Couplage temporel et géométrique

Algorithmes pour les couplages temporels

Timothé Picavet, ENS de Lyon, timothe.picavet@ens-lyon.fr
Ngoc-Trung Nguyen, HCMUE, trungnn@hcmue.edu.vn
Binh-Minh Bui-Xuan, LIP6 Paris, buixuan@lip6.fr

15 Novembre 2020

Pourquoi le γ-matching ?

Pour répondre à :

- Comment maximiser le nombre de collaborations entre personnes ?

Pourquoi le γ-matching ?

Pour répondre à :

- Comment maximiser le nombre de collaborations entre personnes ?
- Qui travaille ensemble sur des projets par email ? Ou quels véhicules roulent ensemble durant un certain temps ?

Pourquoi le γ-matching ?

Pour répondre à :

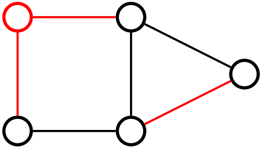
- Comment maximiser le nombre de collaborations entre personnes ?
- Qui travaille ensemble sur des projets par email ? Ou quels véhicules roulent ensemble durant un certain temps ?
- Comment optimiser la consommation de carburant en co-vol avec Fello'fly (Airbus) ?

Le problème du couplage statique

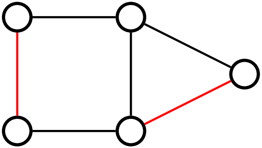
- Graphes non orientés classiques

Le problème du couplage statique

- Graphes non orientés classiques
- Les arêtes du couplage n'ont pas de sommet en commun



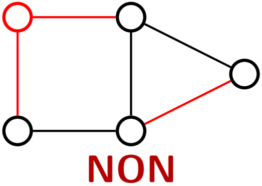
NON

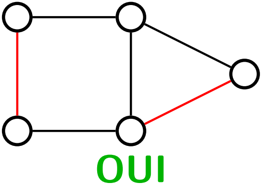


OUI

Le problème du couplage statique

- Graphes non orientés classiques
- Les arêtes du couplage n'ont pas de sommet en commun

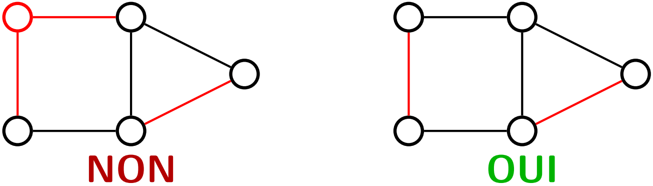




- Problème MATCHING : couplage de taille maximale

Le problème du couplage statique

- Graphes non orientés classiques
- Les arêtes du couplage n'ont pas de sommet en commun



- Problème MATCHING : couplage de taille maximale
- Analogie des collaborateurs :
  - Sommets : Collaborateur
  - Arête si deux personnes peuvent compléter une tâche
  - But : Compléter le plus de tâches
- Résolution en temps polynomial (ex : Edmonds)

Comment étendre le problème au temps ?

Définition (link stream)

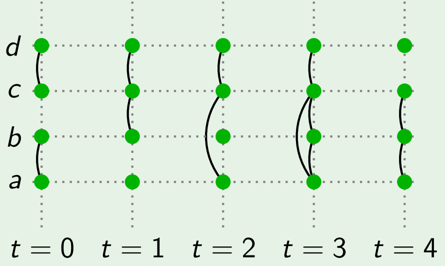
C'est $L = (T, V, E)$ où

- V est l'ensemble des sommets
- T est l'ensemble des instants où les arêtes peuvent exister
- $E \subseteq T \times \binom{V}{2}$ est l'ensemble des arêtes

Représente un graphe où les arêtes existent ou non en fonction du temps.

Exemple

$V = \{a, b, c, d\}$
$T = \{0, 1, \ldots, 4\}$



Le couplage temporel

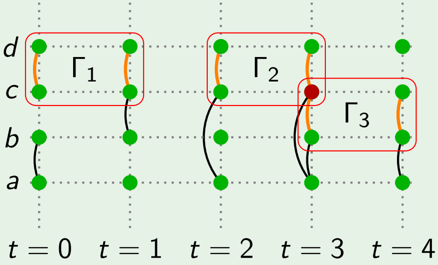
Définition (γ-arête)

Une γ-arête $E_\gamma(t, uv)$ avec u, v des sommets est l'ensemble des arêtes consécutives $\{(t, uv), (t+1, uv), \ldots, (t+\gamma-1, uv)\}$. Γ est une γ-arête de L si $\Gamma \subseteq E$.

Définition (γ-matching)

Ensemble de γ-arêtes n'ayant pas de sommet temporel (de la forme (t, u)) en commun.

Exemple (pour $\gamma = 2$)



NON

Dépendance de Γ_2 et Γ_3

Le couplage temporel

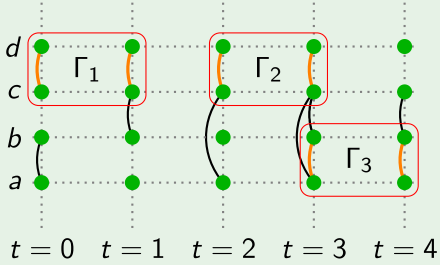
Définition (γ-arête)

Une γ-arête $E_\gamma(t, uv)$ avec u, v des sommets est l'ensemble des arêtes consécutives $\{(t, uv), (t+1, uv), \ldots, (t+\gamma-1, uv)\}$. Γ est une γ-arête de L si $\Gamma \subseteq E$.

Définition (γ-matching)

Ensemble de γ-arêtes n'ayant pas de sommet temporel (de la forme (t, u)) en commun.

Exemple (pour $\gamma = 2$)



OUI

Indépendance de toutes les γ-arêtes

État de l'art de la recherche sur γ-MATCHING

- γ-MATCHING est NP-Complet [1] dès que $\gamma > 1$.
- γ-MATCHING est APX-Complet [2] dès que $\gamma > 1$ et $max(T) > 3$ (sauf si P=NP).
- On ne sait pas vraiment faire mieux qu'une 2-approximation en temps polynomial.

1. *Temporal matching in link stream : kernel and approximation*, J. Baste and B.-M. Bui-Xuan, CTW, 2018
2. *Computing Maximum Matchings in Temporal Graphs*, George B. Mertzios et al., STACS, 2020

Résultats

- Algorithme exact FPT en $O^*((\gamma + 1)^{|V|})$
- PTAS pour les unit ball link stream de densité et vitesse bornée

Qu'est-ce qu'un Unit Ball Graph (UBG) ?

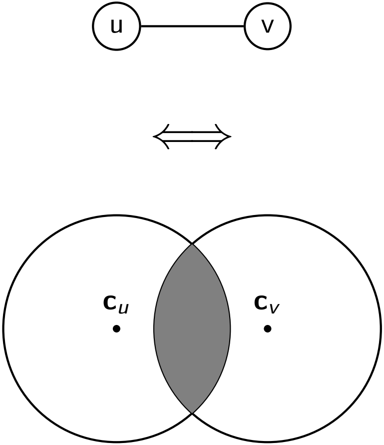
- Représentation géométrique :
  cercles de diamètre 1

Qu'est-ce qu'un Unit Ball Graph (UBG) ?

- Représentation géométrique : cercles de diamètre 1
- Sommets : boules euclidiennes de dimension d
  - $d = 1$ Intervalles
  - $d = 2$ Disques

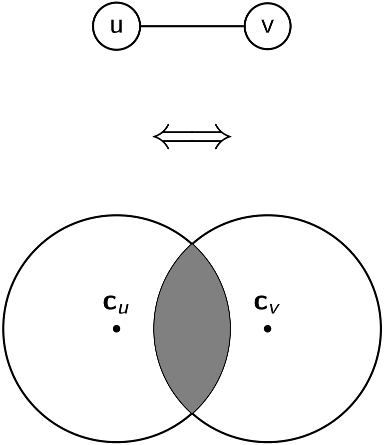
Qu'est-ce qu'un Unit Ball Graph (UBG) ?

- Représentation géométrique : cercles de diamètre 1
- Sommets : boules euclidiennes de dimension d
  - $d = 1$ Intervalles
  - $d = 2$ Disques
- Arête si intersection : $\|\mathbf{c}_u - \mathbf{c}_v\| \leq 1$



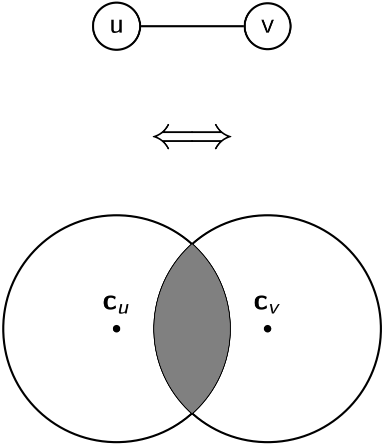
Qu'est-ce qu'un Unit Ball Graph (UBG) ?

- Représentation géométrique : cercles de diamètre 1
- Sommets : boules euclidiennes de dimension d
  - $d = 1$ Intervalles
  - $d = 2$ Disques
- Arête si intersection : $\|\mathbf{c}_u - \mathbf{c}_v\| \leq 1$
- Link stream : $\mathbf{c}_u(t)$



Qu'est-ce qu'un Unit Ball Graph (UBG) ?

- Représentation géométrique : cercles de diamètre 1
- Sommets : boules euclidiennes de dimension d
  - $d = 1$ Intervalles
  - $d = 2$ Disques
- Arête si intersection : $\|\mathbf{c}_u - \mathbf{c}_v\| \leq 1$
- Link stream : $\mathbf{c}_u(t)$
- Vitesse : $\|\mathbf{c}_u(t) - \mathbf{c}_u(t+1)\| \leq \mathbf{v}$



Structure du γ-line graph

Définition (graphe L_γ)

- $V(L_\gamma) = E_\gamma$
- $\{\Gamma, \Gamma'\} \in E(L_\gamma)$ si Γ, Γ' dépendantes

Structure du γ-line graph

Définition (graphe L_γ)

- $V(L_\gamma) = E_\gamma$
- $\{\Gamma, \Gamma'\} \in E(L_\gamma)$ si Γ, Γ' dépendantes

Proposition

γ-MATCHING sur L $\iff$ MIS sur L_γ

Structure du γ-line graph

Définition (graphe L_γ)

- $V(L_\gamma) = E_\gamma$
- $\{\Gamma, \Gamma'\} \in E(L_\gamma)$ si Γ, Γ' dépendantes

Proposition

γ-MATCHING sur L $\iff$ MIS sur L_γ

Définition (centre)

Pour $\Gamma = E_\gamma(t, uv)$,

$\mathbf{c}_\Gamma = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{c}_u(t) + \mathbf{c}_v(t))$

$\overline{\mathbf{c}_\Gamma} = \frac{1}{1+(\gamma-1)\mathbf{v}} \cdot \mathbf{c}_\Gamma$.

Structure du γ-line graph

Définition (graphe L_γ)

- $V(L_\gamma) = E_\gamma$
- $\{\Gamma, \Gamma'\} \in E(L_\gamma)$ si Γ, Γ' dépendantes

Proposition

γ-MATCHING sur L $\iff$ MIS sur L_γ

Définition (centre)

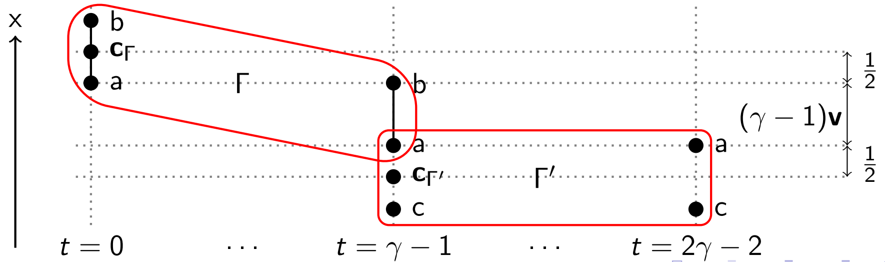
Pour $\Gamma = E_\gamma(t, uv)$,

$\mathbf{c}_\Gamma = \frac{1}{2}\cdot(\mathbf{c}_u(t)+\mathbf{c}_v(t))$

$\overline{\mathbf{c}_\Gamma} = \frac{1}{1+(\gamma-1)\mathbf{v}} \cdot \mathbf{c}_\Gamma$.

Lemme

$\|\mathbf{c}_\Gamma - \mathbf{c}_{\Gamma'}\| > 1 + (\gamma - 1)\boldsymbol{v} \implies \Gamma, \Gamma'$ *indépendantes*



Structure du γ-line graph

Définition (graphe L_γ)

- $V(L_\gamma) = E_\gamma$
- $\{\Gamma, \Gamma'\} \in E(L_\gamma)$ si Γ, Γ' dépendantes

Proposition

γ-MATCHING sur L $\iff$ MIS sur L_γ

Définition (centre)

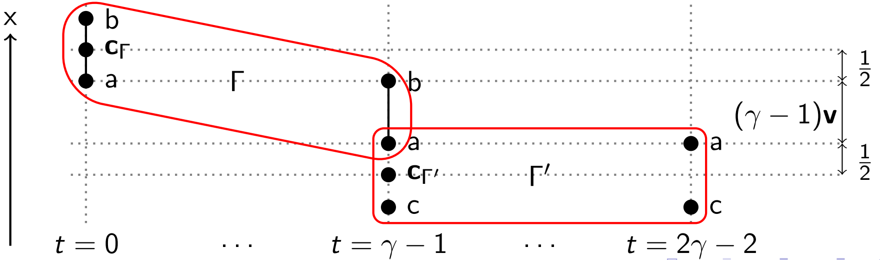
Pour $\Gamma = E_\gamma(t, uv)$,

$\mathbf{c}_\Gamma = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{c}_u(t) + \mathbf{c}_v(t))$

$\overline{\mathbf{c}_\Gamma} = \frac{1}{1+(\gamma-1)\mathbf{v}} \cdot \mathbf{c}_\Gamma$.

Lemme

$\|\overline{\mathbf{c}_\Gamma} - \overline{\mathbf{c}_{\Gamma'}}\| > 1 \implies \Gamma, \Gamma'$ *indépendantes*



Définition (γ-line graph normalisé, L'_γ)

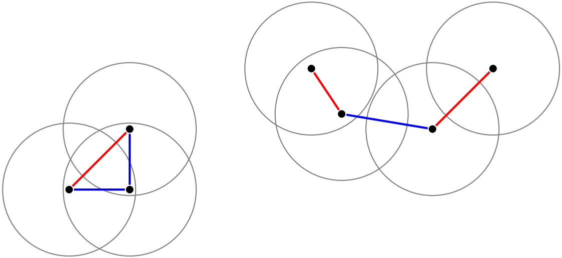
C'est le unit ball graph dont la représentation géométrique est l'ensemble des $\overline{\mathbf{c}_\Gamma}$.

Définition (γ-line graph normalisé, L'_γ)

C'est le unit ball graph dont la représentation géométrique est l'ensemble des $\overline{\mathbf{c}_\Gamma}$.

Corollaire

Le γ-line graph normalisé est un unit ball graph ayant le γ-line graph comme sous-graphe partiel.
Un ensemble indépendant du 1er graphe est un ensemble indépendant du 2ème graphe.



γ-line graph $\subseteq$
γ-line graph normalisé

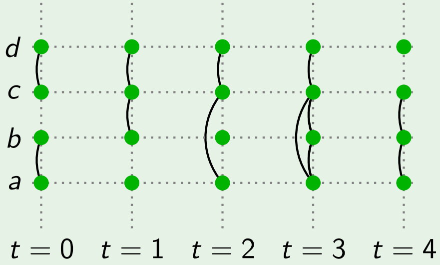
Densité

Définition (Épaisseur θ)

$A_t = \{E_\gamma(t, uv) \in A \mid u \neq v\}$
$\theta(A) = \max\{|A_t| \mid t \in T(L)\}$

Exemple

$\theta = 2$



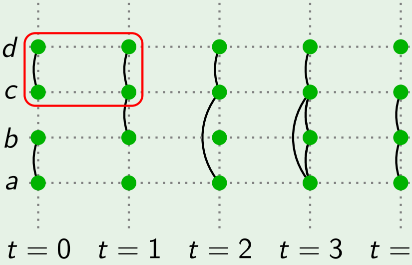
Densité

Définition (Épaisseur θ)

$$A_t = \{E_\gamma(t, uv) \in A \mid u \neq v\}$$
$$\theta(A) = \max\{|A_t| \mid t \in T(L)\}$$

Exemple

$\theta = 2$



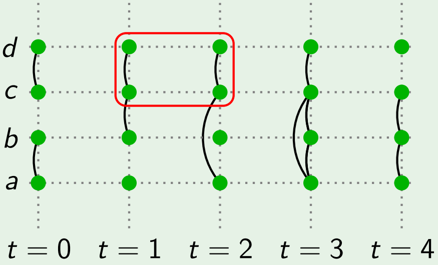
Densité

Définition (Épaisseur θ)

$$A_t = \{E_\gamma(t, uv) \in A \mid u \neq v\}$$
$$\theta(A) = \max\{|A_t| \mid t \in T(L)\}$$

Exemple

$\theta = 2$



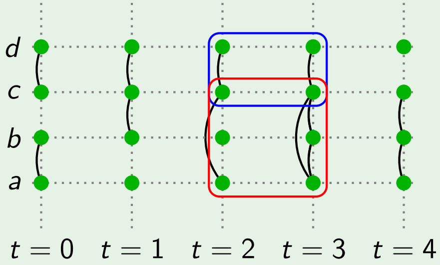
Densité

Définition (Épaisseur θ)

$A_t = \{E_\gamma(t, uv) \in A \mid u \neq v\}$
$\theta(A) = \max\{|A_t| \mid t \in T(L)\}$

Exemple

$\theta = 2$



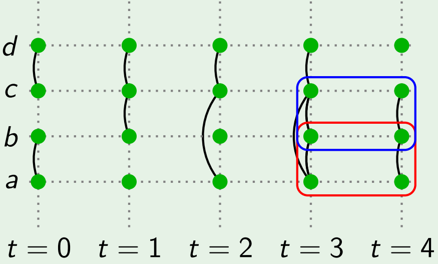
Densité

Définition (Épaisseur θ)

$A_t = \{E_\gamma(t, uv) \in A \mid u \neq v\}$
$\theta(A) = \max\{|A_t| \mid t \in T(L)\}$

Exemple

$\theta = 2$



Densité

Définition (Épaisseur θ)

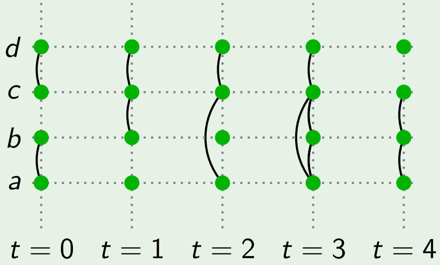
$A_t = \{E_\gamma(t, uv) \in A \mid u \neq v\}$
$\theta(A) = \max\{|A_t| \mid t \in T(L)\}$

Définition (Densité ρ)

A : des γ-arêtes
$\mathcal{H}_d$: les d-cube unitaire (alignés aux axes)
$A_{\mathbf{U}} = \{\Gamma \in A \mid \overline{\mathbf{c}_\Gamma} \in \mathbf{U}\}$
$\rho(A) = \max\{\theta(A_{\mathbf{U}}) \mid \mathbf{U} \in \mathcal{H}_d\}$

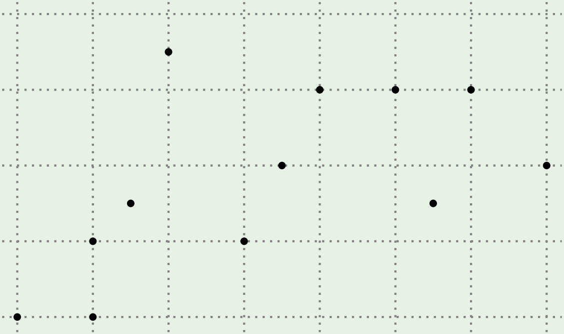
Exemple

$\theta = 2$



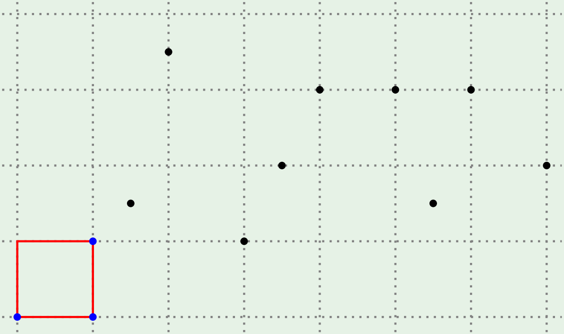
Exemple (densité pour $T = \{0, 1\}$ et $d = 2$)

Les γ-arêtes comment seulement à l'instant 0



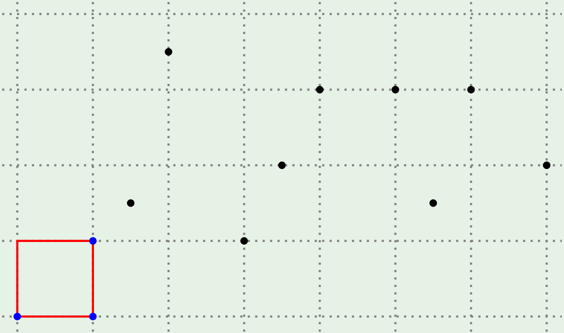
Exemple (densité pour $T = \{0, 1\}$ et $d = 2$)

Les γ-arêtes comment seulement à l'instant 0



Exemple (densité pour $T = \{0, 1\}$ et $d = 2$)

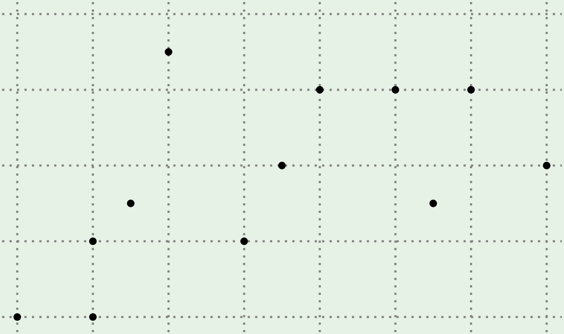
Les γ-arêtes comment seulement à l'instant 0



$$\rho = 3$$

Exemple (densité pour $T = \{0, 1\}$ et $d = 2$)

Les γ-arêtes comment seulement à l'instant 0



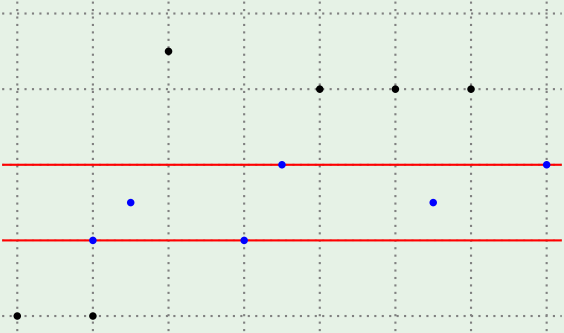
$$\rho = 3$$

Définition (Densité projective ρ_π)

Comme la densité, mais on projette les $\mathbf{c}_\Gamma$ sur l'hyperplan $x = 0$ avant (on oublie la première dimension). $\rho_\pi(A) = \max\{\theta(A_{\mathbf{U}}) \mid \mathbf{U} \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}_{d-1}\}$

Exemple (densité pour $T = \{0, 1\}$ et $d = 2$)

Les γ-arêtes comment seulement à l'instant 0

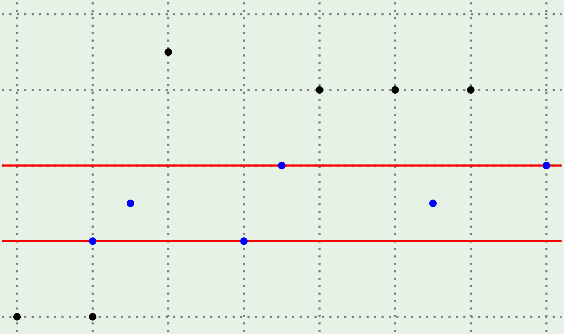


Définition (Densité projective ρ_π)

Comme la densité, mais on projette les $\mathbf{c}_\Gamma$ sur l'hyperplan $x = 0$ avant (on oublie la première dimension). $\rho_\pi(A) = \max\{\theta(A_\mathbf{U}) \mid \mathbf{U} \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}_{d-1}\}$

Exemple (densité pour $T = \{0, 1\}$ et $d = 2$)

Les γ-arêtes comment seulement à l'instant 0



$$\rho_\pi = 6$$

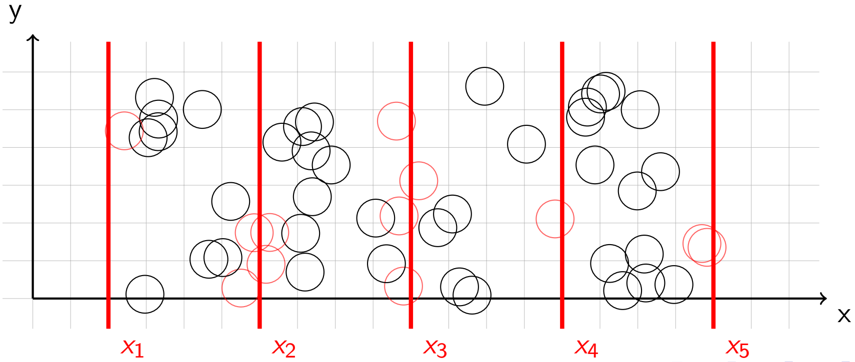
Définition (Densité projective ρ_π)

Comme la densité, mais on projette les $\mathbf{c}_\Gamma$ sur l'hyperplan $x = 0$ avant (on oublie la première dimension). $\rho_\pi(A) = \max\{\theta(A_\mathbf{U}) \mid \mathbf{U} \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}_{d-1}\}$

- *Chemin de décomposition* : ensemble X de réels dans l'ordre croissant $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{|X|}\}$

- *Chemin de décomposition* : ensemble X de réels dans l'ordre croissant $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{|X|}\}$
- *Partition incomplète de A par X* : $P_X(A) = (P_0(A), P_1(A), \ldots, P_{|X|}(A))$
  - $P_0(A) = \{\Gamma \in A \mid \overline{\mathbf{x}_\Gamma} < x_1 - \frac{1}{2}\}$
  - $\forall 0 < i < |X|$, $P_i(A) = \{\Gamma \in A \mid x_i + \frac{1}{2} \leq \overline{\mathbf{x}_\Gamma} < x_{i+1} - \frac{1}{2}\}$
  - $P_{|X|}(A) = \{\Gamma \in A \mid x_{|X|} + \frac{1}{2} \leq \overline{\mathbf{x}_\Gamma}\}$

- *Chemin de décomposition* : ensemble X de réels dans l'ordre croissant $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{|X|}\}$
- *Partition incomplète de A par X* : $P_X(A) = (P_0(A), P_1(A), \ldots, P_{|X|}(A))$
  - $P_0(A) = \{\Gamma \in A \mid \overline{\mathbf{x}_\Gamma} < x_1 - \frac{1}{2}\}$
  - $\forall 0 < i < |X|$, $P_i(A) = \{\Gamma \in A \mid x_i + \frac{1}{2} \leq \overline{\mathbf{x}_\Gamma} < x_{i+1} - \frac{1}{2}\}$
  - $P_{|X|}(A) = \{\Gamma \in A \mid x_{|X|} + \frac{1}{2} \leq \overline{\mathbf{x}_\Gamma}\}$



Lemme

Soit $m_\gamma = |E_\gamma|$. Pour $f_L \geq \rho$ assez grand, on peut calculer un chemin de décomposition $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{|X|}\}$, tel que la partition ("indépendante") incomplète $P_X(E_\gamma)$ satisfait :

- $P_0(E_\gamma) = P_{|X|}(E_\gamma) = \emptyset$,

Lemme

Soit $m_\gamma = |E_\gamma|$. *Pour* $f_L \geq \rho$ *assez grand, on peut calculer un chemin de décomposition* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{|X|}\}$, *tel que la partition ("indépendante") incomplète* $P_X(E_\gamma)$ *satisfait :*

- $P_0(E_\gamma) = P_{|X|}(E_\gamma) = \emptyset$,
- $\forall 0 < i < |X| - 1$, $f_L \leq \rho_\pi(P_i(E_\gamma)) < f_L + \rho$,

Lemme

Soit $m_\gamma = |E_\gamma|$. Pour $f_L \geq \rho$ assez grand, on peut calculer un chemin de décomposition $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{|X|}\}$, tel que la partition ("indépendante") incomplète $P_X(E_\gamma)$ satisfait :

- $P_0(E_\gamma) = P_{|X|}(E_\gamma) = \emptyset$,
- $\forall 0 < i < |X| - 1$, $f_L \leq \rho_\pi(P_i(E_\gamma)) < f_L + \rho$,
- $0 \leq \rho_\pi(P_{|X|-1}(E_\gamma)) < f_L + \rho$,

Lemme

Soit $m_\gamma = |E_\gamma|$. Pour $f_L \geq \rho$ assez grand, on peut calculer un chemin de décomposition $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{|X|}\}$, tel que la partition ("indépendante") incomplète $P_X(E_\gamma)$ satisfait :

- $P_0(E_\gamma) = P_{|X|}(E_\gamma) = \emptyset$,
- $\forall 0 < i < |X| - 1$, $f_L \leq \rho_\pi(P_i(E_\gamma)) < f_L + \rho$,
- $0 \leq \rho_\pi(P_{|X|-1}(E_\gamma)) < f_L + \rho$,
- $x_{|X|} - x_{|X|-1} \geq \frac{f_L}{\rho}$.

Le calcul est polynomial en m_γ.

Idée de preuve.

D'abord, on trie $A = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{m_\gamma}\}$ pour que $\overline{x_{\Gamma_1}} < \overline{x_{\Gamma_2}} < \cdots < \overline{x_{\Gamma_{m_\gamma}}}$. On définit $x_i = \overline{\mathbf{x}_{\Gamma_1}} - 1$. On va créer les $P_i(E_\gamma)$ itérativement. On scanne les $\overline{x_\Gamma}$ dans l'ordre croissant, et on crée une nouvelle $P_i(E_\gamma)$ quand sa densité projective de la partition actuelle dépasse f_L. Sinon, on agrandit la sous-partition. Pour tout i, $\rho_\pi(P_i(E_\gamma)) < f_L + \rho$. $\square$

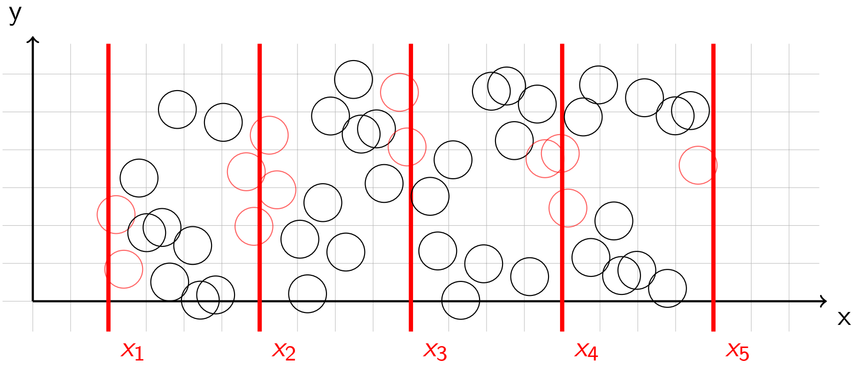
Algorithme de calcul de $\rho(A)$

1 $\rho \leftarrow 0$
    // Each C_i is a normalized center of a γ-edge of A
2 **for** $(C^1, C^2, \ldots, C^d) \in \{\overline{\mathbf{c}_\Gamma} \mid \Gamma \in A\}^d$ **do**
    // We consider the unit hypercube $\mathbf{H}$ with C_i^i as its i-th lowest coordinate
3 $\mathbf{H} \leftarrow [C_1^1, C_1^1 + 1] \times \cdots \times [C_d^d, C_d^d + 1]$
4 $\rho \leftarrow \max\{\rho, \theta(A_{\mathbf{H}})\}$
5 **return** ρ

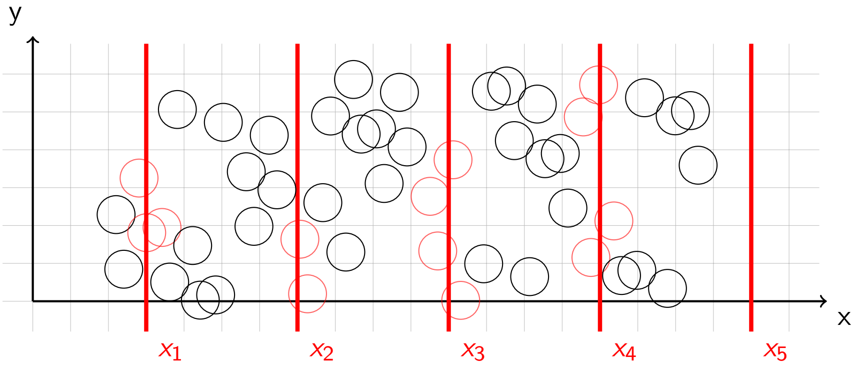
Diminue la dimension en contrôlant la densité des sous-divisions.

$\implies$ PTAS sur les unit ball link stream de densité bornée.

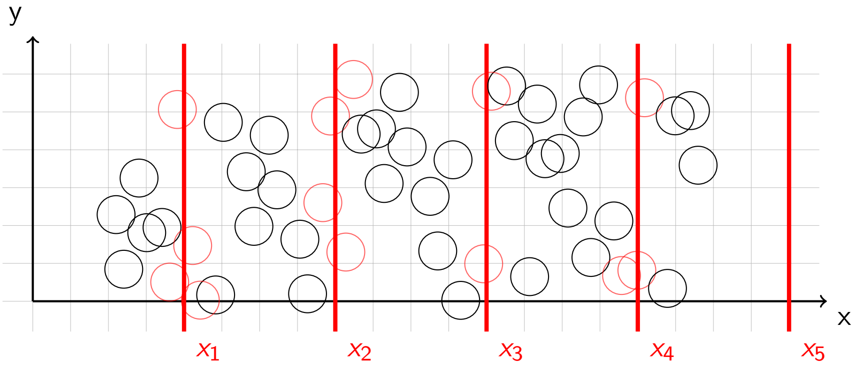
Obtention de l'approximation (calcul récursif)



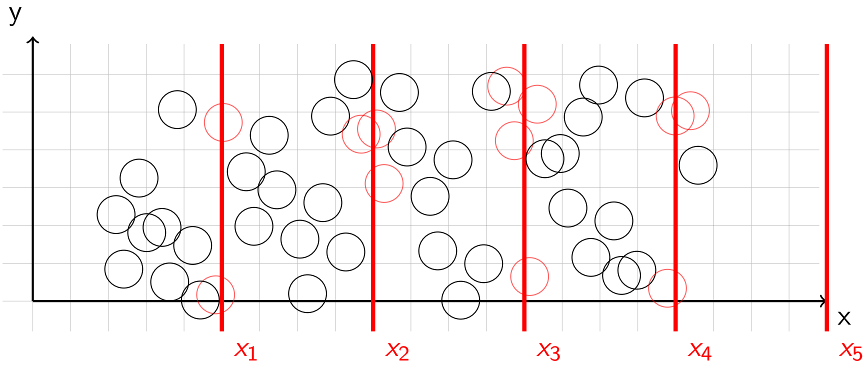
Obtention de l'approximation (calcul récursif)



Obtention de l'approximation (calcul récursif)



Obtention de l'approximation (calcul récursif)



On garde la meilleure approximation

Conclusion et perspectives

- Algorithme exact FPT en $O^*((\gamma + 1)^{|V|})$

1. *Computing Maximum Matchings in Temporal Graphs*, George B. Mertzios et al., STACS, 2020

Conclusion et perspectives

- Algorithme exact FPT en $O^*((\gamma+1)^{|V|})$
- Introduction du γ-line graph et du γ-line graph normalisé

1. *Computing Maximum Matchings in Temporal Graphs*, George B. Mertzios et al., STACS, 2020

Conclusion et perspectives

- Algorithme exact FPT en $O^*((\gamma+1)^{|V|})$
- Introduction du γ-line graph et du γ-line graph normalisé
- PTAS pour les unit ball link stream de densité bornée

1. *Computing Maximum Matchings in Temporal Graphs*, George B. Mertzios et al., STACS, 2020

Conclusion et perspectives

- Algorithme exact FPT en $O^*((\gamma+1)^{|V|})$
- Introduction du γ-line graph et du γ-line graph normalisé
- PTAS pour les unit ball link stream de densité bornée
- NP-Complétude de $\gamma - \textit{matching}$ sur les unit ball link stream de densité bornée ?

1. *Computing Maximum Matchings in Temporal Graphs*, George B. Mertzios et al., STACS, 2020

Conclusion et perspectives

- Algorithme exact FPT en $O^*((\gamma+1)^{|V|})$
- Introduction du γ-line graph et du γ-line graph normalisé
- PTAS pour les unit ball link stream de densité bornée
- NP-Complétude de $\gamma-$ *matching* sur les unit ball link stream de densité bornée ?
- Mais pas beaucoup d'espoir :
- Temporal Matching est NP-complet [1] même si $\gamma = 2$ et si le graphe sous-jacent est chemin

1. *Computing Maximum Matchings in Temporal Graphs*, George B. Mertzios et al., STACS, 2020

Merci de votre attention !

Résolution du problème γ-MATCHING par programmation dynamique

Théorème

γ-MATCHING *est résoluble en temps* $O(|E| + |V|^2 + |E_\gamma|(\gamma+1)^{|V|})$.

- E_γ est l'ensemble des γ-arêtes.
- On procède par programmation dynamique.
- $M(t, A_1, A_2, \ldots, A_\gamma)$ stocke un γ-matching maximum de la restriction du link stream L aux instants 0 à $t+\gamma-1$, où on enlève les arêtes adjacentes aux sommets temporels $(t+i-1, u)$ pour $u \in A_i$.
- Intuitivement, les sommets des A_i sont adjacents à des γ-arêtes déjà choisies.

Formule de programmation dynamique :

$$M(-1, A_1, A_2, \ldots, A_\gamma) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2, \ldots, A_\gamma) =$$
$$\max\left(\left\{M(t-1, \emptyset, A_1, A_2, ..., A_{\gamma-1})\right\} \cup \right.$$
$$\left.\left\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2, A_3, \ldots, A_\gamma) \middle| \Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin \bigcup_{i=1}^{\gamma} A_i\right\}\right)$$

Théorème

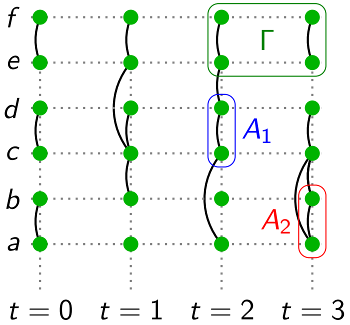
La formule donnée ci-dessus est correcte. $M(t_{max} - \gamma + 1, \emptyset, \ldots, \emptyset)$ *est un* γ*-matching maximum.*

Explications :

$M(t-1, \emptyset, A_1, A_2, ..., A_{\gamma-1})$:
On ne choisit pas d'autre γ-arête à l'instant t.

$\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2, A_3, \ldots, A_\gamma)$:
pour $\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L$ une γ-arête avec $u, v \notin \bigcup_{i=1}^{\gamma} A_i$.
On choisit une γ-arête Γ à l'instant t qui n'a pas de sommet temporel dans $\bigcup_{i=1}^{\gamma} A_i$.

$\gamma = 2$
Calcul de $M(2, \{c, d\}, \{a, b\})$.

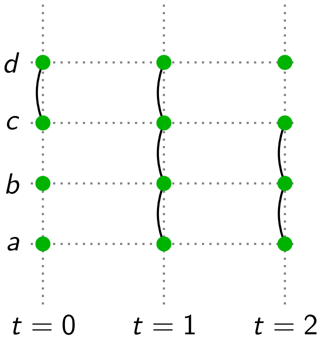


Γ est la seule γ-arête disponible.

Démonstration.

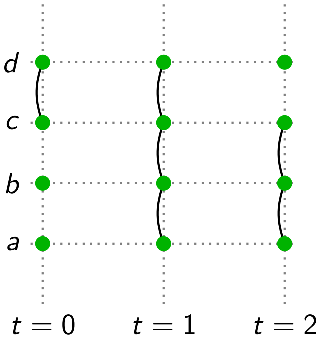
Assez longue... Sur un exemple avec $\gamma = 2$? □

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



$$M(1, \emptyset, \emptyset) =$$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{M(0, \emptyset, \emptyset),$$

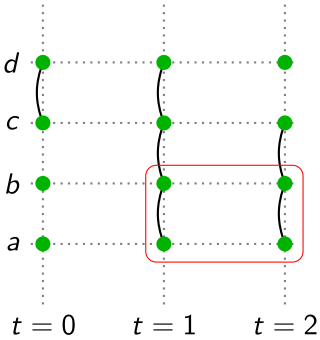
$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$

$$M(t, A_1, A_2) =$$

$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$

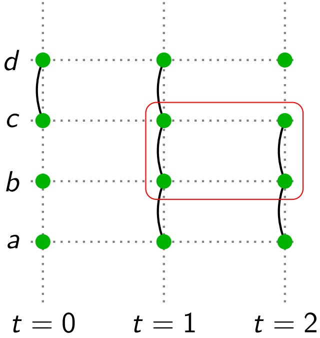
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$

$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



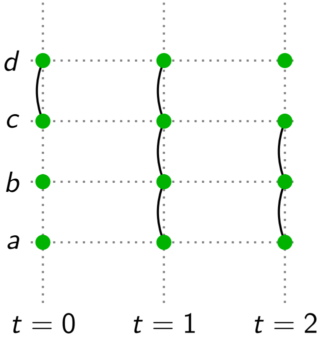
$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{M(0, \emptyset, \emptyset), 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset),$$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



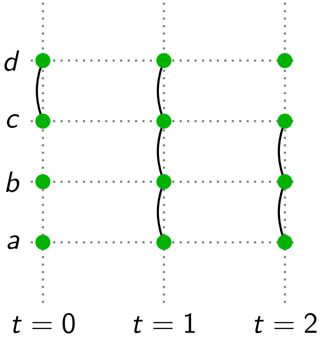
$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{M(0, \emptyset, \emptyset), 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



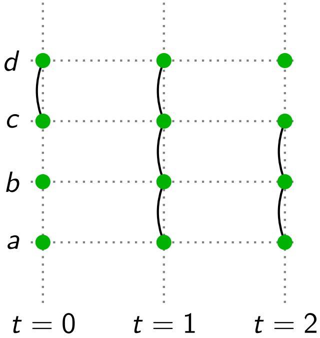
$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{M(0, \emptyset, \emptyset), 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(0, \emptyset, \emptyset) = \max\{$$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\}\cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



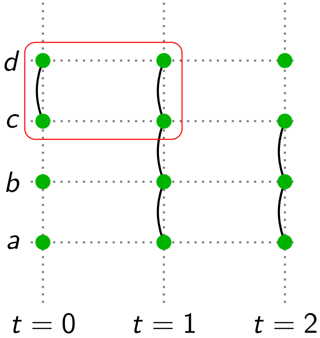
$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{M(0, \emptyset, \emptyset), 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(0, \emptyset, \emptyset) = \max\{M(-1, \emptyset, \emptyset)$$

$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$
$M(t, A_1, A_2) =$
$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$
$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$
$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$



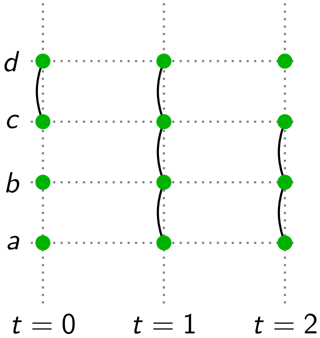
$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{M(0, \emptyset, \emptyset), 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$
$M(0, \emptyset, \emptyset) = \max\{0,$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



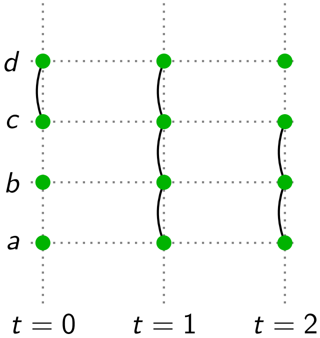
$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{M(0, \emptyset, \emptyset), 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(0, \emptyset, \emptyset) = \max\{0, {\color{red}1 + M(0, \{c, d\}, \emptyset)}\}$$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



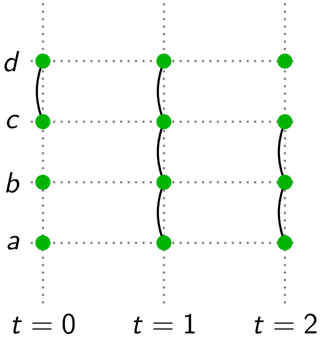
$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{M(0, \emptyset, \emptyset), 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(0, \emptyset, \emptyset) = \max\{0, 1 + M(0, \{c, d\}, \emptyset)\}$$
$$M(0, \{c, d\}, \emptyset) =$$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{M(0, \emptyset, \emptyset), 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(0, \emptyset, \emptyset) = \max\{0, 1 + M(0, \{c, d\}, \emptyset)\}$$
$$M(0, \{c, d\}, \emptyset) = M(-1, \emptyset, \{c, d\})$$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{M(0, \emptyset, \emptyset), 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(0, \emptyset, \emptyset) = \max\{0, 1 + M(0, \{c, d\}, \emptyset)\}$$
$$M(0, \{c, d\}, \emptyset) = 0$$

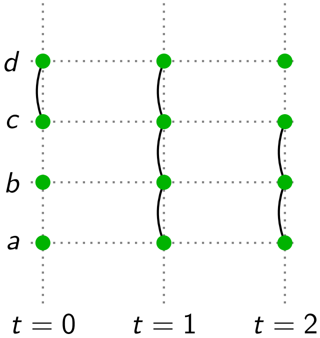
$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$

$M(t, A_1, A_2) =$

$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$

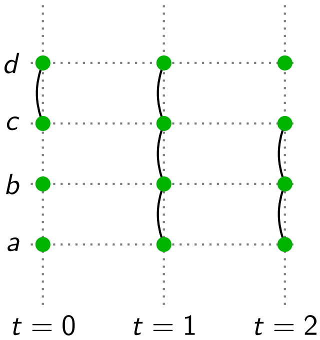
$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$

$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$



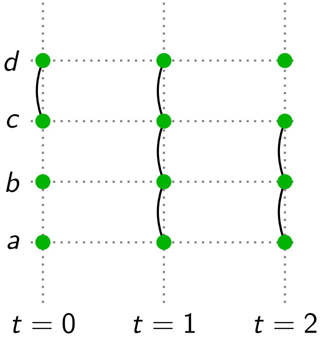
$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{M(0, \emptyset, \emptyset), 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$
$M(0, \emptyset, \emptyset) = \max\{0, 1 + 0\}$
$M(0, \{c, d\}, \emptyset) = 0$

$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$
$M(t, A_1, A_2) =$
$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$
$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$
$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$



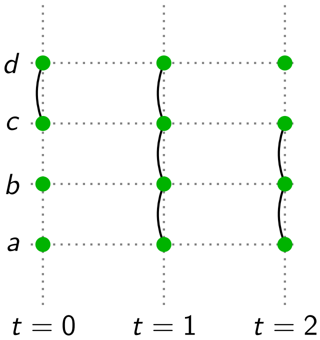
$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{M(0, \emptyset, \emptyset), 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$
$M(0, \emptyset, \emptyset) = 1$

$$
\begin{aligned}
&M(-1, A_1, A_2) = \emptyset \\
&M(t, A_1, A_2) = \\
&\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup \\
&\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid \\
&\qquad \Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})
\end{aligned}
$$



$$
M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{1, 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}
$$
$$
M(0, \emptyset, \emptyset) = 1
$$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{1, 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(1, \{a, b\}, \emptyset) =$$

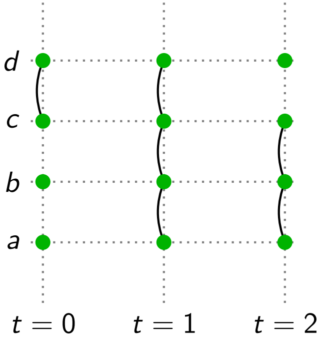
$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$

$M(t, A_1, A_2) =$

$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$

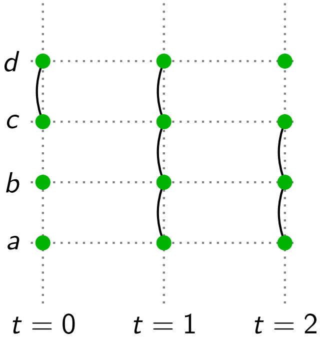
$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$

$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$



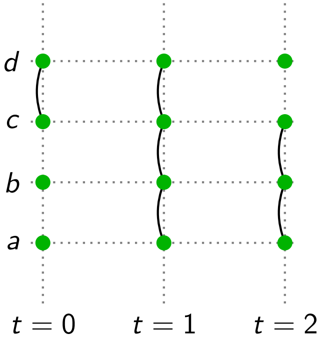
$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{1, 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$
$M(1, \{a, b\}, \emptyset) = M(0, \emptyset, \{a, b\})$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



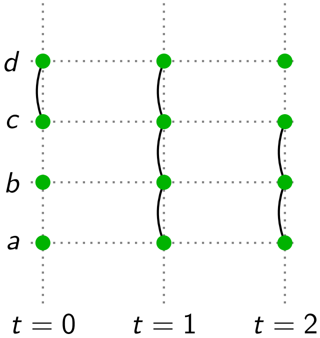
$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{1, 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(1, \{a, b\}, \emptyset) = M(0, \emptyset, \{a, b\})$$
$$M(0, \emptyset, \{a, b\}) = \max\{$$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



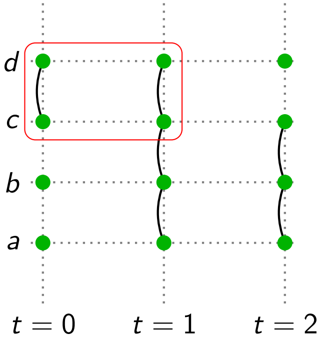
$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{1, 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(1, \{a, b\}, \emptyset) = M(0, \emptyset, \{a, b\})$$
$$M(0, \emptyset, \{a, b\}) = \max\{M(-1, \emptyset, \emptyset)$$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



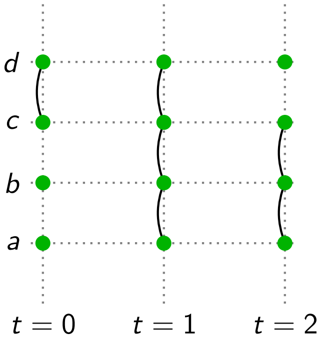
$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{1, 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(1, \{a, b\}, \emptyset) = M(0, \emptyset, \{a, b\})$$
$$M(0, \emptyset, \{a, b\}) = \max\{0$$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



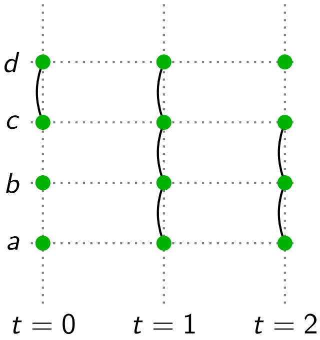
$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{1, 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(1, \{a, b\}, \emptyset) = M(0, \emptyset, \{a, b\})$$
$$M(0, \emptyset, \{a, b\}) = \max\{0, 1 + M(0, \{c, d\}, \{a, b\})\}$$

$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$
$M(t, A_1, A_2) =$
$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$
$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$
$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$



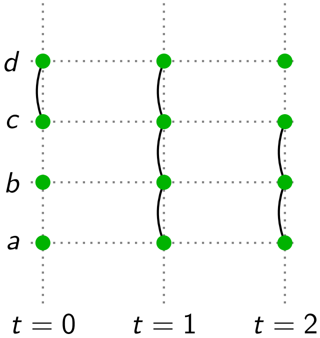
$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{1, 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(1, \{a, b\}, \emptyset) = M(0, \emptyset, \{a, b\})$$
$$M(0, \emptyset, \{a, b\}) = \max\{0, 1 + M(0, \{c, d\}, \{a, b\})\}$$
$$M(0, \{c, d\}, \{a, b\}) = M(-1, \emptyset, \{c, d\}) = 0$$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



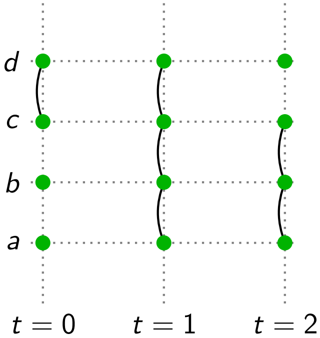
$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{1, 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(1, \{a, b\}, \emptyset) = M(0, \emptyset, \{a, b\})$$
$$M(0, \emptyset, \{a, b\}) = \max\{0, 1 + 0\}$$
$$M(0, \{c, d\}, \{a, b\}) = M(-1, \emptyset, \{c, d\}) = 0$$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



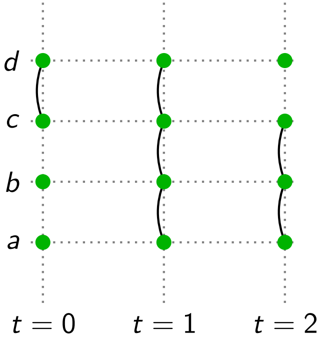
$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{1, 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(1, \{a, b\}, \emptyset) = M(0, \emptyset, \{a, b\})$$
$$M(0, \emptyset, \{a, b\}) = 1$$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



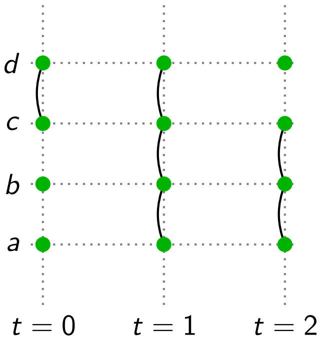
$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{1, 1 + M(1, \{a, b\}, \emptyset), 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(1, \{a, b\}, \emptyset) = 1$$
$$M(0, \emptyset, \{a, b\}) = 1$$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



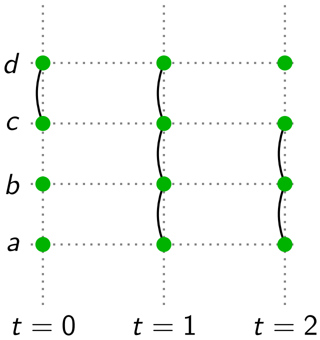
$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{1, 2, 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(1, \{a, b\}, \emptyset) = 1$$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



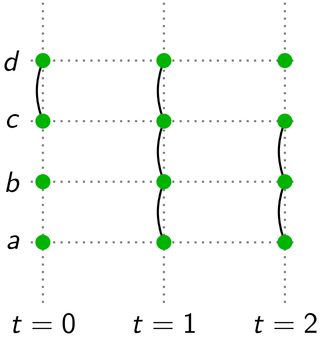
$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{1, 2, 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(1, \{b, c\}, \emptyset) =$$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{1, 2, 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(1, \{b, c\}, \emptyset) = M(0, \emptyset, \{b, c\})$$

$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$
$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{1, 2, 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$$
$$M(1, \{b, c\}, \emptyset) = M(0, \emptyset, \{b, c\}) = M(-1, \emptyset, \emptyset)$$

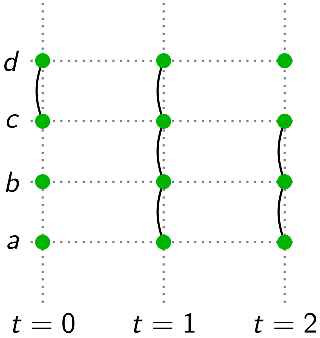
$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$

$M(t, A_1, A_2) =$

$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$

$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$

$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$

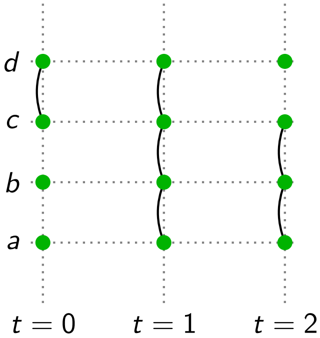


$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{1, 2, 1 + M(1, \{b, c\}, \emptyset)\}$

$M(1, \{b, c\}, \emptyset) = M(0, \emptyset, \{b, c\}) = M(-1, \emptyset, \emptyset) = 0$

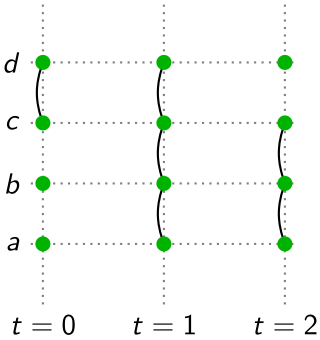
$$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$$

$$M(t, A_1, A_2) =$$
$$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$$
$$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$$
$$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \land u, v \notin A_1 \cup A_2\})$$



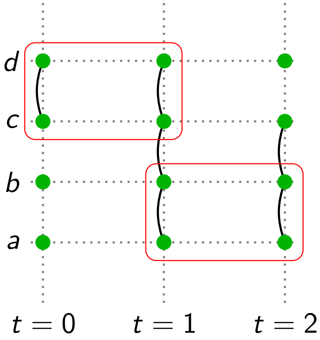
$$M(1, \emptyset, \emptyset) = \max\{1, 2, 1\}$$
$$M(1, \{b, c\}, \emptyset) = M(0, \emptyset, \{b, c\}) = M(-1, \emptyset, \emptyset) = 0$$

$M(-1, A_1, A_2) = \emptyset$
$M(t, A_1, A_2) =$
$\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup$
$\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid$
$\Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})$



$M(1, \emptyset, \emptyset) = 2$

$$
\begin{aligned}
&M(-1, A_1, A_2) = \emptyset \\
&M(t, A_1, A_2) = \\
&\max(\{M(t-1, \emptyset, A_1)\} \cup \\
&\{\{\Gamma\} \cup M(t, A_1 \cup \{u, v\}, A_2) \mid \\
&\qquad \Gamma = E_\gamma(t, u, v) \subseteq L \wedge u, v \notin A_1 \cup A_2\})
\end{aligned}
$$



$M(1, \emptyset, \emptyset) = 2$

Ouf !

Complexité

Lemme

Lorsqu'on appelle $M(t, A_1, A_2, ..., A_\gamma)$, $A_1, A_2, \ldots, A_\gamma$ sont disjoints deux à deux.

Démonstration.

À un moment on aurait $A_1 \cap A_k \neq \emptyset$. Or on ajoute que à A_1 des éléments qui ne sont pas dans A_k. Contradiction. $\square$

Complexité

Lemme

Lorsqu'on appelle $M(t, A_1, A_2, ..., A_\gamma)$, $A_1, A_2, \ldots, A_\gamma$ sont disjoints deux à deux.

Démonstration.

À un moment on aurait $A_1 \cap A_k \neq \emptyset$. Or on ajoute que à A_1 des éléments qui ne sont pas dans A_k. Contradiction. $\square$

Théorème

$M(t - \gamma + 1, \emptyset, \ldots, \emptyset)$ *est calculable en* $O(|E| + |V|^2 + |E_\gamma|(\gamma + 1)^{|V|})$.

Démonstration.

- $|E| + |V|^2$: calcul de toutes les γ-arêtes
- Si il y a $N(t)$ γ-arêtes à l'instant t
- $\displaystyle\sum_{t=0}^{t_{max}-\gamma+1} N(t)(\gamma + 1)^{|V|}$

$\square$