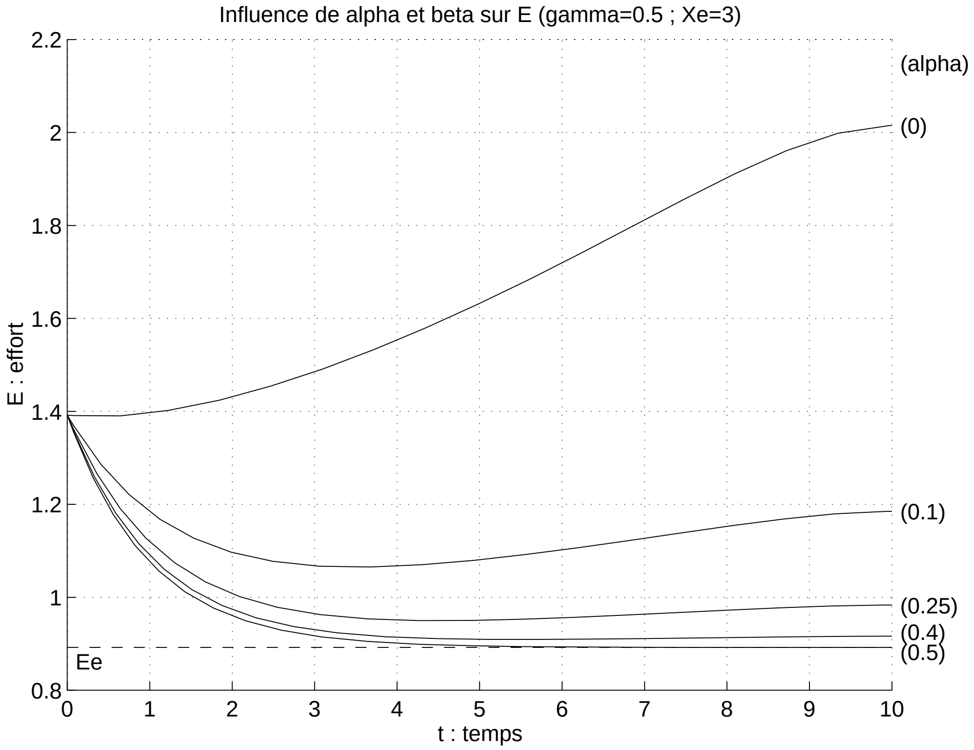


FIG. C.20 *Suite de la figure C.19.*



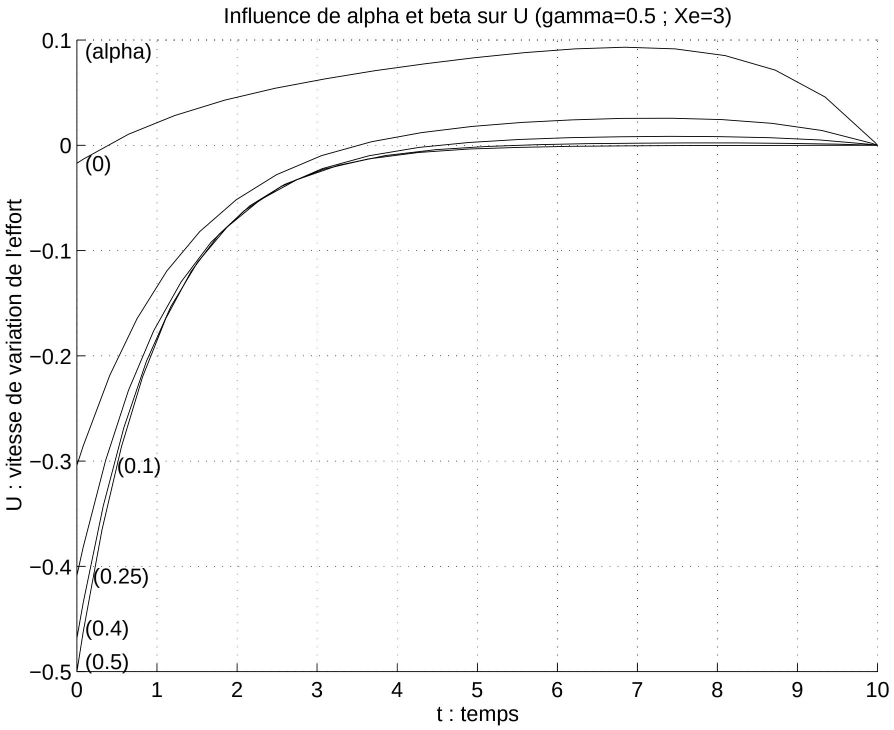


FIG. C.21 *Influence des coefficients de pondération α et β sur le système commandé suite à une surexploitation avec chute de biomasse ($X(0) = X_e - 1,5$; $E(0) = E_e + 0,5$) pour $X_e = 3$.*

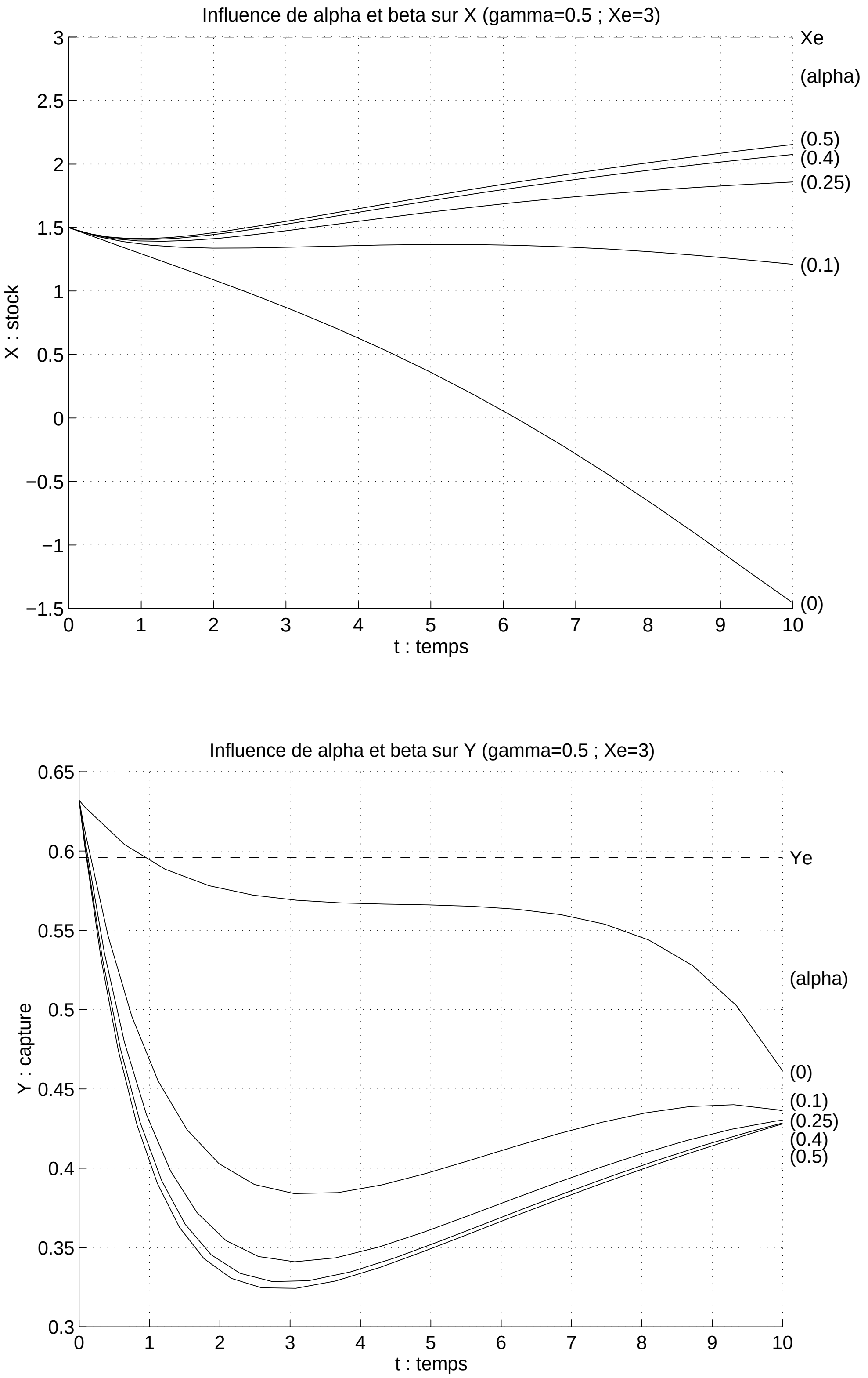


FIG. C.22 *Suite de la figure C.21.*

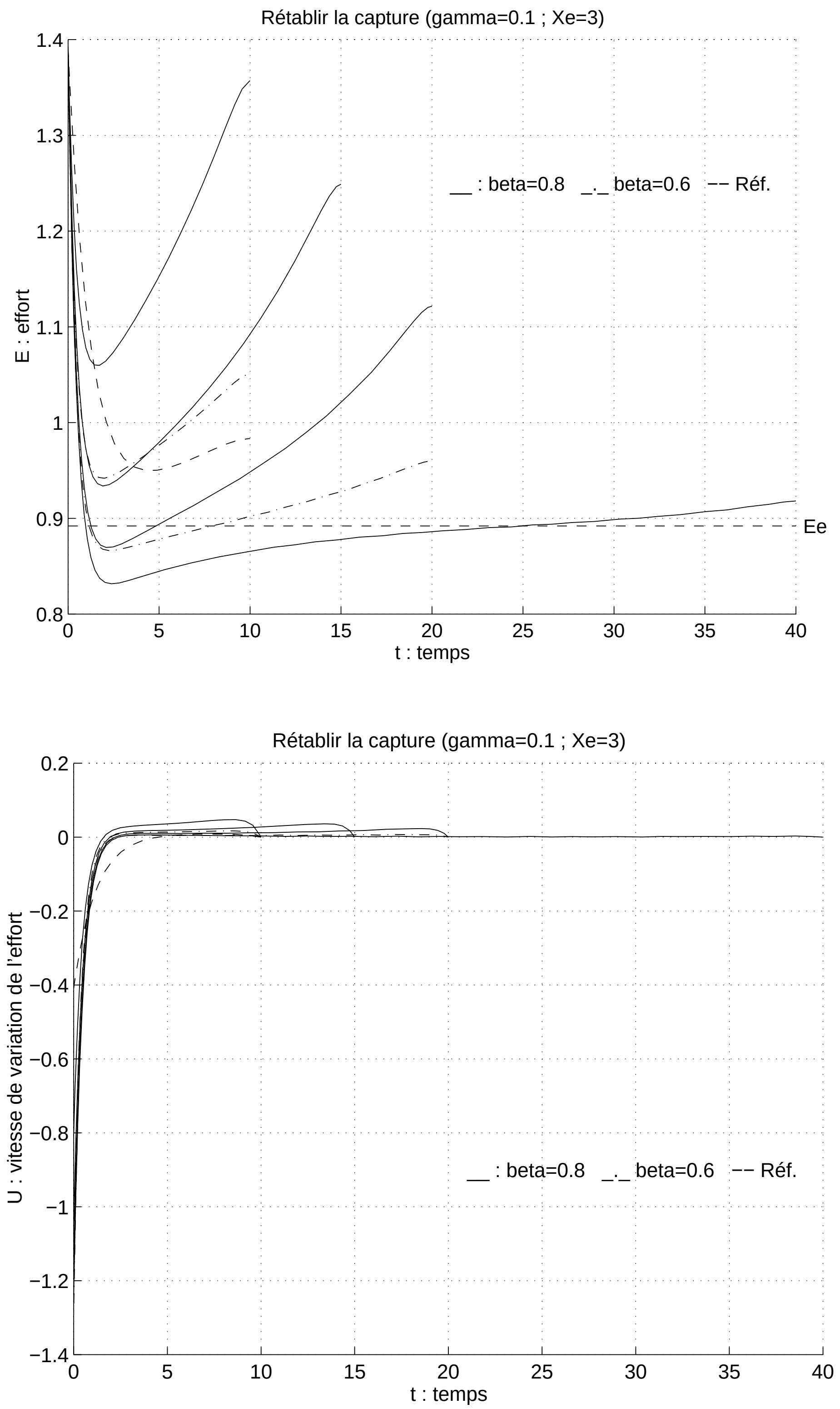


FIG. C.23 *Essais pour rétablir la capture suite à une surexploitation avec chute de biomasse* ($X(0) = X_e - 1,5$; $E(0) = E_e + 0,5$) *pour* $X_e = 3$.

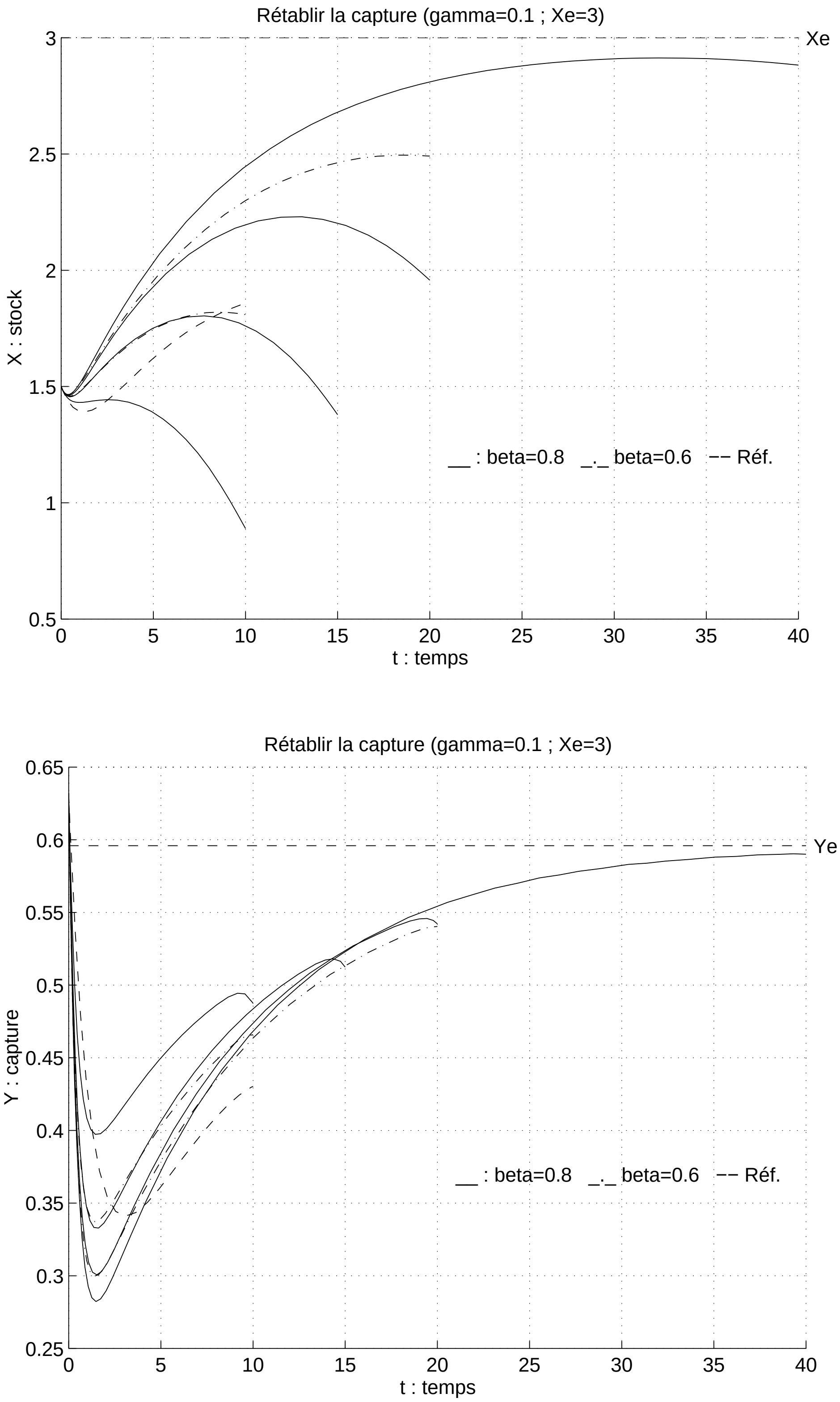
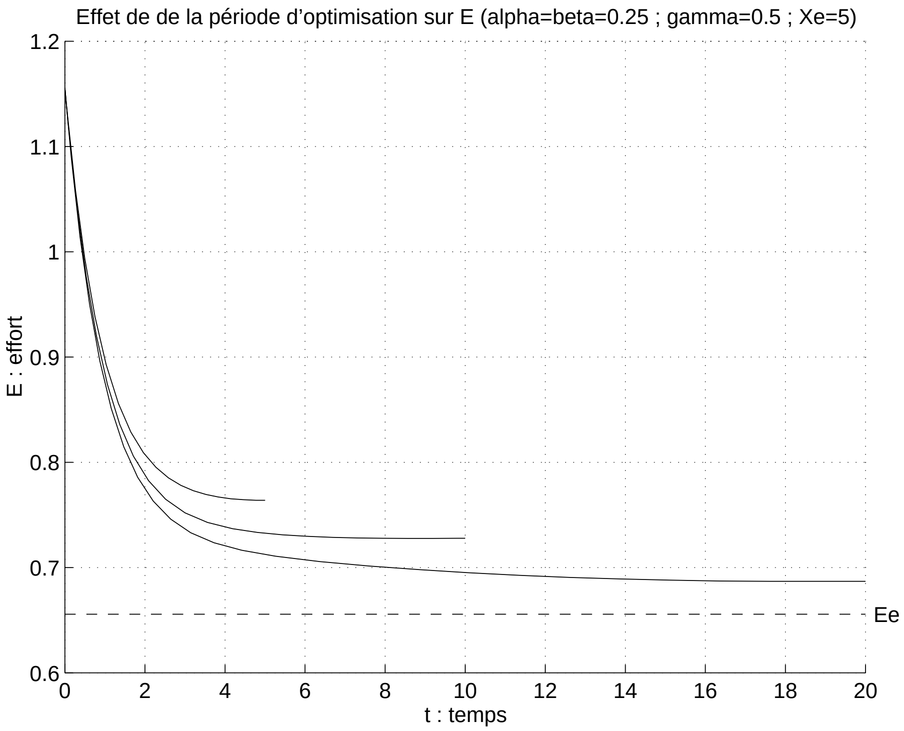


FIG. C.24 *Suite de la figure C.23.*



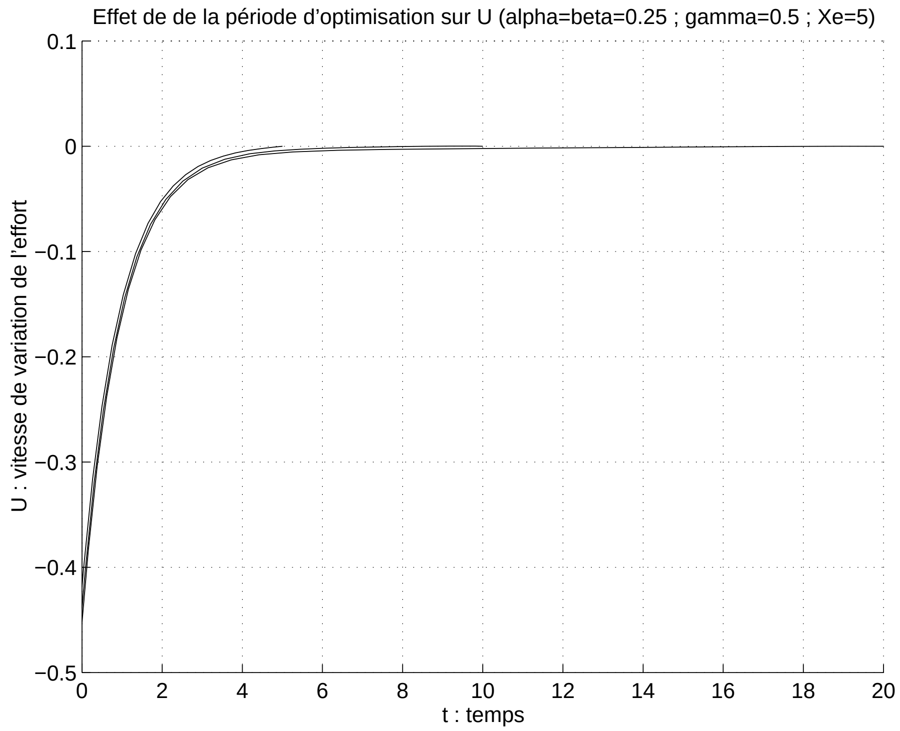


FIG. C.25 *Influence de la durée d'optimisation sur le système commandé suite à une surexploitation avec chute de biomasse ($X(0) = X_e - 1,5$; $E(0) = E_e + 0,5$) pour $X_e = 5$.*

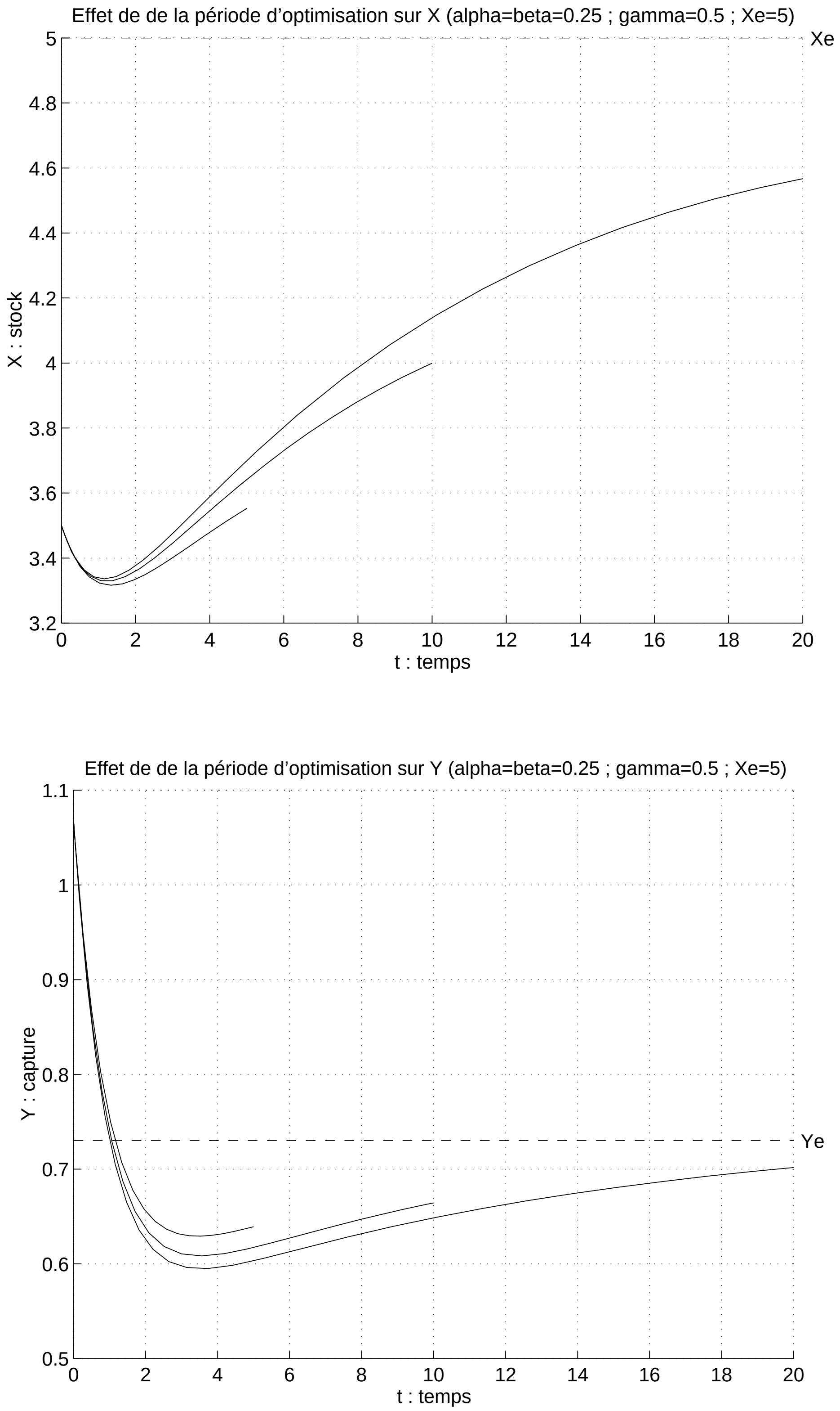
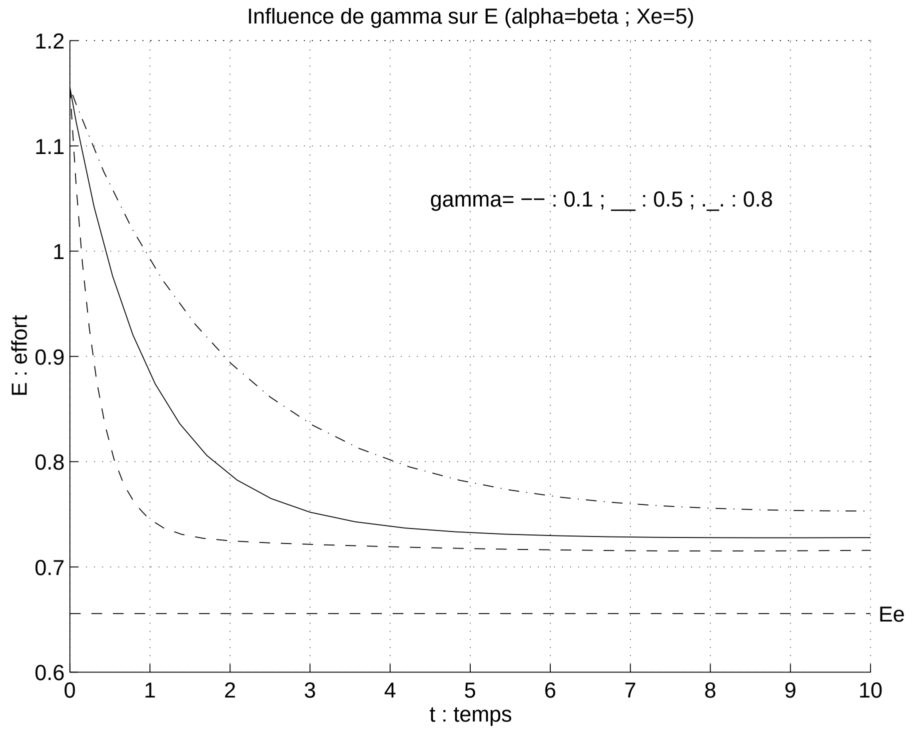


FIG. C.26 *Suite de la figure C.25.*



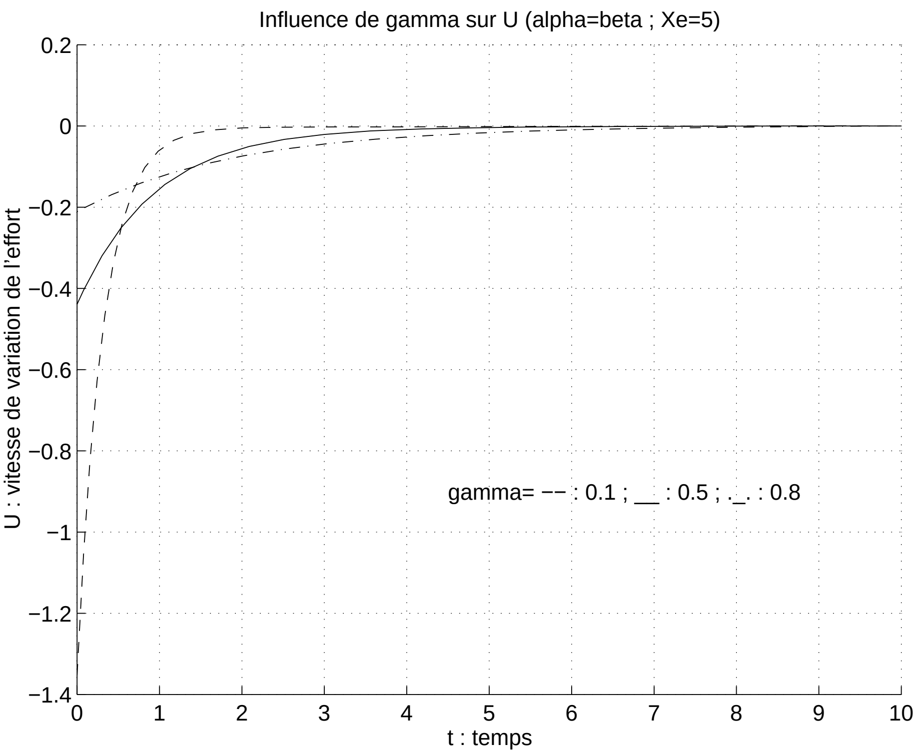
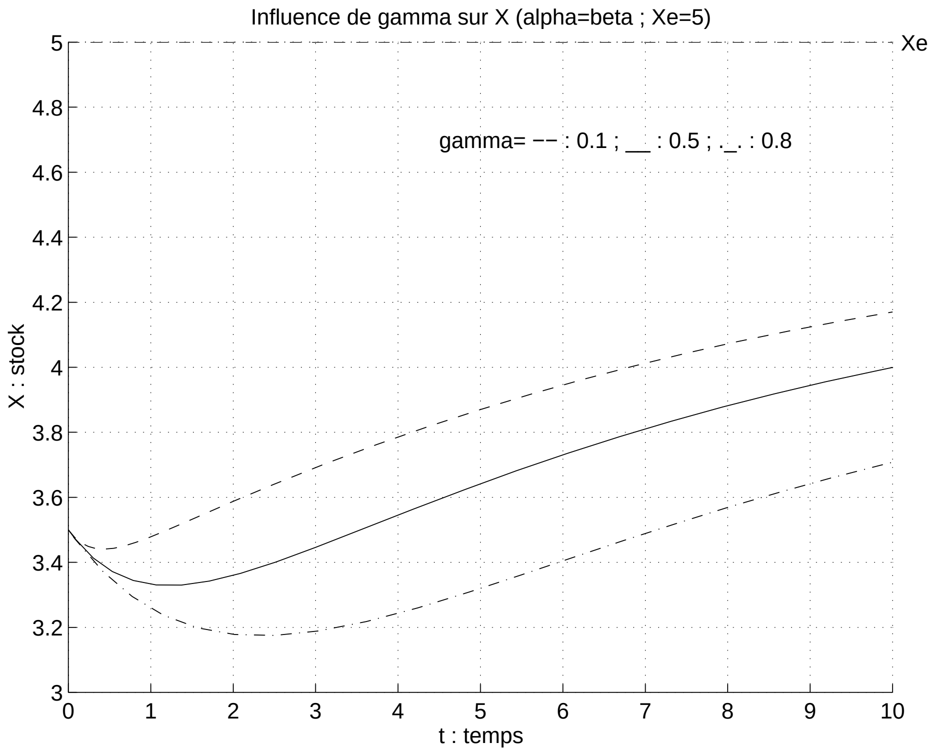


FIG. C.27 *Influence du coefficient de pondération γ sur le système commandé suite à une surexploitation avec chute biomasse ($X(0) = X_e - 1,5$; $E(0) = E_e + 0,5$) pour $X_e = 5$.*



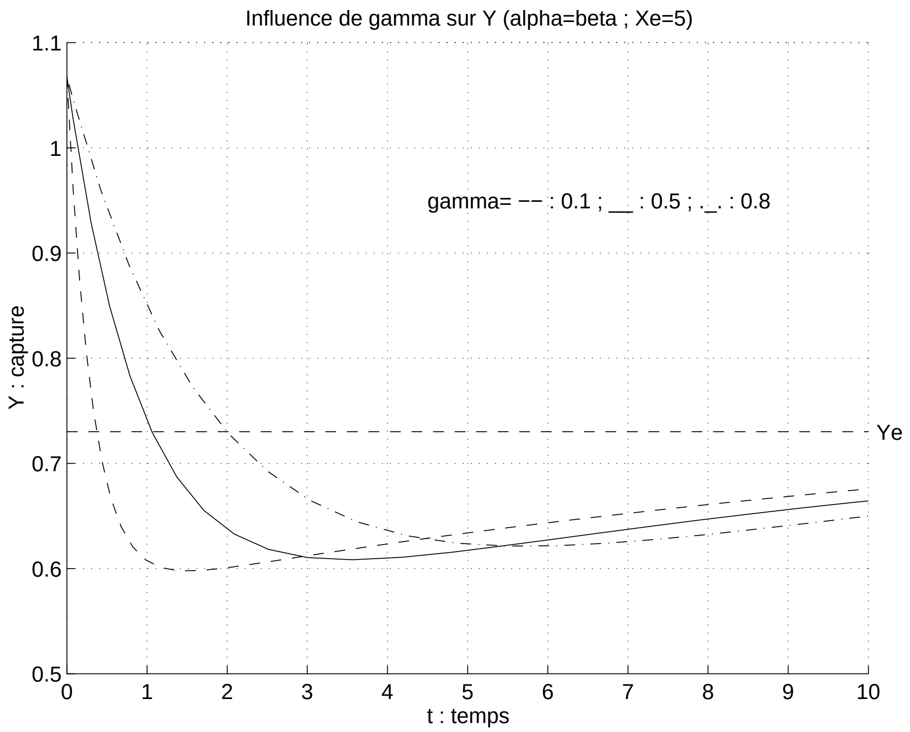


FIG. C.28 *Suite de la figure C.27.*

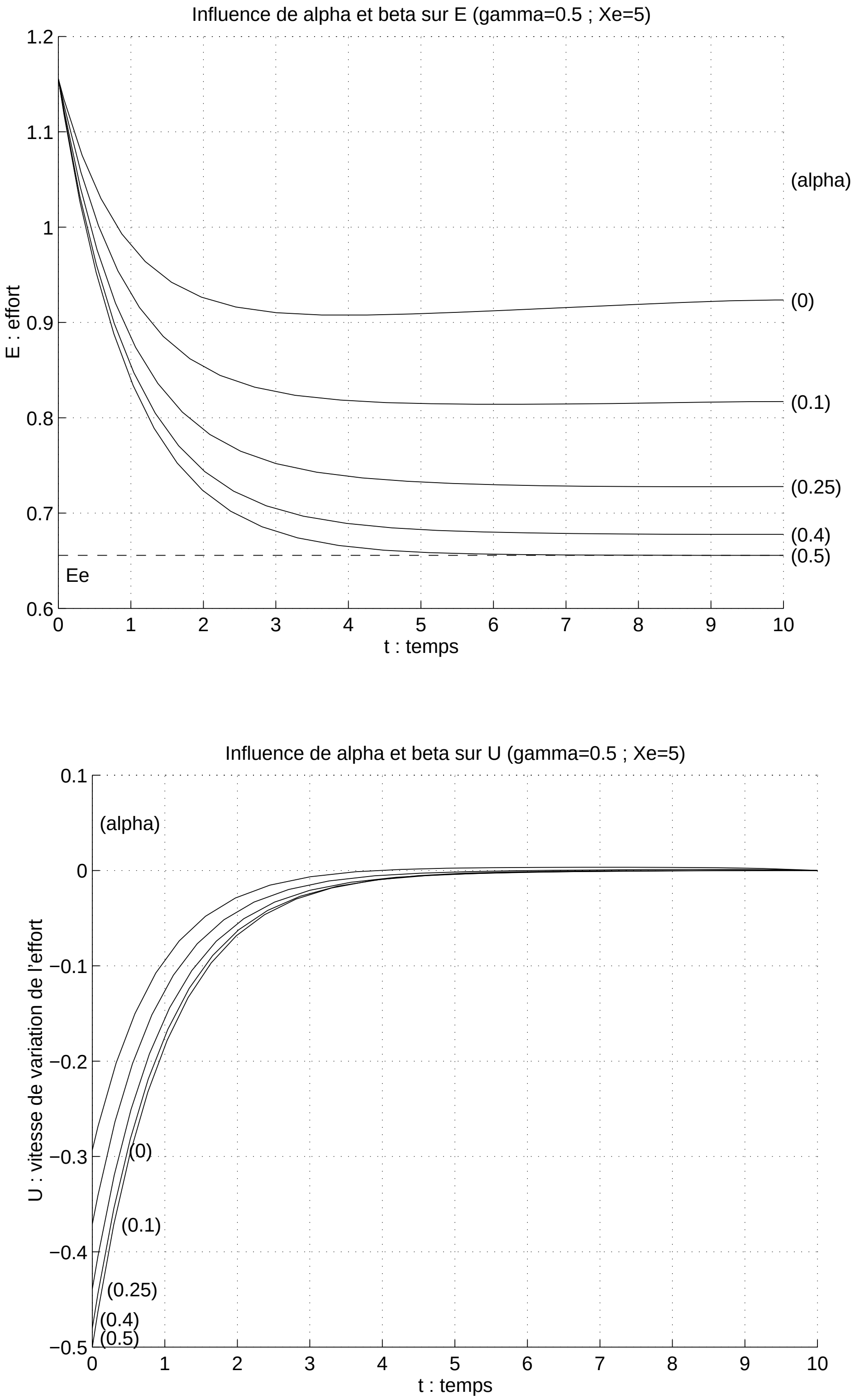


FIG. C.29 *Influence des coefficients de pondération α et β sur le système commandé suite à une surexploitation avec chute de biomasse ($X(0) = X_e - 1,5$; $E(0) = E_e + 0,5$) pour $X_e = 5$.*

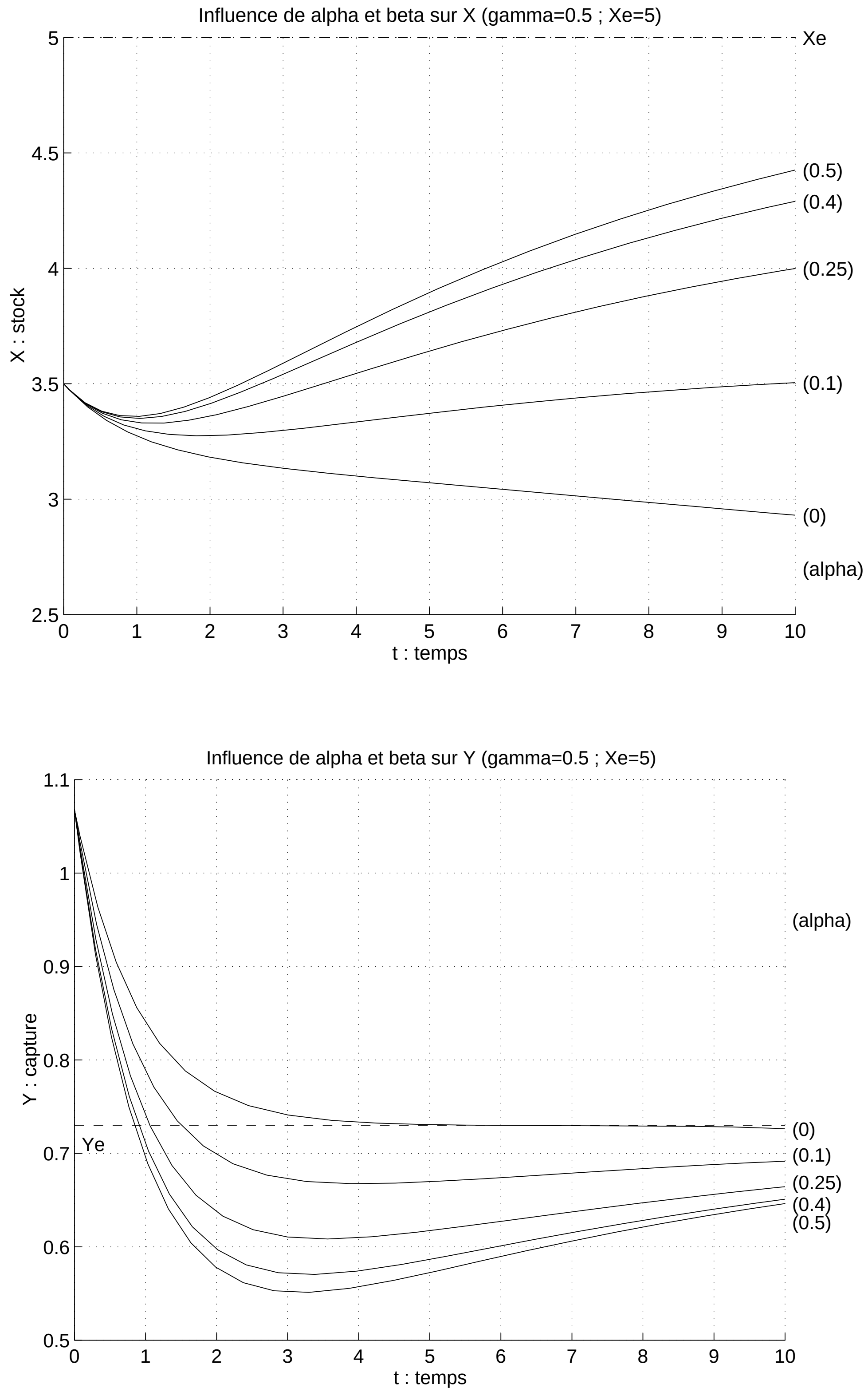


FIG. C.30 *Suite de la figure C.29.*

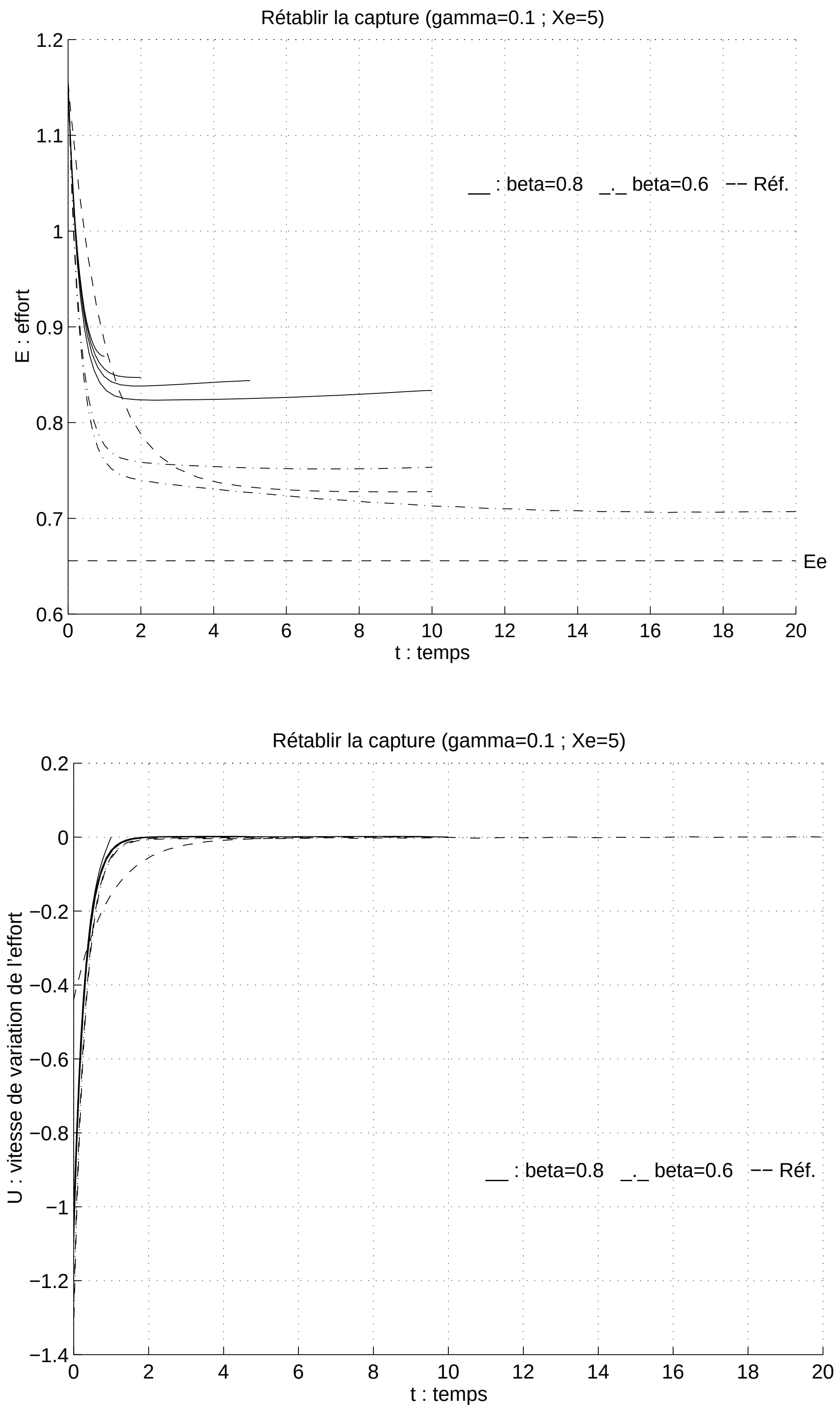


FIG. C.31 *Essais pour rétablir la capture suite à une surexploitation avec chute de biomasse* ($X(0) = X_e - 1,5$; $E(0) = E_e + 0,5$) *pour* $X_e = 5$.

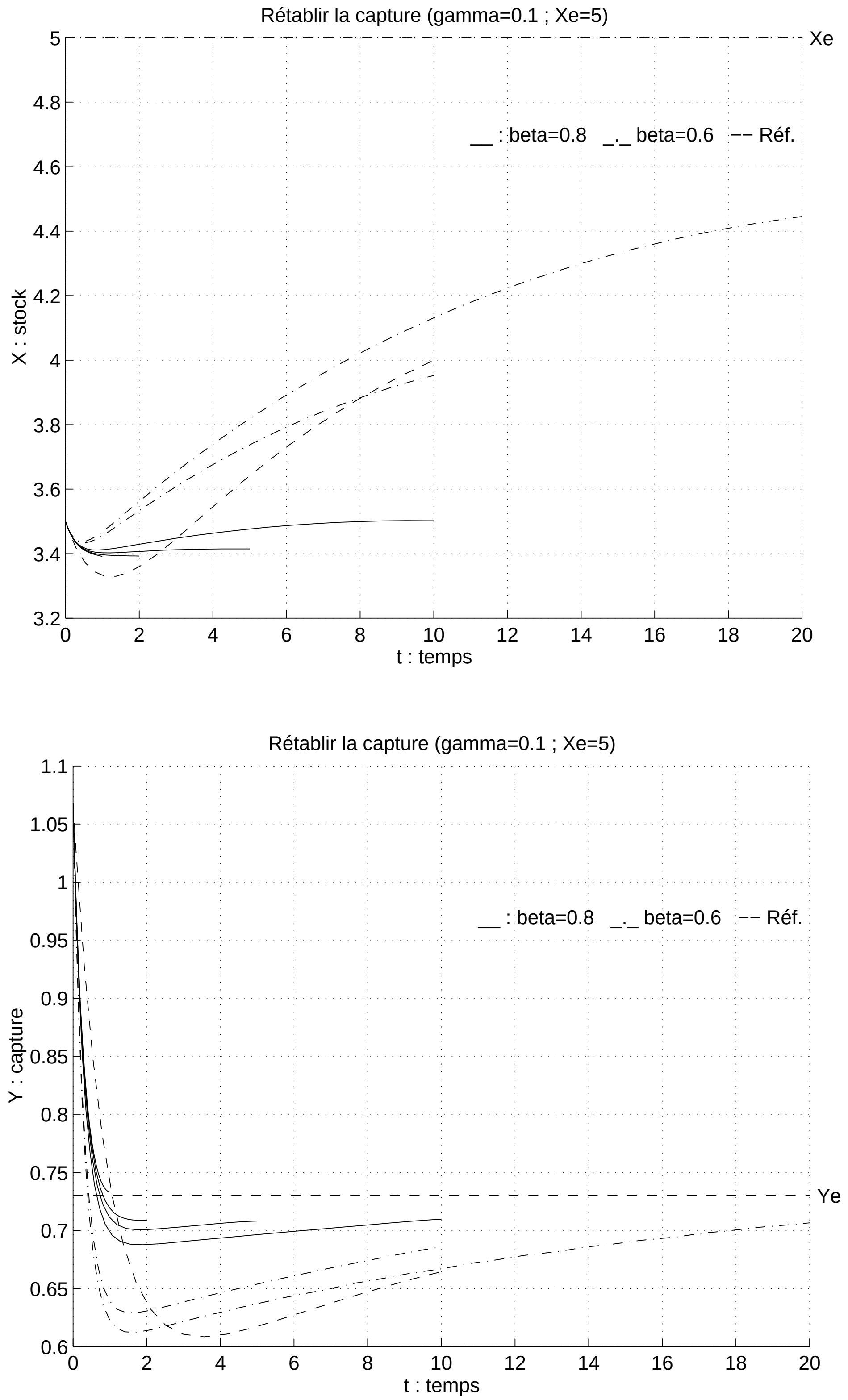


FIG. C.32 *Suite de la figure C.31.*

Annexe D

Détermination de domaine invariant : autres cas

Les deux cas suivants viennent en annexe de la section IV.3.2, qui applique la méthode des domaines invariants à un modèle de SCHAEFER avec dynamique de l'effort. La résolution étant essentiellement graphique et les cas ci-dessous très semblables à ceux détaillés dans la section IV.3.2, les figures ci-dessous ne sont que brièvement commentées.

Détermination du domaine invariant : cas 2 bis

Les valeurs des paramètres choisies sont :

$$\alpha = 1,2 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0,36 \text{ d'après (IV.15)}$$

➤ FIGURE D.1 Dans cette figure, on met en évidence le domaine D contenant l'équilibre Eq dans lequel on veut maintenir le système, ainsi que les isoclines et le champ associés au système (IV.14′) non commandé.

➤ FIGURE D.2 Le sous-domaine invariant sans contrôle obtenu dans ce cas est assez proche de celui du cas 1. Le contrôle le plus favorable appliqué aux zones critiques de la frontière de D permet de ne retenir qu'un seul secteur non viable, pour un effort important et une capture faible, soit un stock affaibli.

➤ FIGURE D.3 Cette figure met en évidence le secteur non viable sous contrôle. Le point limite correspondant sur la frontière Y_{min} est défini par : $E_1 \simeq 0,802$. Cet effort étant inférieur à la valeur E_a déterminé dans le cas 1, on a montré qu'il était possible de s'éloigner de ce secteur non viable.

➤ FIGURE D.4 Le choix d'une trajectoire limite simple pour le sous-domaine invariant est illustré dans cette figure. U_{min} permet de réduire la zone non viable au maximum tant que la capture n'est pas très faible. On pourrait affiner cette limite au voisinage du point (E_1, Y_{min}), mais cela n'apporterait pas grand chose et compliquerait la stratégie de pêche, qui est : diminuer l'effort au maximum lorsque l'effort est grand et que la capture chute.

➤ FIGURE D.5 Cette dernière figure met en évidence le sous-domaine invariant sous contrôle obtenu, très similaire à celui du cas 1.

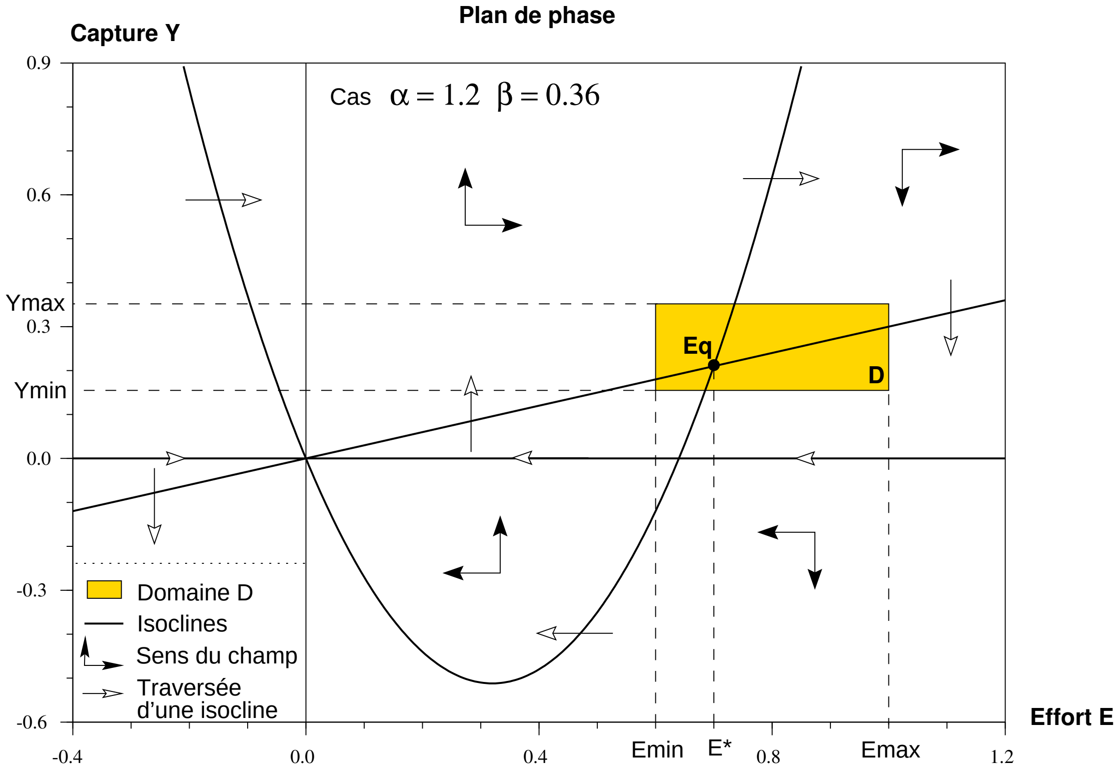


FIG. D.1 *Mise en évidence du domaine D et du champ associé au système (IV.14′) non commandé : cas 2 bis.*

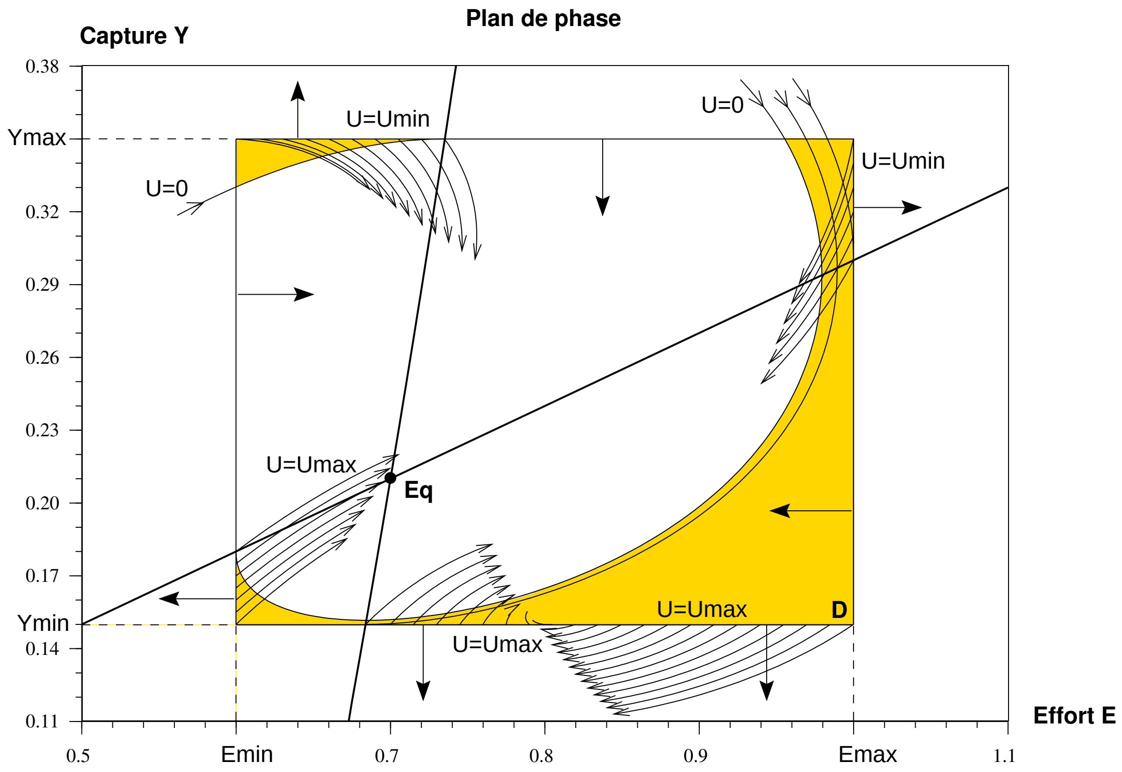


FIG. D.2 *Détermination du sous-domaine invariant de D sans contrôle (zone non grisée), ainsi que du contrôle le plus favorable pour l'accroître : cas 2 bis.*

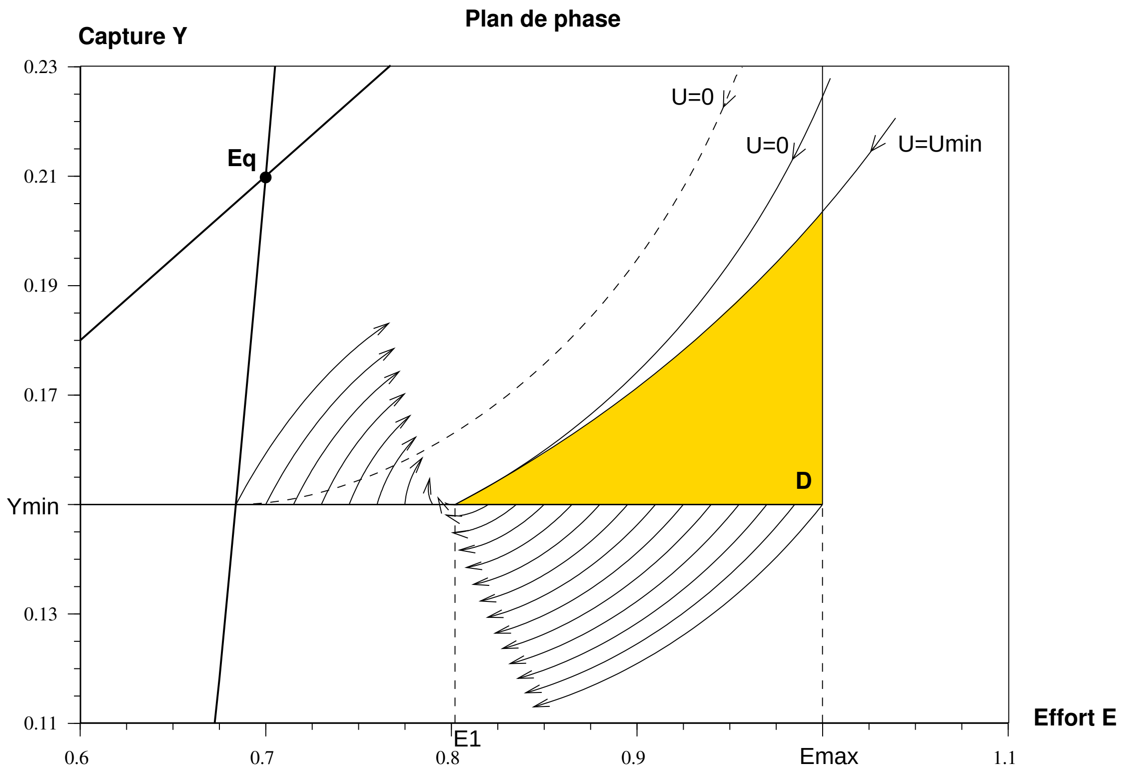


FIG. D.3 *Détermination de la zone non viable sous contrôle du domaine D (zone grisée) : cas 2 bis.*

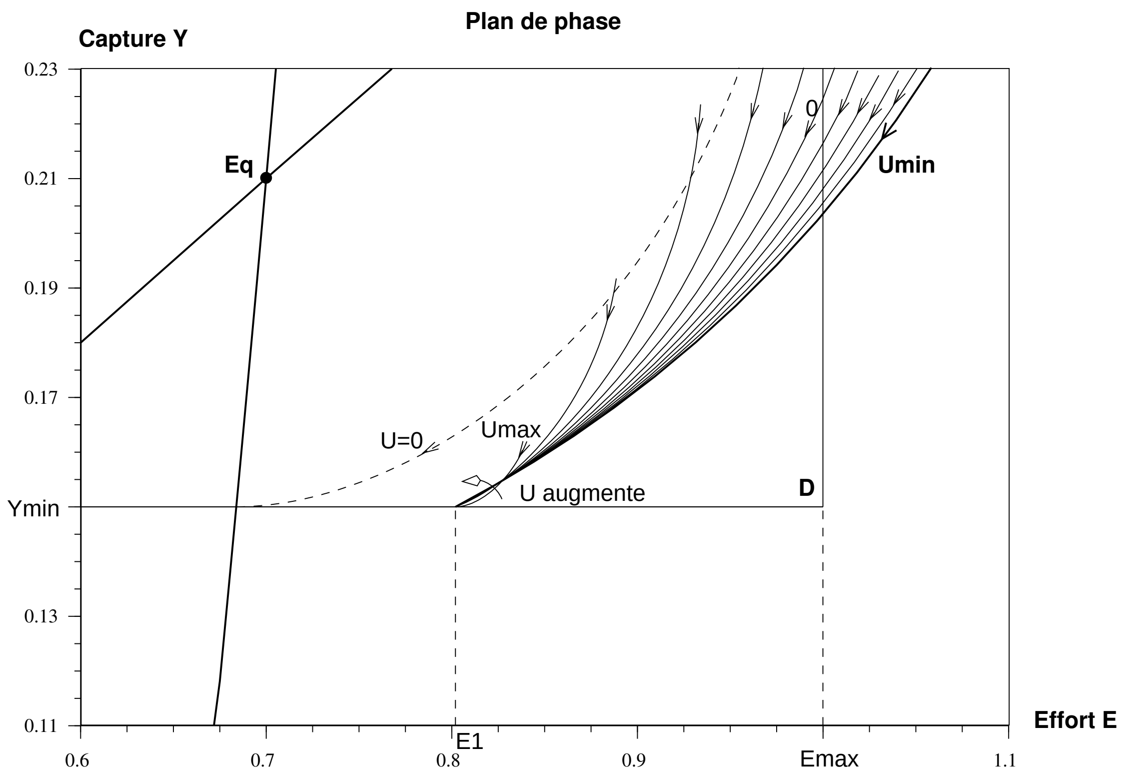


FIG. D.4 *Étude de la limite du sous-domaine invariant de D : cas 2 bis.*

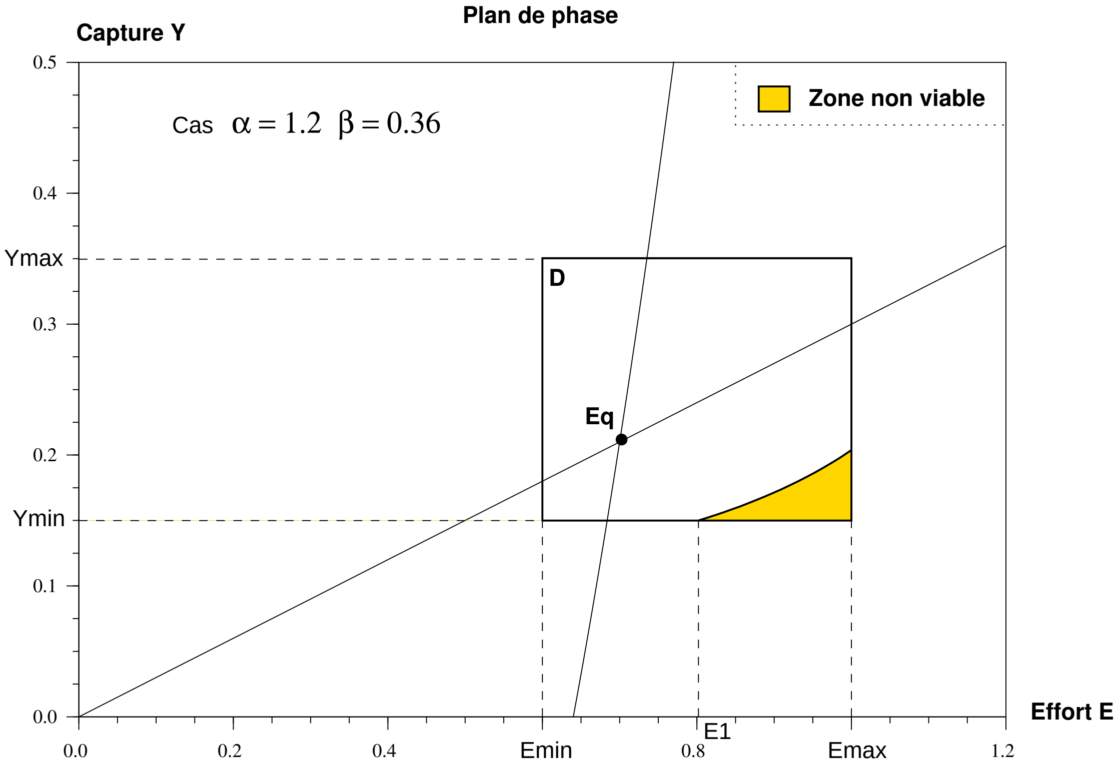


FIG. D.5 *Mise en évidence du sous-domaine invariant de D (zone non grisée) : cas 2 bis.*

Détermination du domaine invariant : cas 3

Ce dernier cas correspond à $\alpha = 1$. Les valeurs des paramètres choisies sont donc :

$$\alpha = 0,8 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0,24 \text{ d'après (IV.15)}$$

Ce cas est très semblable au cas 1, par son comportement et la valeur de ses paramètres.

➤ FIGURE D.6 Cette figure sert de base : elle met en évidence le domaine D contenant l'équilibre Eq dans lequel on veut maintenir le système, ainsi que les isoclines et le champ associés au système (IV.14′) non commandé.

➤ FIGURE D.7 Comme le système est très semblable à celui du cas 1, le sous-domaine invariant sans contrôle est similaire et le contrôle le plus favorable permet de ne retenir qu'un seul secteur non viable. Il apparaît aussi pour un effort important et une capture faible, soit un stock affaibli.

➤ FIGURE D.8 La zone non viable a priori est limitée à la frontière Y_{min} est défini par : $E_1 \simeq 0,822$. Cet effort étant supérieur à la valeur $E_a \simeq 0,816$ déterminé dans le cas 1, on doit réduire le sous-domaine invariant en prenant (E_a, Y_{min}) comme point limite, ce qui dans ce cas, est une modification minime. Ainsi il est certain que le système peut s'éloigner de la zone non viable. Comme cela a été montré dans le cas 1, le contrôle le plus favorable associé à cette limite est U_{min} : il faut diminuer l'effort le plus possible quand on s'aperçoit que le stock s'affaiblit, ce qui paraît naturel.

➤ FIGURE D.9 Cette dernière figure met en évidence le sous-domaine invariant sous contrôle obtenu, très similaire à celui du cas 1.

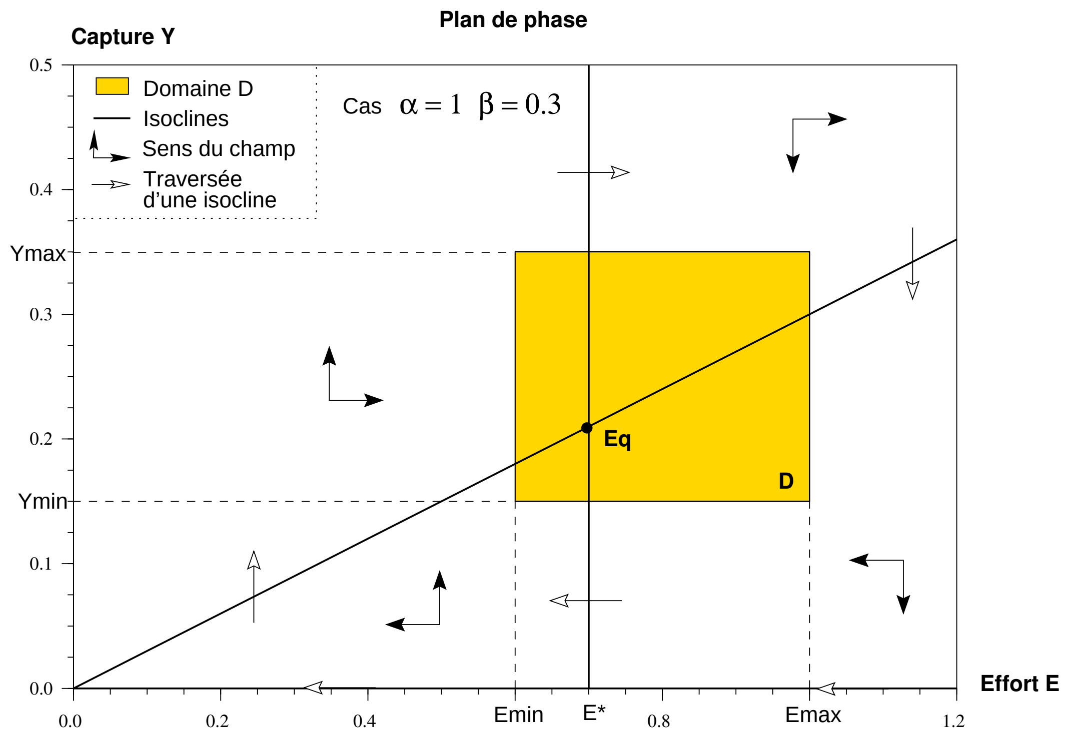


FIG. D.6 *Mise en évidence du domaine D et du champ associé au système (IV.14′) non commandé : cas 3.*

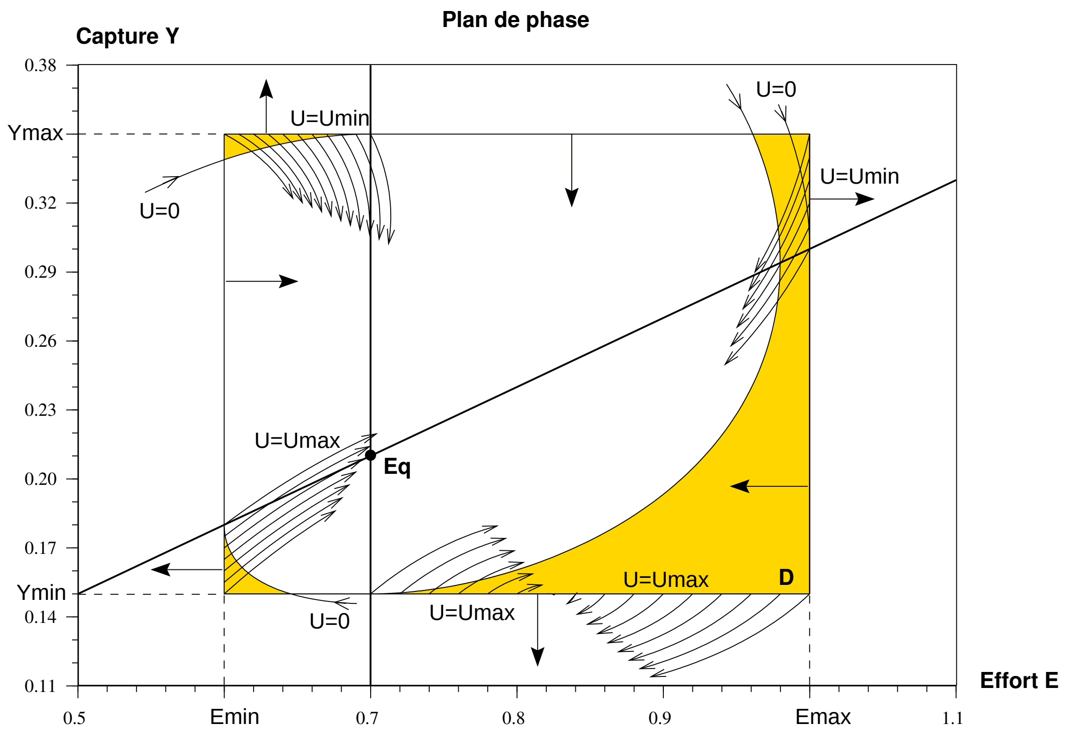


FIG. D.7 *Détermination du sous-domaine invariant de D sans contrôle (zone non grisée), ainsi que du contrôle le plus favorable pour l'accroître : cas 3.*

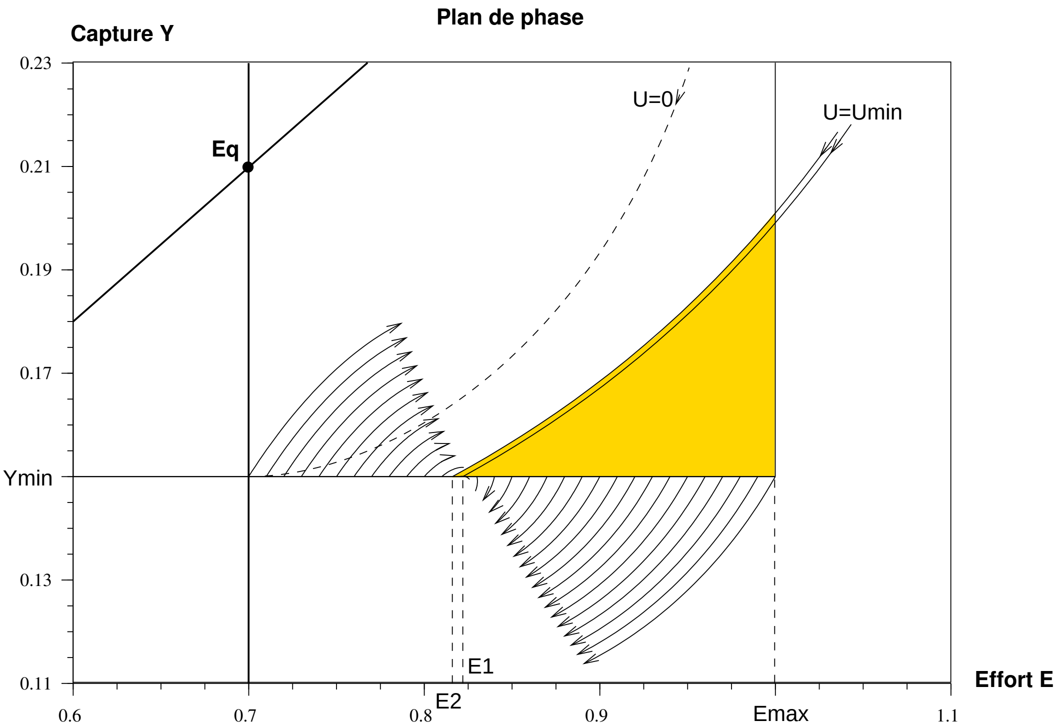


FIG. D.8 *Détermination de la zone non viable sous contrôle du domaine D (zone grisée) : cas 3.*

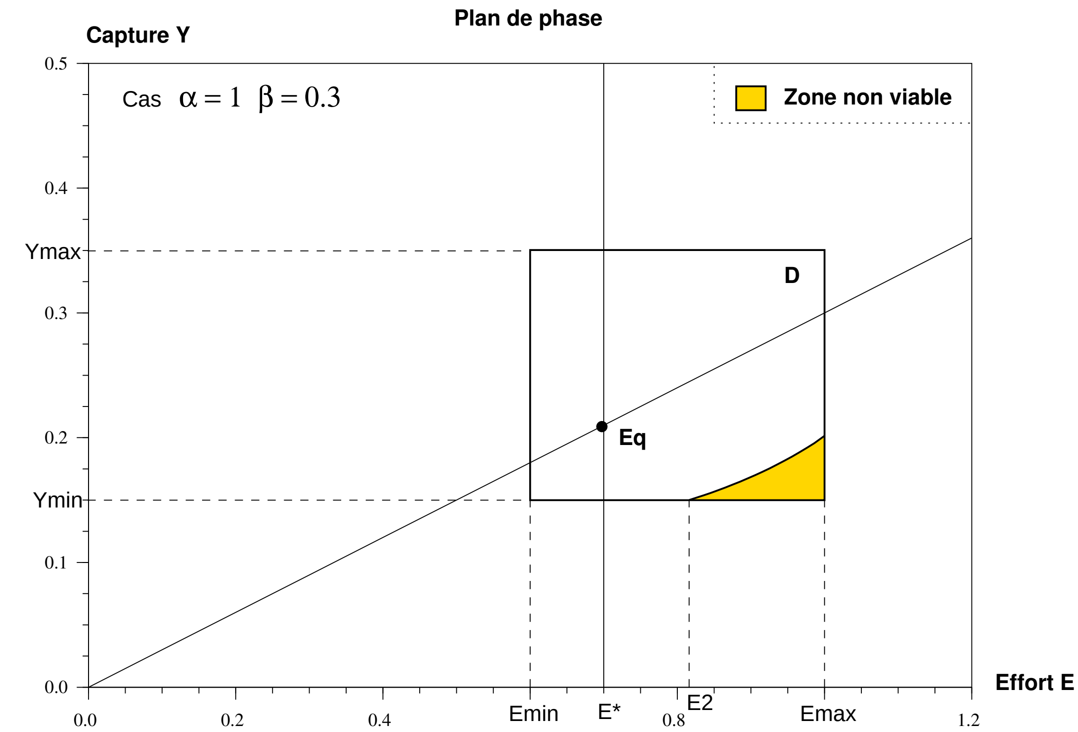


FIG. D.9 *Mise en évidence du sous-domaine invariant de D (zone non grisée) : cas 3.*

Annexe E

Articles

Article 1 : ***Exemples d'applications de l'automatique à l'halieutique*** **– page 239**

Article en français destiné à présenter quelques outils de l'automatique à travers leur application à l'halieutique, par des problèmes « d'école » simples.

À paraître dans le *Journal du CIHEAM, Cahiers Options Méditerranéennes.*

Article 2 : ***On the stock-recruitment relationships in fish population models*** **– page 257**

Article en anglais décrivant l'étude faite dans la section II.4 sur les pré-recrutés et les relations stock-recrutement.

Version soumise à *Environmental Modeling & Assessment*, Baltzer, en mai 1996. Acceptée sous condition pour publication en décembre 1996. En révision.

Article 3 : ***Une modélisation du recrutement*** **– non inclus**

Article en français sélectionné pour une publication dans un livre suite aux *Journées du Programme Environnement, Vies et Sociétés* (CNRS) sur les Tendances Nouvelles en Modélisation pour l'Environnement, Paris, janvier 1996.

Exemples d'applications de l'automatique à l'halieutique

S. Touzeau et J.-L. Gouzé
INRIA – Avant-Projet COMORE

RÉSUMÉ - Cet article a pour but de présenter quelques outils issus de l'automatique, appliqués à la résolution de problèmes dans un contexte halieutique. Ces outils sont introduits par le biais d'exemples simples, regroupés autour des thèmes suivants : modélisation, identification et contrôle. Chaque exemple illustre l'un de ces thèmes, étudié sur un système dynamique « pêcherie ».

Mots-clés : Automatique, contrôle, modélisation, théorie des systèmes, systèmes dynamiques, halieutique.

SUMMARY - *The goal of this article is to present some tools stemming from the control and system theory, which are applied to the resolution of problems in a fisheries management context. These tools are introduced thanks to several simple examples, which are grouped according to the following themes: modelling, identification and control. Each example illustrates one of these themes, studied on a "fishery" dynamic system.*

Key words: *Automation, control, modelling, system theory, dynamic systems, fisheries management.*

INTRODUCTION

Problématique

Dans cet article, nous voulons montrer comment appliquer à des questions halieutiques des outils de l'automatique, et ce essentiellement par le biais d'exemples. Nous présentons là une approche d'automaticiens face à quelques problèmes simples issus des pêcheries.

Ces deux disciplines, l'automatique et l'halieutique sont rarement associées. Cet effort d'interdisciplinarité s'inscrit dans le cadre du GdR CNRS 1107 du Programme Environnement – Comité MMT (Méthodes Modèles et Théories) : *Outils et Modèles de l'Automatique dans l'Étude de la Dynamique des Écosystèmes et du Contrôle des Ressources renouvelables*, qui réunit biologistes, automaticiens et mathématiciens de divers organismes de recherche en France.

Notre projet (COMORE – INRIA Sophia Antipolis) porte sur le COntrôle et la MOdélisation de REssources renouvelables. Il entretient, via ce GdR, des contacts particuliers avec le *Laboratoire MAERHA* de l'IFREMER Nantes (Dominique Pelletier) et le *Laboratoire d'Écologie du Plancton* de la Station Zoologique de Villefranche/mer (Antoine Sciandra).

Présentation générale

L'orientation de cet article étant une présentation d'outils d'automaciens à des biologistes et des halieutes, sont exposées dans cette section quelques notions de base en automatique. Afin d'expliciter ces notions, elles sont ensuite appliquées dans un contexte halieutique. Pour plus de détails, on peut se reporter à la littérature relative à ce domaine (Kwakernaak et Sivan, 1972 ; Faurre et Robin, 1984 ; Beltrami, 1987 ; d'Andréa-Novel et Cohen de Lara, 1994) ou à l'application en biologie des systèmes dynamiques (Pavé, 1994).

Automatique

L'automatique peut être définie comme la science qui étudie le fonctionnement des systèmes. Elle comprend la théorie du contrôle et des systèmes dynamiques.

Un système au sens automatique est isolé du monde extérieur. Les éléments qui le constituent sont organisés, interagissent entre eux et sont dynamiques. On décrit un système à l'aide de variables qui traduisent cette organisation. On le représente usuellement par un schéma-bloc (FIG. E.1). Les variables décrivant le système sont les entrées, les sorties et, dans l'approche d'état (que nous employons tout au long de cet article), les variables d'état (appelées aussi variables internes).

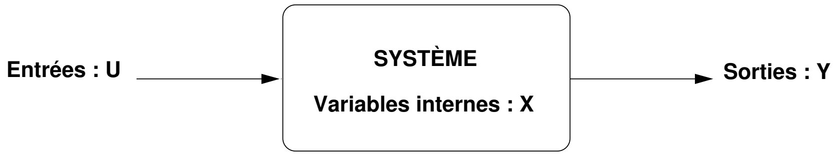


FIG. E.1 *Schéma-bloc d'un système automatique.*

Les *variables internes* (= vecteur $\underline{X}$) caractérisent l'état du système et ne sont généralement pas accessibles ; on doit souvent se contenter de les estimer. Les *entrées* (= vecteur $\underline{U}$) sont, de manière générale, maîtrisées ou connues et sont utilisées pour contrôler le système. Sinon, on les appelle plutôt des perturbations (bruits de mesure,...). Les *sorties* (= vecteur $\underline{Y}$) sont mesurées. Combinées avec la connaissance des entrées, elles permettent de reconstituer tout ou une partie de l'état du système.

Le modèle issu d'un système d'état a la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = \dot{\underline{X}}(t) = f(\underline{X}, \underline{U}(t), t) \\ \underline{Y}(t) = g(\underline{X}(t), \underline{U}(t), t) \end{cases}$$

À partir de ce modèle générique, on peut distinguer trois phases dans l'étude du système : la modélisation, l'identification, et le contrôle.

- La *modélisation* consiste à donner la forme des fonctions f et g.
- Ces fonctions comportent des paramètres ; l'*identification* permet de déterminer les valeurs de ces paramètres.
- Ensuite il est possible de *contrôler* le système, i.e. d'élaborer une loi d'entrée sur f, de manière à obtenir le comportement voulu. Il peut y avoir plusieurs façons pour atteindre

ce but ; le contrôle optimal consiste à chercher la « meilleure » façon, au sens d'un critère donné, i.e. celle qui optimise ce critère. Si le contrôle dépend des autres variables du système, états ou sorties, c.-à-d. :

$$\underline{U} = \underline{U}(t, \underline{X}) \qquad \text{ou} \qquad \underline{U} = \underline{U}(t, \underline{Y})$$

on dit qu'il est en boucle fermée ou *feedback* ; sinon il s'agit d'un contrôle en boucle ouverte.

Système pêche

Le « système pêche » considéré dans cette section décrit le comportement d'un stock de poissons exploité. Le stock est représenté par son abondance X ; X est un vecteur si le stock est structuré en âge ou en stades. L'entrée naturelle sur ce système est l'effort de pêche : c'est ce qui est appliqué au stock et il est plus ou moins maîtrisable. Il en résulte des captures, que l'on peut mesurer et qui constituent les sorties du système (FIG. E.2).

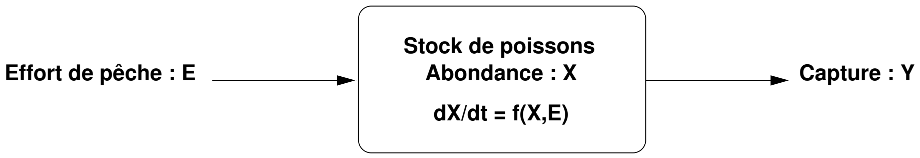


FIG. E.2 *Schéma d'un système pêche.*

EXEMPLE :

- $1^{\text{ère}}$ étape : *modélisation.*
  On choisit le modèle de Schaefer pour déterminer les fonctions f et g.

$$\begin{cases} \dot{X} = rX(1 - \frac{X}{k}) - qEX \\ Y = qEX \end{cases}$$

- $2^{\text{ème}}$ étape : *identification.*
  On identifie les paramètres r, k et q à partir par exemple de données efforts/captures issues de relevés de pêche.

- $3^{\text{ème}}$ étape : *contrôle.*
  Cet exemple illustre le contrôle optimal. On choisit de maximiser les captures sur un horizon de 10 ans. Il faudrait poser le problème plus précisément avec ses contraintes pour se lancer dans une résolution précise. Mais cela consiste à pêcher à un niveau soutenable pendant les premiers temps, puis à la fin, à augmenter l'effort au maximum pour pêcher tout ce qu'il reste. On peut se reporter à l'ouvrage de Clark (1976) pour plus de détails.

Dans la suite de ce document, nous allons décrire plus en détails certaines applications que nous avons réalisées sur des systèmes halieutiques. Cette présentation sera articulée selon les 3 étapes décrites ci-dessus.

MODÉLISATION

= Donner la forme des fonctions f (et g).

La modélisation mathématique, qui nous intéresse ici, est une étape de formalisation. Afin de pouvoir étudier un système donné, on lui substitue un *modèle dynamique mathématique*, qui est une représentation de l'évolution au cours du temps du système réel. Il est illusoire de vouloir prendre en compte tous les phénomènes agissant sur le système : un modèle aussi compliqué soit-il ne sera jamais qu'une substitution, pratique car manipulable, mais imparfaite de la réalité. La première étape est donc une étape de *choix et compromis* : choix des grandeurs intéressantes pour l'étude ultérieure du système et compromis entre la complexité du système et le nombre de phénomènes modélisés. La seconde étape consiste ensuite à *formaliser*, traduire ces phénomènes sous une forme mathématique (Pavé, 1994).

Les modèles classiques en halieutique sont répartis en deux grandes catégories (Laurec et Le Guen, 1981) : les modèles globaux, comme par exemple le modèle de Schaefer (1954), où l'ensemble du stock est agrégé en une seule variable ; et les modèles structuraux ou analytiques, qui scindent le stock en classes d'âge, cohortes ou plus généralement en stades, comme les modèles de Beverton–Holt (1957) et Ricker (1958). Ces modèles sont en temps continu ou discret et on peut leur intégrer des variables stochastiques.

Les modèles que nous utilisons sont le plus souvent des modèles déterministes (pas de variables stochastiques), en temps continu, formalisés par le biais d'un système d'équations différentielles. On pourrait raisonner en temps discret à peu près de la même façon.

Exemple de modélisation des pré-recrutés

Les modèles classiques en halieutique s'intéressent principalement à l'évolution temporelle des stocks de poissons (ou plus généralement de toute population marine exploitée). Un stock est une unité de gestion : il représente la fraction de la population *susceptible d'être exploitée* (Laurec et Le Guen 1981). En sont écartés les individus trop jeunes et/ou trop petits (parfois aussi les individus trop âgés). L'entrée dans cette phase exploitable correspond au *recrutement.* Souvent donc, seule est représentée la dynamique du stock.

Il nous a semblé intéressant de représenter aussi la dynamique des pré-recrutés (œufs, larves, juvéniles). Dans le modèle qui suit, nous nous sommes attachés à détailler les phénomènes intervenant avant le recrutement, alors que la dynamique du stock est très simple.

Présentation du modèle

Nous avons choisi de représenter le stock par un modèle structuré « classique » à n classes d'âge, en lui adjoignant un stade 0 regroupant les pré-recrutés (œufs, larves, juvéniles). Plus précisément, il s'agit d'un modèle en temps continu de dimension (n+1), où chaque stade est décrit par l'évolution de son effectif X_i. Le choix du temps continu s'explique en partie par le fait que nous nous intéressons à la dynamique des juvéniles : cette dernière est rapide et demande donc un pas de temps petit, voire infiniment petit.

Au niveau des *pré-recrutés*, nous avons modélisé la ponte et des termes de mortalités spécifiques. Pour ces derniers, nous nous sommes inspirés des hypothèses utilisées par Ricker (1954) et Beverton–Holt (1957) pour élaborer leurs relations stock-recrutement. Soit, outre la mortalité linéaire naturelle, nous introduisons dans le modèle du cannibalisme parental (cf.

Ricker) et de la compétition intra-juvénile pour la nourriture ou l'habitat (cf. Beverton–Holt). Ce dernier terme de compétition s'exprime par de la mortalité densito-dépendante.

Ces mécanismes sont repris et décrits pour ces deux modèles stock-recrutement dans l'ouvrage de Clark (1976, pp217–218,229–230) et de manière un peu plus synthétique par Hilborn et Walters (1992, pp257–261).

La dynamique du *stock* est elle très simplifiée : mortalité naturelle et pêche (Fig. E.3).

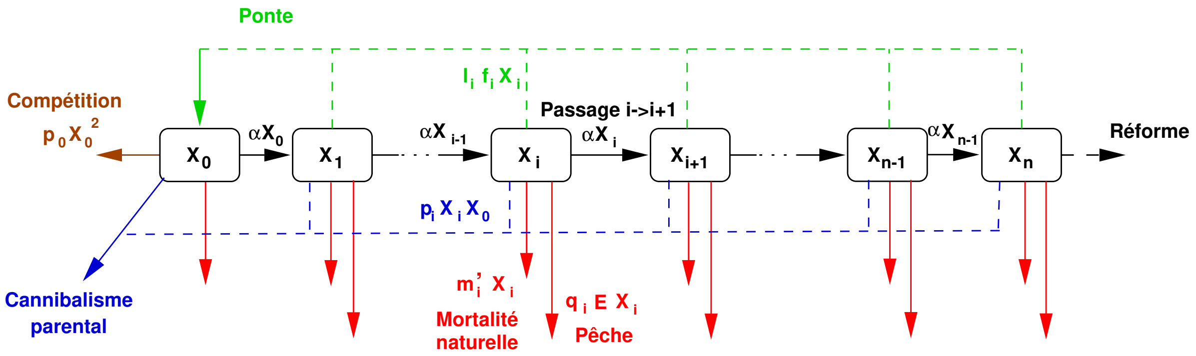


Fig. E.3 *Structure du modèle dynamique stock/pré-recrutés.*

Formalisation mathématique

$$\dot{X}_0(t) = \underbrace{-\alpha X_0(t)}_{\text{passage}\to 1} - \underbrace{m_0 X_0(t)}_{\text{mort. lin.}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_i l_i X_i(t)}_{\text{ponte } i\to 0} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i X_i(t) X_0(t)}_{\text{prédation de } i\to 0} - \underbrace{p_0 X_0(t)^2}_{\text{compétition}} \quad \text{(E.1)}$$

$$\dot{X}_i(t) = \underbrace{\alpha X_{i-1}(t)}_{\text{passage } i-1\to i} - \underbrace{\alpha X_i(t)}_{\text{passage } i\to i+1} - \underbrace{m_i X_i(t)}_{\text{mort. nat.}} - \underbrace{q_i E X_i(t)}_{\text{pêche}} \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \text{(E.2)}$$

avec :

E	:	effort de pêche
m_i	:	coefficient de mortalité naturelle
q_i	:	capturabilité
α	:	coefficient de passage linéaire
p_0	:	paramètre de compétition juvénile
f_i	:	taux de fécondité de la classe i
l_i	:	efficacité reproductive de la classe i
p_i	:	taux de prédation de la classe i sur la classe 0

Chaque stade i (0 à n) du stock est soumis à mortalité naturelle (m_i), mortalité par pêche ($q_i E$) et passage (α) dans la classe supérieure.

À ce modèle linéaire très simple, on greffe au niveau du stade pré-recruté 0 un terme de ponte, supposée continue, permettant de boucler le système, ainsi que des termes de mortalité spécifiques aux pré-recrutés.

Plus précisément, le nombre d'œufs viables (par unité de temps) introduits dans le stade 0 est donné par la somme des $(f_i l_i X_i)$, où f_i est la proportion d'individus féconds, et l_i le nombre moyen d'œufs viables émis par un tel individu. Les juvéniles sont aussi éventuellement soumis à de la prédation parentale du stade i $(p_i X_i X_0)$ et de la compétition $(p_0 X_0^2)$.

On peut remarquer que l'on pourrait aisément introduire un terme de pêche moins élémentaire sur ce modèle. La capturabilité q_i représente pour un poisson de la classe i la probabilité, par unité d'effort, d'être pêché pendant une unité de temps. On pourrait la rendre dépendante de l'engin de pêche : par exemple, en tenant compte des variations de vulnérabilité du poisson par rapport à l'engin choisi, en évaluant l'efficience de l'engin...

En outre l'effort de pêche, que l'on considère constant, pourrait très bien évoluer au cours du temps. Par exemple sous la forme d'un créneau de période un an pour tenir compte des saisons de pêche.

Exemple d'un système halieutique pêcheurs–stock

Nous considérons ici un système de pêcherie plus global, où l'on veut modéliser à la fois la dynamique du stock et celle des pêcheurs. Ces deux sous-systèmes sont décrits de manière assez grossière, car c'est ici le lien entre pêcheurs et stock qui nous intéresse. Nous allons considérer que les pêcheurs P sont représentés par leur effort global E et que le stock de poissons, d'abondance X n'est pas structuré (FIG. E.4).

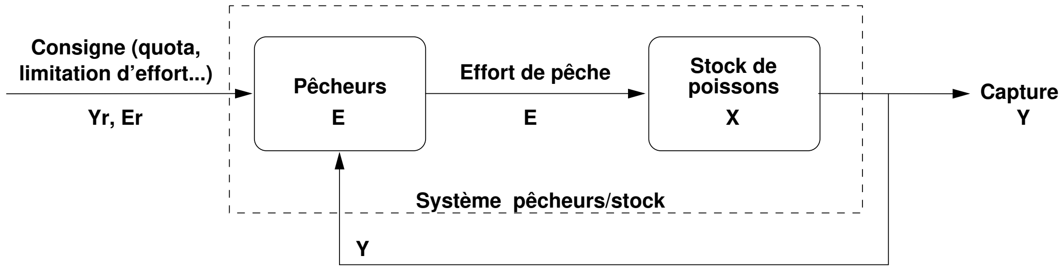


FIG. E.4 *Schéma d'un système halieutique « pêcheurs–stock ».*

Description du modèle

On peut décomposer le système global « pêcheurs–stock » en deux sous-systèmes. Sur le premier sous-système « pêcheurs », il y a :
(i) deux entrées, la consigne quotas Y_r (ou limitation d'effort E_r) et les captures Y ; et (ii) une sortie égale à la variable d'état, l'effort de pêche E.

Sur le second sous-système « stock », il y a :
(i) une entrée, l'effort E ; (ii) une sortie, les captures Y ; et (iii) une variable d'état, l'abondance du stock X.

L'association de ces deux sous-systèmes donne un système global bouclé « pêcherie ». Si l'on analyse ce système, il y a :
(i) une entrée, la consigne quotas Y_r (ou limitation d'effort E_r) ; (ii) une sortie, les captures Y ; (iii) deux variables d'état, l'effort de pêche E et l'abondance du stock X ; et (iv) un bouclage de la sortie sur l'entrée.

Nous avons choisi de décrire l'évolution du stock par un modèle de Schaefer (1954), soit une croissance logistique, moins un terme de pêche proportionnel à la fois à l'abondance et à l'effort.

La dynamique des pêcheurs dérive aussi de ce modèle. Schaefer (1954) a introduit une variable pour décrire l'évolution temporelle de la pêcherie. Avec un seuil critique de niveau de population X_s, au-dessous duquel la pêcherie croissait et au-dessus duquel elle diminuait, faute de rentabilité. Avec nos notations, cela donne : $\dot{E} = kE(X - X_s)$. On peut remarquer que couplé avec la dynamique du stock, on obtient un système proie-prédateur (Murray, 1990).

Mais nous avons rajouté un terme supplémentaire à la dynamique de l'effort, afin de prendre en compte la consigne : limiter l'effort et les captures. Nous introduisons dans ce but un quota de pêche Y_r et une valeur limite de l'effort E_r qui sont des recommandations, issues par exemple d'instances gouvernementales. Elles ne sont pas suivies à la lettre, mais ont une influence sur le comportement des pêcheurs.

Formalisation mathématique

$$\begin{cases} \dot{E} = l_1(pY - cE) + l_2(Y_r - Y) + l_3(E_r - E) \\ \dot{X} = rX\left(1 - \dfrac{X}{k}\right) - qEX \\ Y = qEX \end{cases} \tag{E.3}$$

avec :

E	:	effort de pêche
X	:	abondance du stock
Y	:	captures
p	:	prix de vente d'une unité de captures
c	:	coût d'une unité d'effort / unité de temps
Y_r	:	quotas sur les captures
E_r	:	valeur de l'effort limite
r	:	taux de croissance
k	:	capacité biotique
q	:	capturabilité
l_1, l_2, l_3	:	coefficients de pondération des composantes de $\dot{E}$

Le comportement de la partie stock de ce modèle, i.e. le modèle de Schaefer, est décrit dans la littérature (Schaefer, 1954; Laurec et Le Guen, 1981).

On distingue trois composantes de la dynamique de l'effort, chacune pondérée par un poids l_i que l'on peut ajuster selon le type de comportement voulu. La première correspond à un critère de rentabilité et est similaire à celle avancée par Schaefer (1954) : tant que les revenus des captures (pY) sont supérieurs aux coûts (cE) engendrés par l'effort correspondant, l'effort croît ; sinon, il diminue.

Les deux autres composantes correspondent aux limitations. La deuxième tend à faire augmenter l'effort si les quotas Y_r ne sont pas atteints, et l'inverse en cas de dépassement. Et la troisième tend aussi à augmenter l'effort tant qu'il est inférieur à sa valeur limite recommandée E_r, et inversement s'il la dépasse.

IDENTIFICATION

= Déterminer les valeurs des paramètres de f et g.

Pour déterminer les valeurs des paramètres intervenant dans les modèles, il existe deux grandes façons de procéder : (i) soit par connaissance empirique des paramètres biologiques qui interviennent ; (ii) soit à partir de relevés expérimentaux. C'est cette dernière solution dont nous donnons un exemple ci-dessous.

Admettons que nous sommes en possession d'un jeu de données suffisant, i.e. de relevés portant sur un nombre de variables suffisant (par rapport au nombre de paramètres à identifier), et ce pour de relativement longues séries temporelles. Auparavant nous avons retenu une structure de modèle que nous voulons identifier, cohérente avec les données disponibles. Il faut encore déterminer un critère, admettant comme variables les paramètres du modèle et faisant intervenir les données expérimentales ; les paramètres les plus adaptés aux données, au sens du critère choisi, sont ceux qui optimisent ce critère.

Exemple du stock de flétan

Nous allons présenter ici un exemple d'identification sur un modèle de Schaefer (1954), à partir de données du flétan du Pacifique.

Données

Les données dont on dispose ont été communiquées par R.B. Deriso (pers. comm. via D. Pelletier ; Deriso, 1980). Elles concernent le flétan du Pacifique. Elles sont constituées des relevés de captures et de captures par unité d'effort (cpue) entre 1929 et 1987, à raison d'un relevé par an. Une partie de ces données provient de Ricker (1975).

On en déduit aisément une série de 59 relevés expérimentaux d'effort et de captures, espacés régulièrement d'un an.

Méthode

On choisit ensuite de représenter notre système par le modèle de Schaefer suivant :

$$\dot{X}(t) = rX(t)\left(1 - \frac{X(t)}{k}\right) - Y(t) \tag{E.4a}$$

$$Y(t) = qE(t)X(t) \tag{E.4b}$$

$$X(1929) = X_0 \quad \text{(condition initiale)} \tag{E.4c}$$

Les paramètres à identifier sont donc : r, k, q et X_0. Nous avons intégré la condition initiale du stock dans les paramètres du modèle, car il est nécessaire d'avoir la valeur du stock à un instant donné, afin de pouvoir intégrer l'équation différentielle.

Comme critère d'identification, on choisit de minimiser les écarts entre les captures réelles et les captures simulées, par une méthode des moindres carrés, sur les 59 années des relevés. Cette méthode consiste à minimiser la somme des carrés des écarts. Dans ce cas, le problème correspondant s'exprime de la manière suivante:

$$\text{Trouver : } (r,\, k,\, q,\, X_0)_{opt} = \min_{\{r,k,q,X_0\}} \frac{1}{2} \int_{t=1929}^{1987} (Y_{exp.} - Y_{simul.})^2 \, dt$$

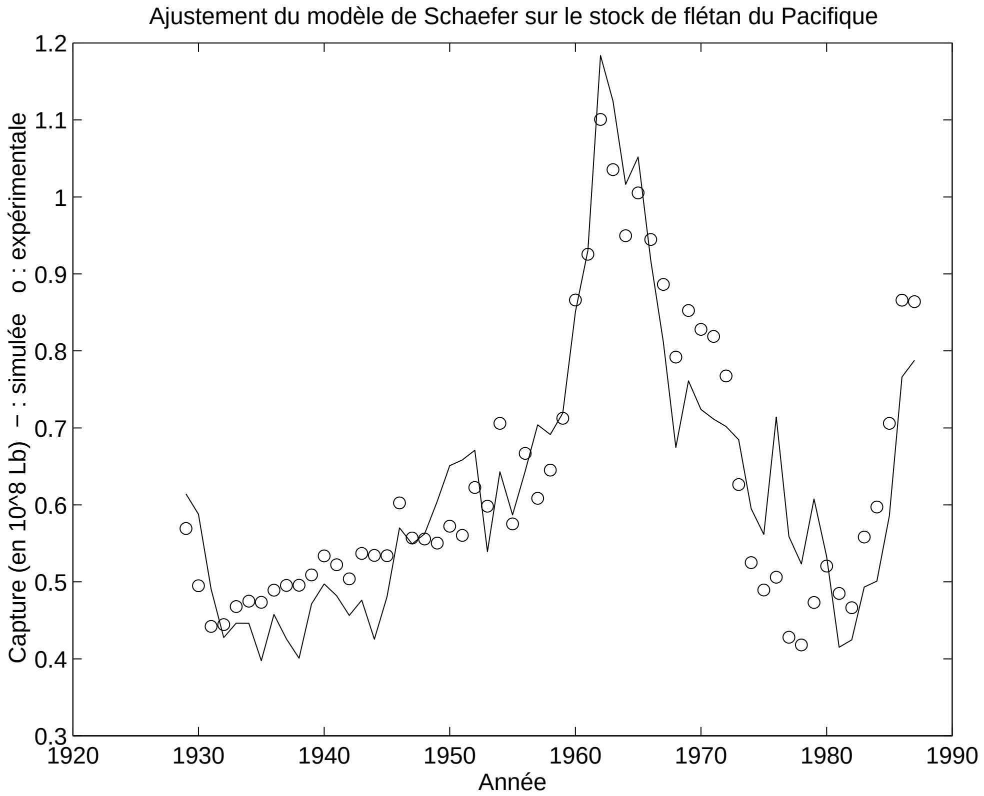


FIG. E.5 *Comparaison, pour le flétan du Pacifique, entre les captures expérimentales et simulées par le modèle de Schaefer (E.4) avec les paramètres identifiés (E.5).*

où : $Y_{simul.}$ est calculée grâce à la relation (E.4b) avec $U = U_{exp.}$ et X ; X étant obtenu par intégration de (E.4a) avec $Y = Y_{exp.}$ et la condition initiale (E.4c).

La résolution numérique des problèmes d'identification a été réalisée sur le logiciel MATLAB, à l'aide de son *Optimization Toolbox*. La fonction implémentée, permettant de résoudre ces problèmes d'optimisation par les moindres carrés non-linéaires, fait appel à l'algorithme de Levenberg–Marquardt.

Résultats

Par la méthode des moindres carrés décrite ci-dessus, nous avons obtenu les valeurs des paramètres optimaux suivantes :

$$\begin{cases} r = 0.278 & \text{en année}^{-1} \\ k = 1055 & \text{en } 10^6 \text{ Lb} \\ q = 0.222 & \text{en } 10^3 \text{ longueur d'engin.année}^{-1} \\ X_0 = 249 & \text{en } 10^6 \text{ Lb} \end{cases} \tag{E.5}$$

Les résultats obtenus sont assez satisfaisants, comme le montre la comparaison entre les captures expérimentales et simulées issues de ce modèle identifié (FIG. E.5).

CONTRÔLE

= Élaborer une loi d'entrée sur f de manière à obtenir un comportement voulu.

Dans cette section, nous présentons deux exemples simples de contrôle. Le premier illustre une poursuite de consigne ; son but est de rendre la sortie du système (captures) égale à une consigne donnée (quotas). Le second exemple est une approche «viabiliste» du contrôle (Aubin, 1991).

Exemple très simple de poursuite de consigne

Cet exemple introduit une poursuite de consigne. De manière générale, cela consiste à élaborer une loi de contrôle sur le système, afin que la sortie (ou une partie de la sortie) de ce dernier suive la consigne indiquée. Le système que nous considérons ici est le « système pêche» présenté à la FIG. E.2. La consigne de sortie est prise sous forme de quotas de pêche.

Tout d'abord, nous allons présenter une synthèse intuitive de la loi de commande, puis ensuite nous allons vérifier que le système ainsi commandé remplit bien notre objectif : suivre les quotas de pêche.

Élaboration a priori de la loi de contrôle

Notre but dans cet exemple est de suivre la consigne : *captures* = *quotas*, sur un stock exploité donné. Le contrôle sur notre système est l'effort de pêche E. On cherche donc à élaborer un effort qui, appliqué au stock de poissons, permette de suivre la consigne.

Pour cela on introduit un comparateur dans notre système, qui calcule l'erreur : $\varepsilon = Y_r - Y$, puis on multiplie cette erreur par un gain A, qui sert d'amplificateur. Si l'on suppose que : $\dot{E} = A(Y_r - Y)$, la loi d'effort qui dérive de cette équation a, a priori, bien le comportement voulu. En effet, si les quotas sont dépassés, l'effort diminue (et donc a priori les captures aussi), tandis qu'il augmente si les quotas sont dépassés. Il suffit donc finalement d'intégrer cette erreur amplifiée pour obtenir le contrôle E (FIG. E.6).

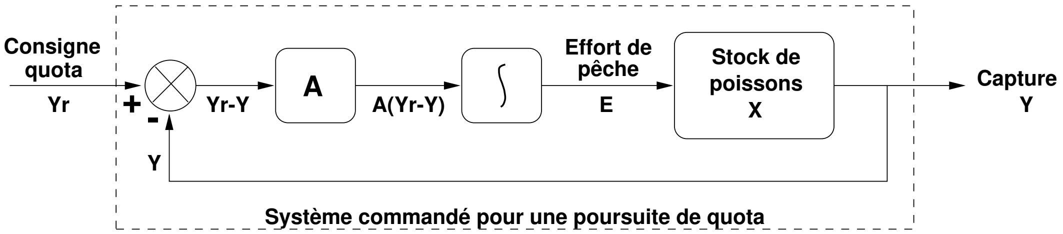


FIG. E.6 *Schéma d'un système halieutique avec poursuite de consigne « quotas ».*

Analyse du système commandé

Vérifions à présent que le comportement du système est bien conforme à notre objectif, à savoir poursuite de la consigne « quotas ».

Comme modèle pour le stock, on prend le modèle de Schaefer (1954), ce qui nous donne le système complet commandé suivant :

$$\dot{X} = rX\left(1 - \frac{X}{k}\right) - qEX \tag{E.6}$$

$$\dot{E} = A(Y_r - Y) \tag{E.7}$$

$$Y = qEX \tag{E.8}$$

Pour l'étude de ce système, nous avons choisi des valeurs simples pour les paramètres. Elles ne sont pas nécessairement réalistes, aucune unité n'est précisée, mais ce modèle sans dimension permet une meilleure compréhension et des calculs allégés. Soit donc :

$$\begin{aligned} r = k = q &= 1 \\ A &= 3 \\ Y_r &= 0,2 \end{aligned} \tag{E.9}$$

Le système devient donc :

$$\dot{X} = X(1 - X) - EX \tag{E.6'}$$

$$\dot{E} = 3(0,2 - EX) \tag{E.7'}$$

Les points d'équilibre sont les points qui annulent $\dot{X}$ et $\dot{E}$. Ils vérifient donc : $E + X = 1$ et $EX = 0,2$; ou encore l'équation suivante : $X^2 - X + 0,2 = 0$. Il y a donc deux points d'équilibre, qui sont bien dans le plan réel, avec des coordonnées strictement positives, et qui sont :

Équilibre 1 (Eq 1)	Équilibre 2 (Eq 2)
$X_1^* = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$	$X_2^* = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$
$E_1^* = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$	$E_2^* = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

Les points obtenus vérifient bien la consigne : *captures* = *quotas*. Il faut donc à présent étudier à partir de quelles conditions initiales il est possible d'atteindre ces points d'équilibre.

Si l'on se place dans le plan de phase, i.e. dans le plan où l'on a l'effort sur un axe et l'abondance du stock sur l'autre, on peut déterminer le sens de variation de chacune des variables, selon divers secteurs du plan. On matérialise la résultante des variations en X et en E par une flèche. On peut ainsi voir si les points d'équilibre sont stables et d'où il est possible de converger vers eux (Fig. E.7).

Grâce à cette représentation graphique, on voit donc que le point d'équilibre Eq 1 est un nœud stable et le point d'équilibre Eq 2 un point selle, donc instable. En ces deux points les captures sont égales aux quotas et l'on est à l'équilibre. Il est intéressant de remarquer que le point stable est celui pour lequel l'abondance du stock est plus élevée et l'effort de pêche plus faible.

Les secteurs du plan sont délimités par les isoclines Δ_1, Δ_2 et une séparatrice Σ. Σ est la trajectoire particulière qui converge vers le point d'équilibre instable Eq 2. Elle est obtenue par simulation numérique. Comme toute trajectoire, elle ne peut être franchie. À gauche de cette séparatrice (zone grisée), à partir des secteurs S1, S2 et S3, toutes les trajectoires tendent vers un stock nul et un effort très grand. À droite de la séparatrice, à partir des secteurs S4, S5, S6 et S7, les trajectoires convergent toutes vers l'équilibre stable Eq 1.

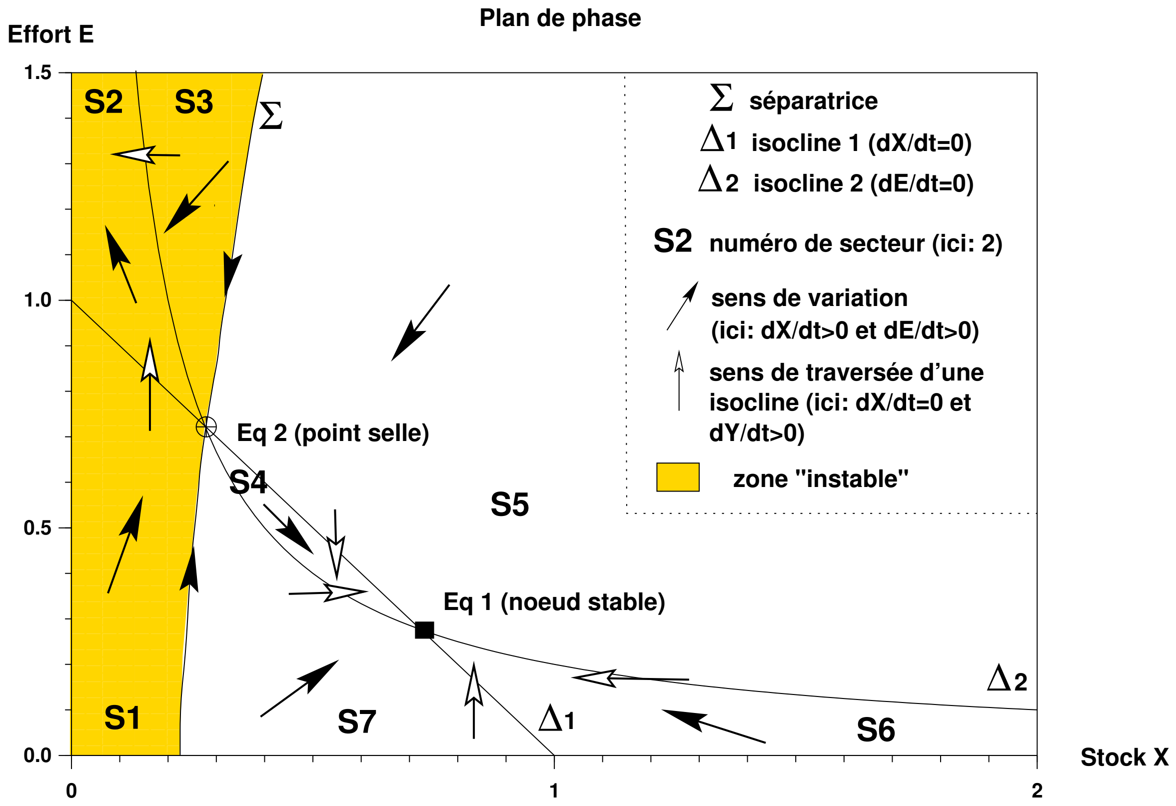


FIG. E.7 *Plan de phase associé au système halieutique (E.6′,E.7′)avec poursuite de consigne « quotas ».*

Interprétation des résultats

On a donc défini deux zones dans le plan de phase séparées par Σ. La première zone est celle dite « instable » (secteurs 1-3, zone grisée) ; elle est caractérisée par un stock d'effectif faible. La seconde est la zone de convergence ; elle recouvre les stocks plus abondants.

Si le stock est bas (zone instable), quel que soit le niveau d'exploitation appliqué, avec la loi de contrôle élaborée ci-dessus on va totalement épuiser le stock. En général dans ce cas, les captures sont inférieures aux quotas (secteurs S1-2) ; pour réaliser la consigne, on augmente alors l'effort de pêche, et ainsi on parvient à un effort très grand mais un stock nul. Toujours avec un stock bas, il arrive que les quotas soient dépassés (secteur S3) ; dans ce cas, l'effort commence par diminuer, mais le stock aussi car il est surexploité ; ainsi on repasse sous les quotas (secteur S2), l'effort augmente, le stock s'épuise et l'on se retrouve dans le cas précédent : effort très grand, stock nul.

Si au contraire le stock est important (zone de convergence), la loi de contrôle élaborée ci-dessus permet d'atteindre les quotas au bout d'un certain temps. Elle diminue l'effort et les captures dans les secteurs S4-5 et les augmente dans les secteurs S6-7. Ainsi le système tend vers des valeurs d'effort, de stock et de captures respectant les quotas, valeurs d'équilibre données par Eq 1. C'est un niveau d'exploitation intéressant car il correspond à stock assez élevé. En outre, ce contrôle est assez robuste face à des petites perturbations, car Eq 1 est un point stable sur la zone de convergence.

En conclusion, le contrôle synthétisé ci-dessus remplit bien son objectif *captures = quotas* à condition que le stock initial ne soit pas à un niveau trop faible, sinon il épuise le stock.

Stabilisation « viabiliste »

Présentation du système étudié

Dans cet exemple, on considère le système suivant :

$$\dot{X} = rX\left(1 - \frac{X}{k}\right) - qEX \tag{E.10}$$

$$\dot{E} = U \tag{E.11}$$

$$Y = qEX \tag{E.12}$$

Le système est très semblable à celui représenté sur la Fig. E.2, avec un modèle de Schaefer, sauf que là on ne contrôle pas le système par l'effort de pêche E mais par sa dérivée U, i.e. par la vitesse de variation de l'effort. C'est plus réaliste, car ainsi l'effort varie continûment et non pas de manière brusque. Le contrôle est alors du type : « veuillez diminuer l'effort à telle vitesse, soit veuillez détruire un bateau par an », et non : « veuillez appliquer tel effort, soit veuillez pêcher avec tant de bateaux ». En outre on borne U, ainsi l'effort ne peut pas varier trop vite.

De même que précédemment, nous allons poursuivre l'étude avec un modèle adimensionnel, où les paramètres sont choisis arbitrairement. Soit : $r = k = q = 1$. Le modèle précédent devient :

$$\dot{X} = X(1 - X) - EX \tag{E.10$'$}$$

$$\dot{E} = U \text{ avec : } -1 \leqslant U \leqslant 1 \tag{E.11$'$}$$

$$Y = EX \tag{E.12$'$}$$

Approche « viabiliste »

Le but ici est d'essayer de rester dans un domaine D donné. On cherche à savoir si, partant d'un point de ce domaine D, il existe un contrôle admissible (i.e. respectant les contraintes de bornitude) nous permettant d'y demeurer.

Ainsi on peut définir un sous-domaine limite D_l de notre domaine initial D tel que si et seulement si on ne part pas de D_l, quel que soit le contrôle U, on est certain de quitter D. Ce qui signifie aussi que si on part de D_l, on peut trouver un contrôle U pour rester dans D (et par suite dans D_l).

Ce type d'étude est connue sous le terme d'étude de viabilité (Aubin, 1991).

Application à notre système

On cherche à rester autour d'un point équilibre de référence du système, de manière à ce que les captures et l'effort de pêche ne s'éloignent pas trop de leurs valeurs d'équilibre. Cela constitue un pseudo-critère économique : peu de variations de captures et d'effort garantit aux pêcheurs des revenus et des coûts à peu près constants.

Le point d'équilibre que l'on choisit est :

$$X^* = 0,3 \qquad E^* = 1 - X^* = 0,7 \tag{E.13}$$

À l'équilibre, le contrôle U est nul. Le domaine D dans lequel on veut rester est défini de la manière suivante :

$$\begin{gathered} E_{min} = 0,6 \leqslant E \leqslant E_{max} = 1 \\ Y_{min} = 0,15 \leqslant Y \leqslant Y_{max} = 0,35 \end{gathered} \tag{E.14}$$

La contrainte est :

$$-1 \leqslant U = \dot{E} \leqslant 1 \tag{E.15}$$

À partir de là, on va utiliser une résolution graphique du problème. On se place comme précédemment dans le plan de phase (X, E).

Tout d'abord, on met en évidence le point d'équilibre indiqué en (E.13) et le domaine D défini par (E.14). On représente aussi les deux droites, $X = 0$ et Δ, pour lesquelles $\dot{X}$ issu de (E.10′) s'annule (FIG. E.8). En effet les trajectoires peuvent « s'arrêter » sur ces droites, car les points de ces droites sont tous des équilibres de (E.10′) : il suffit alors de prendre $U = 0$ pour qu'ils deviennent des équilibres du système complet (E.10′,E.11′) . La droite $X = 0$ n'est pas très intéressante néanmoins (stock épuisé).

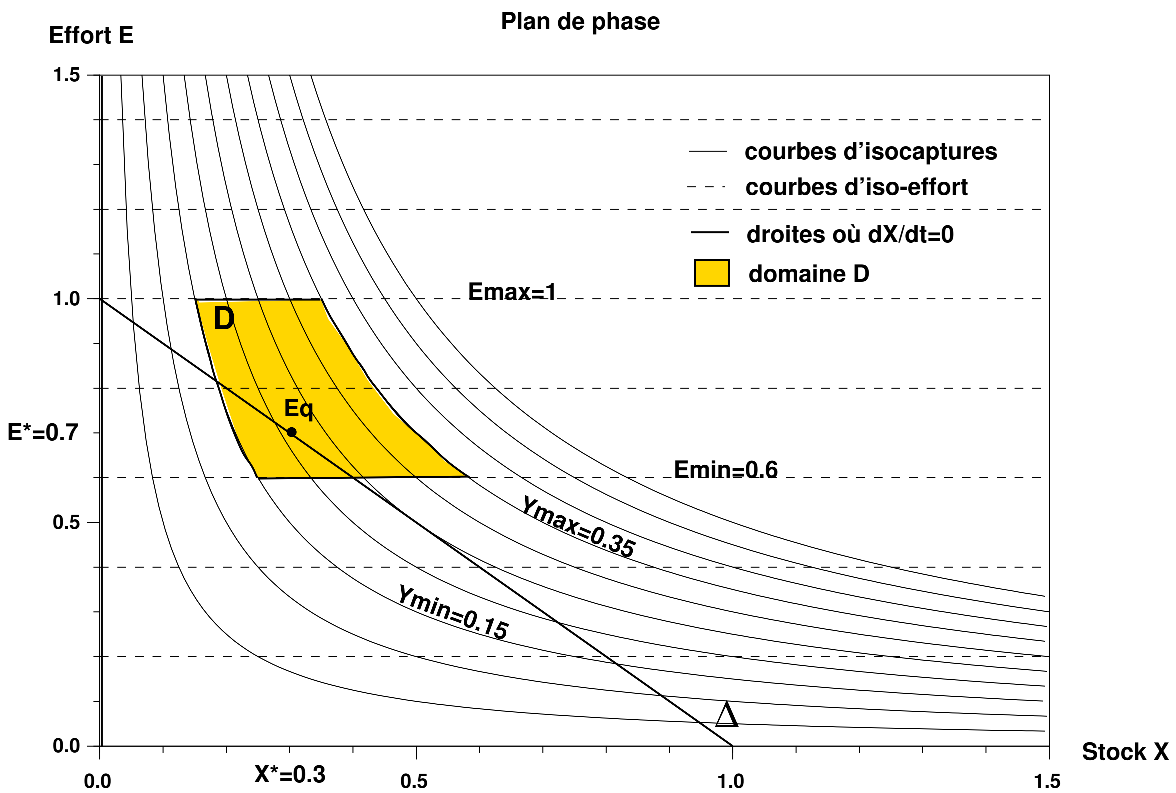


FIG. E.8 *Mise en évidence du domaine D (E.14) dans lequel on veut maintenir le système (E.10′,E.11′,E.12′).*

Ensuite, on étudie le sens de variation de X, i.e. le signe de $\dot{X}$, aux bornes du domaine D. On le matérialise par des flèches horizontales (FIG. E.9). Là où les flèches sont rentrantes aux bornes de D, on ne peut sortir du domaine. Sur le bord bas, le bord haut, le côté droit et le côté gauche / partie inférieure du domaine, il n'y a pas de problème, les flèches sont rentrantes. Par contre sur le côté gauche / partie supérieure du domaine, les flèches sont sortantes.

En effet dans la zone supérieure gauche de D, l'effort de pêche est trop élevé et donc l'abondance du stock s'affaiblit ; tant et si bien que l'on ne peut plus assurer le niveau de captures Y_{min} si l'on maintient l'effort à ce niveau.

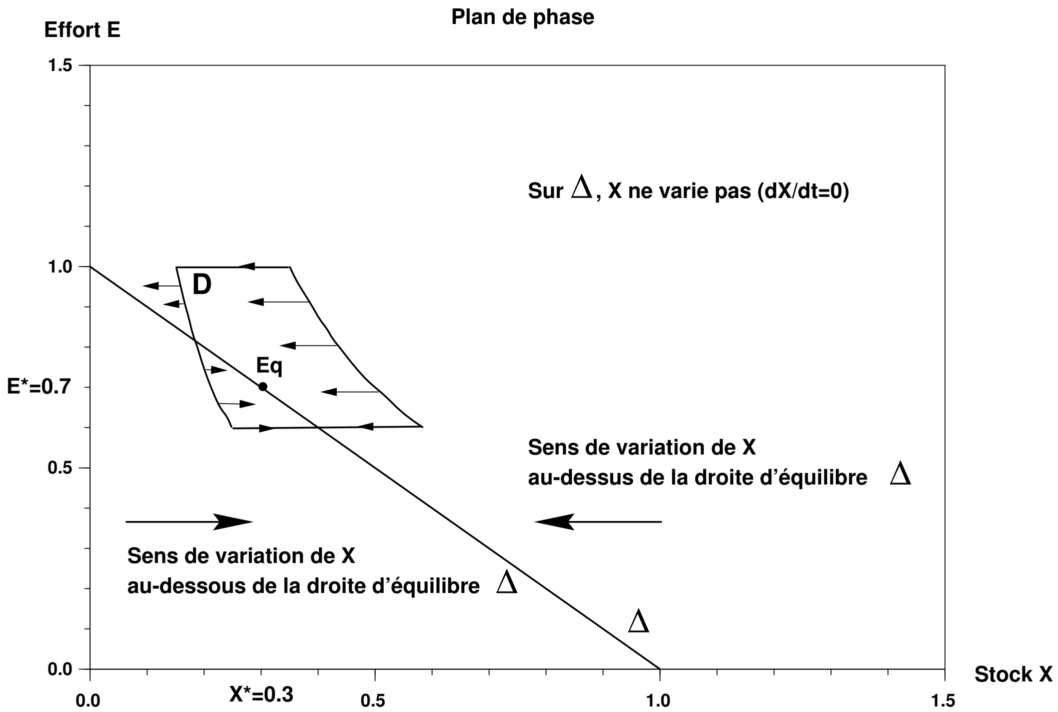


FIG. E.9 *Détermination du sens de variation de l'abondance X du stock aux bornes du domaine D.*

La solution pour tenter de rester dans le domaine D quand on approche de la zone critique supérieure gauche est donc de diminuer l'effort de pêche le plus vite possible, cad. pour $\dot{E} = U_{min} = -1$. En traçant un faisceau de trajectoires avec ce contrôle minimal, on peut identifier la *trajectoire limite*. Si l'on part d'un point de D à gauche de cette trajectoire limite, quoi que l'on fasse, on sort de D. Et si l'on part à droite de cette trajectoire limite, un contrôle admissible (vérifiant (E.15)) bien choisi permet de demeurer dans D ; et par conséquent à droite de cette trajectoire (FIG. E.10).

Grâce à cette méthode graphique, on identifie donc une zone interdite du domaine D, située dans le coin supérieur gauche du domaine. Si l'on évite cette zone, grâce à un contrôle intelligent, on peut conserver un niveau de captures et d'effort proche du point d'équilibre de référence. L'interprétation économique de ce résultat est un peu grossière : revenus et coûts à peu près constants si l'on reste à droite de la trajectoire critique. Mais ce résultat, par son approche «domaine solution» (et non «trajectoire solution»), a l'avantage d'être assez robuste en cas de petites perturbations.

CONCLUSION

Nous avons montré dans cet article qu'il est possible d'appliquer des outils de l'automatique à des problèmes de pêche. Certes, le contenu halieutique des exemples présentés ici n'est pas très développé ; ces applications sont en outre fort peu réalistes. Néanmoins, ce sont des « cas d'école », simples, de manière à illustrer, dans un contexte de pêche, l'utilisation de la théorie des systèmes et du contrôle.

La résolution de problèmes plus complexes et réalistes est possible, mais demande un travail et une interaction halieute–automaticien qui dépasse le cadre et le sujet de cet article.

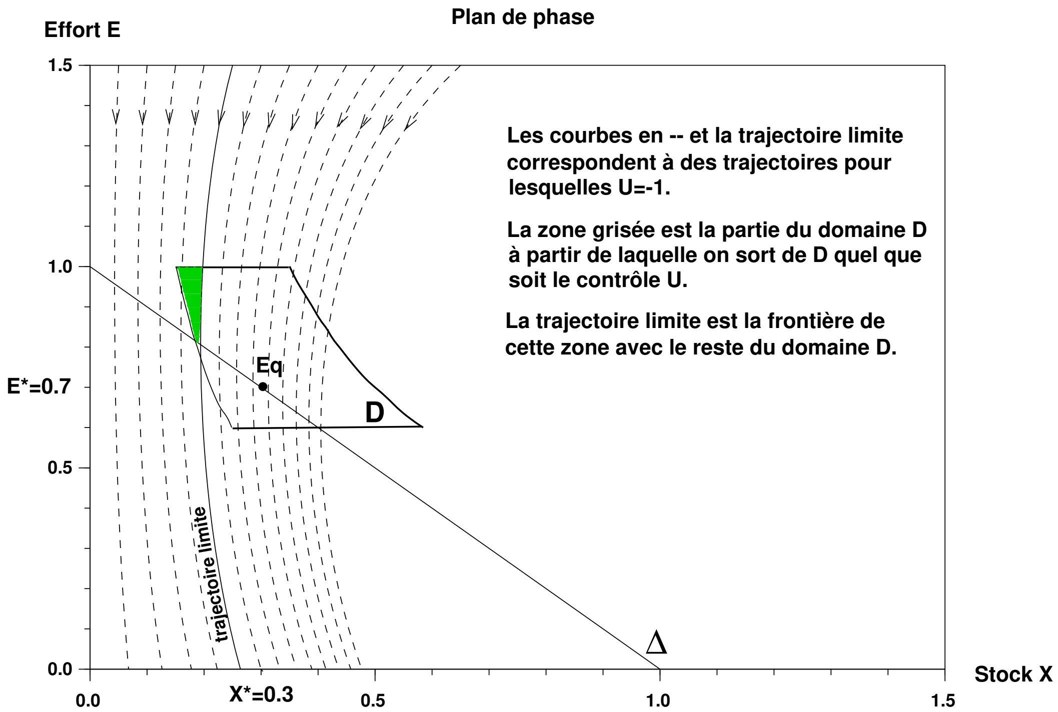


FIG. E.10 *Identification de la zone interdite (zone grisée) du domaine D.*

RÉFÉRENCES

d'Andréa-Novel, B. et Cohen de Lara, M. (1994). *Commande linéaire des systèmes dynamiques.* Masson, Paris.

Aubin, J.-P. (1991). *Viability theory.* Birkhauser, Boston.

Beltrami, E. (1987). *Mathematics for dynamic modeling.* Academic Press, Boston.

Beverton, R.J.H. et Holt, S.J. (1993). *On the dynamics of exploited fish populations.* Chapman & Hall, London. First edition 1957.

Clark, W.C. (1976). *Mathematical Bioeconomics: the optimal management of renewable ressources.* Wiley, New York.

Deriso, R.B. (1980). Harvesting strategies and parameter estimation for an age-structured model. *Can. J. Aquat. sci.*, 37 : 268–282.

Faurre, P. et Robin, M. (1984). *Éléments d'automatique.* Dunod – Bordas, Paris.

Kwakernaak, H. et Sivan, R. (1972). *Linear control systems.* Wiley-Interscience, New York.

Laurec, A. et Le Guen, J.-C. (1981). *Dynamique des populations marines exploitées – Tome I : Concepts et modèles.* Rapports scientifiques et techniques du CNEXO n^{o} : 45. Cf. Éditions de l'IFREMER, Plouzané (France).

Munro, G.R. (1992). Mathematical bioeconomics and the evolution of modern fisheries economics. *Bulletin of Mathematical Biology*, 54(2/3) : 163–184.

Murray, J.D. (1989). *Mathematical biology.* Springer, Berlin.

Pavé, A. (1994). *Modélisation en biologie et en écologie.* Aléas, Lyon.

Ricker, W.E. (1958). *Handbook of computations for biological statistics of fish populations*, Bull. Fish. Res. Board Can. 119.

Ricker, W.E. (1975). *Computation and interpretation of biological statistics of fish populations*, Bull. Fish. Res. Board Can. 191.

Schaefer, M.B. (1954). Some aspects of the dynamics of populations important to the management of the commercial marine fisheries. *Bulletin of the Inter-American Tropical Tuna Commission*, 1(2) : 27–56.

On the stock-recruitment relationships in fish population models

Suzanne Touzeau and Jean-Luc Gouzé
INRIA – Avant-projet Comore

Abstract

We consider a stage-structured model of a harvested fish population that takes into account the dynamics of the pre-recruits stage (i.e. eggs, larvae, juveniles). We show that no functional stock-recruitment relationship can be found, unless we add further assumptions (fast dynamics and uniformity). The curves we thus get are compared with the classical ones: varying the biological hypotheses we can obtain the Beverton and Holt curve, but not Ricker's.

Keywords: population dynamics; fisheries; stage-structured model; stock-recruitment relationship.

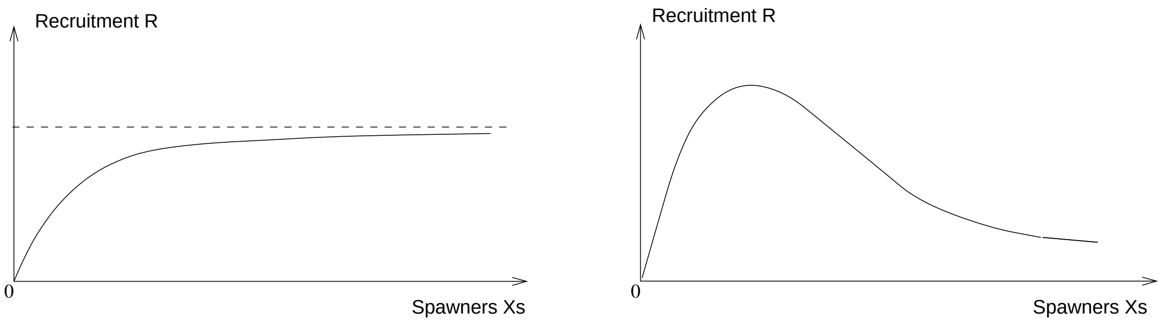
1 Introduction

Let us consider a harvested fish population. The data available for fisheries mainly concern the exploitable part of the population, usually called *stock*. It represents the fishes susceptible to be caught, excluding for instance too small fishes; the stock is a management unit. This is why the entire life cycle of such a harvested marine population is seldom studied; generally, only the stock will be considered.

Numerous dynamic models have been made to represent the stock: global models, where all the individuals are aggregated in a single variable; structural models, where the evolution of each stage or age class is described separately [1,2]. In this paper, we have used the second structured approach.

To study the dynamics of a particular structured stock, one has to express the corresponding recruitment, i.e. the input in this exploitable phase [3]. Some models consider a constant or purely stochastic recruitment, or more generally take an exogenous function as input, assessing that the environmental fluctuations have a predominant influence. Recruitments of this type are open loop inputs. There are examples where the recruitment is actually governed by the environment (cases where food or spawning habitat limitations are prevailing for instance); however in a more general way, it is difficult to deny any connection between the spawners and the subsequent juveniles and recruitment. Other models therefore use a stock-recruitment relationship, that is an equation linking the spawning stock abundance or biomass to the recruitment. This allows the loop to be closed and respects the bio-logical bonds between consecutive generations.

The two classical relations commonly used for stock-recruitment have been established by Beverton and Holt [4] and Ricker [5] (cf. figure E.11). Though, comparisons between these models and the experimental data are often disappointing (cf. figure E.12) [3,pp 241–296].



(a) Beverton and Holt $R = \frac{aX_s}{b+X_s}$ (b) Ricker $R = X_s e^{a(1-X_s/b)}$

FIG. E.11 *Classical stock-recruitment relationships*

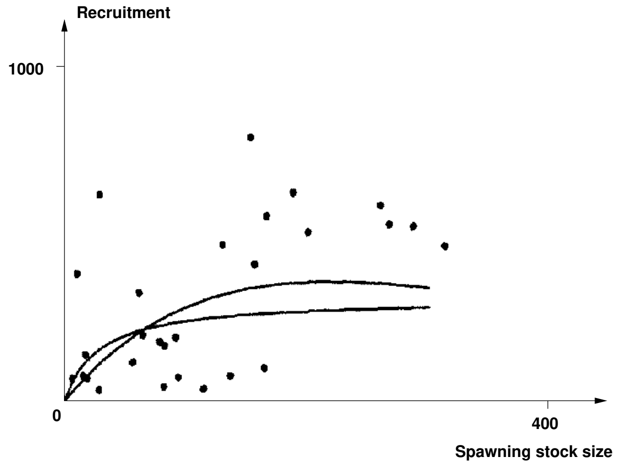


FIG. E.12 *Example of a Ricker and a Beverton and Holt curve fitting Icelandic summer spawning herring data [3,p276]*

In order to understand better the phenomena involved, we modelise the dynamics of the pre-recruits (eggs, larvae, juveniles,...), taking into account the hypotheses made by Ricker and Beverton and Holt to build their stock-recruitment relations. Our model is simple, with rough dynamics on the stock but a more detailed and realistic approach of the pre-recruits dynamics. In this article, we will consider a constant fishing effort, included in the global mortality term.

2 Model and properties

The model we have built is a time continuous stage-structured model. The $(n+1)$ stages are represented by their abundance X_i, the first stage X_0 being the pre-recruits stage. The structure of the model is described in figure E.13.

$$\dot{X}_0(t) = \underbrace{-\alpha X_0(t)}_{\text{aging}\rightarrow 1} + \frac{1}{\varepsilon}\overset{[*]}{\left[\underbrace{-m_0 X_0(t)}_{\text{lin. mort.}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_i l_i X_i(t)}_{\text{eggs } i\rightarrow 0} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i X_i(t) X_0(t)}_{\text{predation of } i\rightarrow 0} - \underbrace{p_0 X_0(t)^2}_{\text{competition}}\right]} \quad \text{(E.16)}$$

$$\dot{X}_i(t) = \underbrace{\alpha X_{i-1}(t)}_{\text{aging } i-1\rightarrow i} - \underbrace{\alpha X_i(t)}_{\text{aging } i\rightarrow i+1} - \underbrace{m_i X_i(t)}_{\text{lin. mort.}} \qquad (i = 1, \dots, n) \quad \text{(E.17)}$$

m_i	:	linear mortality rate
α	:	linear aging coefficient
p_0	:	juvenile competition parameter
f_i	:	fecundity rate of class i
l_i	:	reproduction efficiency of class i
p_i	:	predation parameter of class i on class 0
ε	:	$\varepsilon = 1$ (one time scale) or $0 < \varepsilon \ll 1$ (two time scales)

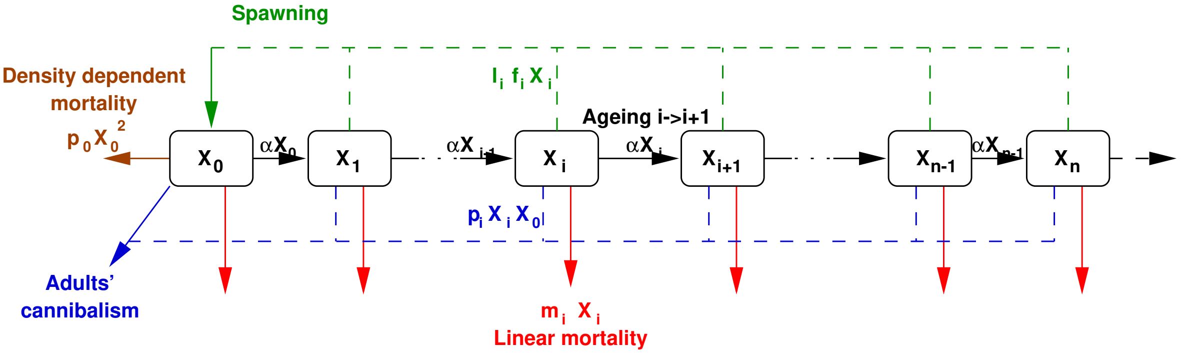


FIG. E.13 *Structure of the model*

Description of the model

Each stage i is subject to "external" mortality, due to fishing or "natural" causes, i.e. anything except human harvest and intra-specific effects. We suppose it to be linear (constant rates m_i), which means that the proportion of fish in class i dying from "external causes" per unit of time is independent of time. The aging process is also linear; the fish go in and out of each stage i ($i = 1, \dots, n$) in the same way, with a constant rate α; but in this case, the rate doesn't depend on i. This means that the mean residence time in a stage: $\frac{1}{\alpha}$, is the same for all i ($i = 1, \dots, n$). So we could consider the stages 1 to n to be age classes.

The dynamics of class 0 are more complicated. From this very simple linear system, we add to the pre-recruits stage a spawning term and specific mortalities terms. These specific dynamics of class 0 reflect the assumptions made by Ricker (cannibalism) and Beverton and Holt (competition among the juveniles) when elaborating their stock-recruitment models. The cannibalism term $(p_i X_i X_0)$ is expressed as a Lotka-Volterra predation term between class i and class 0. The term $(p_0 X_0^2)$ can be interpreted in a limited environment as an intra-stage competition for food and space.

The laying of eggs is supposed to be continuous in time: this assumption is quite reasonable, as the spawning season of a species is sometimes badly known. It may occur more than once a year and even during the whole year (case of the tropical seas, where there are almost no seasons). The total number of eggs introduced in the 0-stage is equal to the sum of the eggs produced by class i: $(f_i l_i X_i)$ (per unit of time); where f_i represents the proportion of mature individuals in stage i and l_i the mean number of eggs produced by such an individual per unit of time .

There are possibly two time scales in this model. When $\varepsilon \ll 1$, the terms in the square brackets $[*]$ in (E.16) evolve faster than the rest of the system. This expresses that the processes bounded to the juveniles $(i = 0)$ are faster and bigger than those of the stock. Considering that the juveniles are more vulnerable than the adults and that the spawn is large, this assumption is reasonable.

If $\varepsilon = 1$, the model is a classical differential system with a single time scale. In this case, we can consider that 0 is also an age class. This is impossible if we introduce a second time scale in the juveniles dynamics.

Positivity of the variables

This model makes no sense for negative values of X_i. The structure of the model however ensures that if the initial abundances are non-negative, they will remain non-negative in the course of time.

Let us consider that at time t, the abundance of age class i: X_i, is zero and that the other abundances are non-negative. Its derivative, given by (E.17), is then:

$$\dot{X}_i(t) = \alpha X_{i-1}(t)$$

If $X_{i-1}(t) = 0$, as long as X_{i-1} remains zero, X_i will remain zero too. But if $X_{i-1}(t) > 0$, X_i increases and becomes positive. So at time $t + \delta t$ (δt being small), either X_i remains zero, or it is positive. In neither case it becomes negative.

Equilibria

There is one trivial equilibrium: $X_0^* = X_1^* = X_2^* = \cdots = X_n^* = 0$. It corresponds to an extinct population and is therefore not very interesting.

It is possible to have another non-trivial equilibrium if the following assumptions are verified:

$$\left|\begin{array}{l} p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} f_i l_i \pi_i > \alpha\varepsilon + m_0 \\ \qquad \text{with: } \pi_i = \frac{\alpha^i}{\prod_{j=1}^{i}(\alpha + m_j)} \end{array}\right.$$

This means that there must be at least one non-linearity in the system, the non-linear coefficients being the p_i $(i = 0, \ldots, n)$, and that the spawning coefficient must be big enough so as to avoid extinction. In that case we have the following positive equilibrium:

$$\left\{\begin{array}{lcl} X_0^* & = & \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i f_i \pi_i - m_0 - \alpha\varepsilon}{p_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i \pi_i} \\ X_i^* & = & \pi_i X_0^* \end{array}\right.$$

Two time scales hypothesis

Considering the system (E.16,E.17) as a superposition of the rapid dynamics ($\dot{X}_0 = [*]$) and the slow (the rest of (E.16,E.17)), its behaviour is the following:

1. *Rapid phase:* First, the rapid dynamics are predominant, so the state $(X_0, \ldots, X_n)$ hurries towards the so-called "slow surface" ($[*] = 0$), which corresponds to the equilibrium of this subsystem.

2. *Slow phase:* Then there is a slow evolution in the neighbourhood of the slow surface, governed by the slow dynamics. A good approximation of this evolution is given by:

$$\left[p_0 X_0(t)^2 + \left(m_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i X_i(t)\right) X_0(t) - \sum_{i=1}^{n} f_i l_i X_i(t)\right] = 0 \qquad \text{(E.18)}$$

$$\dot{X}_i(t) = \alpha X_{i-1}(t) - \alpha X_i(t) - m_i X_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad \text{(E.19)}$$

The equation (E.18) gives $X_0(t)$ as an implicit function of the $X_i(t)$s. Because of the structure of our model, X_0 only appears in $\dot{X}_1$. So provided we know this equation (E.18), we only need to study a reduced linear system (E.19) (one dimension less, same equation as (E.17)), with a non-linear closed loop input $X_0(t)$.

The mathematical background of these results is referred to as the *singular perturbations* field [6].

3 A stock-recruitment relationship?

From the model described above, we try to extract a stock-recruitment function and compare it with the reference forms. The recruitment is the input in the first class of the stock X_1; a stock-recruitment relationship links this input to the number of mature females, the spawning stock. So we need to represent the instantaneous recruitment:

$$R(t) = \alpha X_0(t)$$

as a function of the spawning stock at this same time:

$$X_s(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i X_i(t).$$

Recruitment is said to be instantaneous here because it is a number per unit of time.

We first take a simple numerical example showing that we cannot extract a single stock-recruitment function from this particular model, so we then try to refine our hypotheses in order to recover known stock-recruitment shapes.

3.1 In general: no stock-recruitment function

For a given set of parameters (cf. table E.1), we first run a few simulations so as to plot $R(t)$ as a function of $X_s(t)$.

These parameters are more or less realistic. Mortalities m_i are set to 0.2 for the stock but m_0 is bigger as the juveniles are more vulnerable than the adults. The fecundities are 0.5 or 0, which means that in mature stages, half of the fishes are females ready to breed. The other coefficients just make sense.

We chose a very simple scheme:

– Class 0: juveniles.

– Class 1: young immature adults; no reproduction, no cannibalism.

– Classes 2,3,4: mature adults; same predation rate on class 0, same proportion of mature females but different reproductive rates ($l_2 < l_4 < l_3$).

For $\varepsilon = 0.01$, we can consider that we have two time scales. But we run our simulations with the complete system (E.16,E.17). We notice on the curves we obtain, that the curves all first rapidly go to a certain region of the graph (rapid phase) and then slowly evolve in this area (slow phase). This is consistent with the two time scales theory described in the previous section.

Subscript:	0	1	2	3	4
α	0.79				
ε	0.01				
m	0.5	0.2	0.2	0.2	0.2
p	0.2	0	0.1	0.1	0.1
f		0	0.5	0.5	0.5
l		0	10	20	15

TAB. E.1 *Parameter values associated with the example*

We obtain for instance the following curves (E.14), all parametrised by time. We notice that in this example:

– The “stock-recruitment relationship” is not a mathematical function: to a given spawning stock correspond several possible recruitments, $R = \varphi(X_s)$ is not defined in a unique way.

– It strongly depends on the initial conditions; several repartitions in the stock stages allow the same initial point on the graph: (X_s, R), but lead to different evolution of the spawning stock and the recruitment.

So this example shows that it is generally impossible to extract a stock-recruitment function from our model.

3.2 How can we find a stock-recruitment function?

The only way to extract a stock-recruitment function, in a strict mathematical sense, is to make the following very strong assumptions:
– very fast and significant pre-recruits dynamics ($\varepsilon \ll 1$);
– for each $i \in \{1, \dots, n\}$: (a) $f_i = f, l_i = l$ and $p_i = p$; or (b) $f_i = l_i = p_i = 0$;
i.e. for a given age i, either the fecundity, reproductive and predation rates are zero (b) or they take the common values f, l and p (a). So we only consider the evolution of the system in the slow phase and we can separate the stock in two: the pre-recruits interactive ages (a) and the neutral ages (b).

We assume that l and f are not zero, otherwise there is no breeding and the population becomes extinct; any stock-recruitment function is then reduced to the zero point.

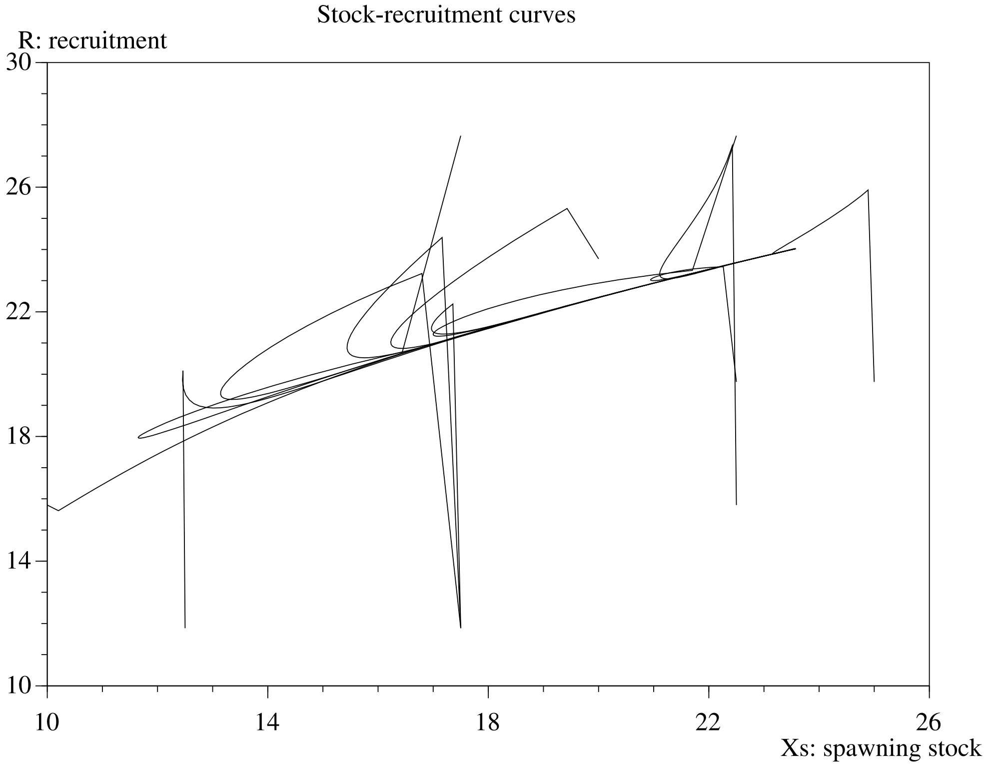


FIG. E.14 *Stock-recruitment curves obtained with model (E.17,E.16)*

Depending on the values of p_0 and p, we can obtain different stock-recruitment forms :

1. If $p \neq 0$ and $p_0 = 0$, it is exactly a Beverton and Holt curve (cf. figure E.11):

$$R = \frac{lX_s}{m_0 + \frac{p}{f}X_s}$$

   We notice that if $m_0 = 0$, there is constant recruitment.

2. If $p = 0$ and $p_0 \neq 0$, the recruitment doesn't saturate anymore; it is a square root-like increasing function.

3. If $p \neq 0$ and $p_0 \neq 0$, we obtain a curve which is similar to the Beverton and Holt model: a strictly increasing and bounded curve.

4. If $p = 0$ and $p_0 = 0$, which only leaves the linear mortality to the pre-recruits and makes the system entirely linear, the stock-recruitment relation is linear as well.

We will discuss these results and compare them with the classical shapes in the following section.

4 Discussion

Comments

Under the hypotheses related to our model, there is no functional stock-recruitment relationship. This doesn't mean there is no relationship at all between those two entities. Summarising the juvenile part of the fishes' life cycle, from the egg until the recruitment, which is what a stock-recruitment function does, actually implies strong uniformity assumptions.

In our case, it requires two scales of time and almost reduces our stock to two groups of individuals, that only differ by their mortality coefficient m_i:

– *Superclass 1:* The spawners who also predate their progeniture ($l_i = l, f_i = f, p_i = p$).

– *Superclass 2:* The others who don't interact with the juveniles ($l_j = f_j = p_j = 0$).

We discuss below the different types of curve we obtain under these assumptions, in the same order as in section 3.2:

1. With *cannibalism and no competition*, we exactly obtain a Beverton and Holt curve; but these assumptions rather reflect the ones made by Ricker for his stock-recruitment model.

2. With *competition and no cannibalism*, i.e rather Beverton and Holt's hypotheses, there is no upper bound on the recruitment, which steadily increases with the size of the spawning stock. This doesn't correspond to any classical stock-recruitment curve.

3. With *competition and cannibalism*, the curve is similar to that of Beverton and Holt. So we notice that in order to obtain an increasing and bounded stock-recruitment relationship, we need to have cannibalism on the pre-recruits.

4. With *no competition and no cannibalism*, the relationship between spawning stock and recruitment is linear; this could correspond to unlimited habitat and food for the pre-recruits, and separate territories for the adults and the juveniles (so no cannibalism). The introduction of limitations on food or habitat would only slow down the recruitment, but would not bound it.

In neither case we obtain a Ricker-like stock-recruitment curve (cf. figure E.11). There is no way to find a decreasing recruitment for high values of the spawning stock.

We would like to point out that the perturbations due to the environment and influencing the recruitment have been neglected in this model. But it is still possible to obtain an apparently "randomly" distributed pattern of stock-recruitment points (X_s, R), as shown in figure E.15, proceeding from a deterministic time continuous model. To obtain this figure we did some measurements of the spawning stock and the recruitment at discrete times, for different simulations of the same model (different initial conditions) defined in table E.1.

It is not deterministic chaos as it sometimes happens in discrete or continuous dynamic models [7,8], but the projection of various trajectories, stemming from a "simple" almost linear system, on a particular plane. In figure E.16, the evolution of the abundance of age class 2 is plotted along time for the different simulations used in figure E.15; these trajectories are not chaotic.

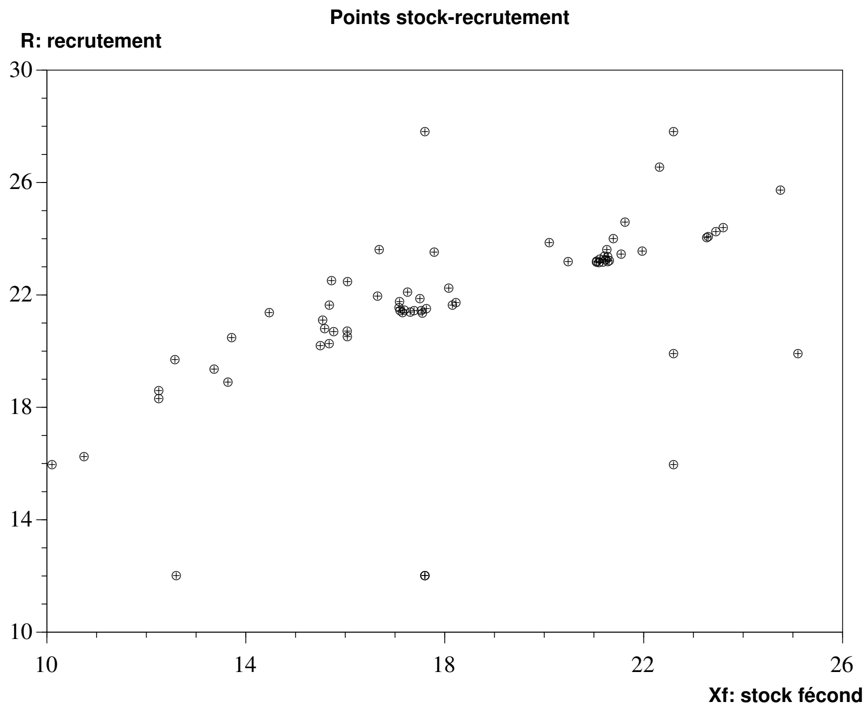


FIG. E.15 *Stock-recruitment points obtained with model (E.17,E.16)*

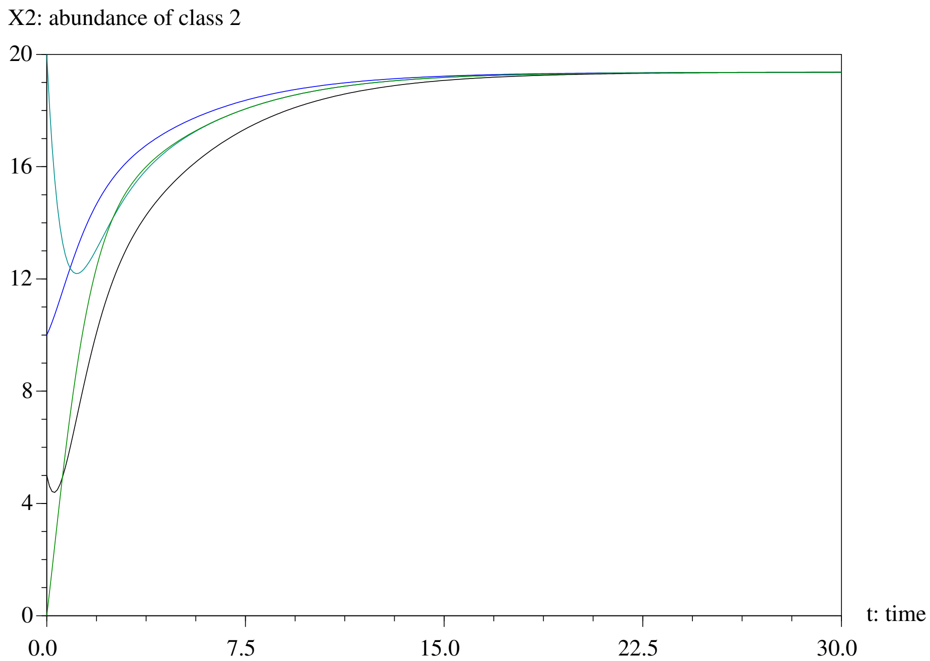


FIG. E.16 *Abundance of age class 2 for some simulations used in figures E.14 and E.15*

Extensions

Further to these considerations, we intend to improve the model by adding a control term to the system and trying to adjust it on structured data. In order to integrate the fishing aspect in a more dynamic way, it is possible to introduce an external control on the mortality, in terms of a fishing effort $E(t)$, such that:

$$m_i = m'_i + q_i E(t)$$

where m'_i is the natural mortality rate and q_i the catchability of stage i.

Moreover, it is possible to introduce a seasonal effect on the spawning terms, by the means of an exogenous periodic variable, allowing the eggs to be laid only during a certain period of the year. Outside this period, there would be no entry in the pre-recruits stage 0.

References

[1] C.W. Clark, *Mathematical bioeconomics: the optimal management of renewable resources* (Wiley, New York, 1976).

[2] A. Laurec and J-C. Le Guen, IFREMER tech. rep. 45, Nantes France (1981).

[3] R. Hilborn and C.J. Walters, *Quantitative fisheries stock assessment: choice, dynamics & uncertainty* (Chapman & Hall, New York, 1992).

[4] R.J.H. Beverton and S.J. Holt, *On the dynamics of exploited fish populations* (Chapman & Hall, New York, 1993). First edition 1957.

[5] W.E. Ricker, J. Fish. Res. Board Can. 11 (1954) 559.

[6] H.K. Khalil, *Nonlinear systems* (Macmillan, New York, 1992).

[7] R.M. May, Nature 261 (1976) 459.

[8] R.M. Nisbet and W.S.C. Gurney, *Modelling fluctuating populations* (Wiley, New York, 1982).

Résumé

Le but de cette thèse est d'appliquer des outils issus de l'automatique pour résoudre des problèmes associés à la gestion de pêcherie. Elle s'articule selon deux axes : la modélisation et le contrôle.

Nous avons établi et étudié un modèle de population halieutique structuré en stades. L'accent a été mis sur le bouclage d'un tel modèle, de la reproduction au recrutement dans la phase exploitable. Ce bouclage est réalisé soit explicitement, en modélisant la ponte et le développement des pré-recrutés ; soit grâce à une fonction non autonome très générale entre le stock fécond et le recrutement. Nous avons montré que ces deux approches permettent des comportements plus riches que l'utilisation de relations stock-recrutement classiques. En outre, une étude de stabilité de ces modèles a été menée, par des méthodes issues des systèmes coopératifs et grâce au critère du cercle. Par ailleurs, un système de pêcherie plus complet est présenté, sous forme d'un modèle fonctionnel décrivant les étapes intervenant de l'élaboration des stratégies de gestion aux captures.

Un modèle global a été retenu pour mener une étude de régulation d'un stock exploité. Nous avons cherché à contrôler la pêche, de manière à réduire les fluctuations de la capture et de l'effort de pêche. Ainsi, on garantit aux pêcheurs des revenus et des coûts relativement stables. Deux techniques sont employées : le contrôle optimal pour dégager des tendances sur un stock précis, le flétan du Pacifique ; l'approche par «domaine invariant», plus robuste et permettant de déterminer des stratégies de gestion admissibles, selon l'état de la pêcherie. Pour plus de vraisemblance, le comportement du pêcheur, dicté par des contraintes de rentabilité, est pris en compte dans la modélisation.

Mots-clés : modélisation, contrôle, automatique, gestion de pêcherie, dynamique des populations, modèle structuré en stades, relation stock-recrutement.

Abstract

The aim of this thesis is to apply tools from the control theory in order to solve problems relating to fishery management. It is composed of a modelling phase and a control phase.

We have built and studied a stage-structured model for a fish population. Emphasis is laid on the way the loop is closed, from reproduction to recruitment in the exploitable phase. This feedback is achieved either explicitly, through the modelling of the laying of eggs and development of the pre-recruits, or by a very general and non autonomous function, which associates the recruitment to the spawning stock. We have shown that these two approaches are less restrictive on the system behaviour than he classical stock-recruitment relationships. Furthermore, the stability of these models has been studied, using methods stemming from cooperative systems or the circle criterion. Finally, a more complete fishery system is presented by means of a functional model describing the steps which occur from the elaboration of management strategies to the harvest.

A production model has been chosen for a regulation study on a harvested stock. We have tried to control the fishery in order to reduce the fluctuations of catch and fishing effort. It thereby guarantees the fishermen relatively stable yields and costs. Two techniques have been used: optimal control so as to draw tendencies for a particular stock, the Pacific halibut; the “invariant domain” approach, which is more robust and allows the determination of admissible management strategies, depending on the state of the fishery. For greater likelihood, the behaviour of the fishermen, governed by profit constraints, is taken into account in the model.

Key words: modelling, control theory, fishery management, population dynamics, stage-structured model, stock-recruitment relationship.