Université Clermont Auvergne, LIMOS

Sur la complexité de l'indépendant dominant avec obligation dans les graphes

Conférence JGA

Christian Laforest, Timothée Martinod

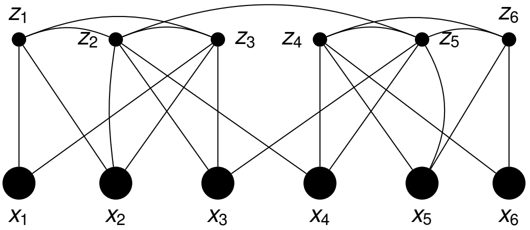
16 Novembre 2020

Indépendant dominant (*ID*)

Donnée : $G = (V, E)$.

Question : $V' \subseteq V$ tel que :

- $V' \cup N(V') = V$: V' est un dominant ;
- $\forall v_1, v_2 \in V', v_1 v_2 \notin E$: V' est indépendant ?

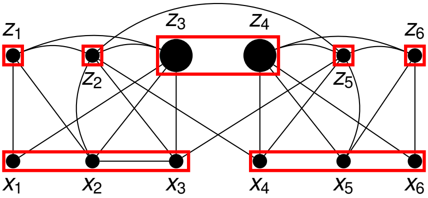


Indépendant dominant avec obligations (*IDO*)

Données : $G = (V, E)$, $\Pi = \{V_1, \ldots, V_l\}$ (partition de V).

Question : $V' \subseteq V$ tel que :

- V' est un dominant ;
- V' est un indépendant ;
- $\forall V_i \in \Pi,\ V_i \cap V' \neq \varnothing \implies V_i \subseteq V'$: V' respecte les obligations Π ?



Indépendant dominant avec obligations (*IDO*)

Données : $G = (V, E)$, $\Pi = \{V_1, \dots, V_l\}$ (partition de V).

Question : $V' \subseteq V$ tel que :

- V' est un dominant ;
- V' est un indépendant ;
- V' respecte les obligations Π ?

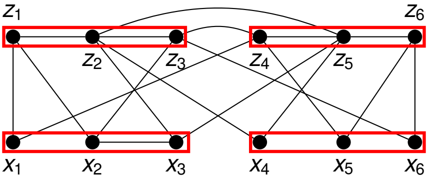


Figure: Une instance sans solution.

Synthèse des résultats

- Indépendant dominant avec obligations : $\mathcal{NPC}$ (2018) [1].

Graphe	Obligation	Complexité
Chemin	**Stable + équilibre** **($\|o\| = \lambda \geq 2$)**	$\mathcal{NPC}$
Diamètre 3	Stable + équilibre ($\|o\| = \lambda \geq 2$)	$\mathcal{NPC}$
Quelconque	Stable + équilibre ($\#o = \sqrt{n}$)	$\mathcal{NPC}$

Table: Synthèse des résultats principaux pour l'existence d'un *IDO*, avec $\#o$ le nombre d'obligations, $|o|$ leur taille, et λ une constante.

IDO dans un chemin

Restricted Exact Cover by 3-Sets

- Restricted Exact Cover by 3-Sets : $\mathcal{NPC}$.

Restricted Exact Cover by 3-Sets (*RX3C*)

Données : $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_{3q}\}$
$\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_{3q}\}$ une collection de triplets de $\mathcal{X}$ telle que chaque élément appartient à <u>exactement</u> trois triplets.

Question : Est-ce qu'il existe une collection $C' \subset \mathcal{C}$ telle que chaque élément de $\mathcal{X}$ apparaît exactement une fois dans les triplets de C' ?

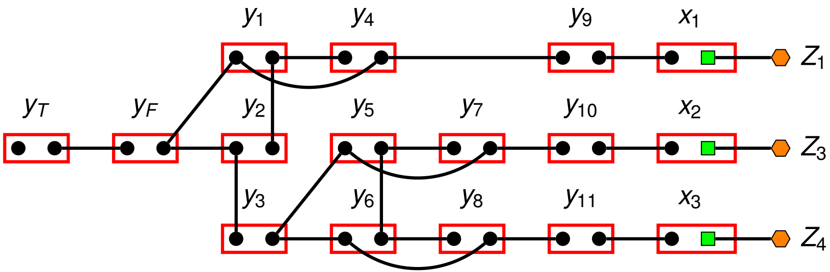


Figure: Gadget pour un élément appartenant aux triplets 1, 3 et 4.

IDO dans un chemin

Construction du gadget d'élément

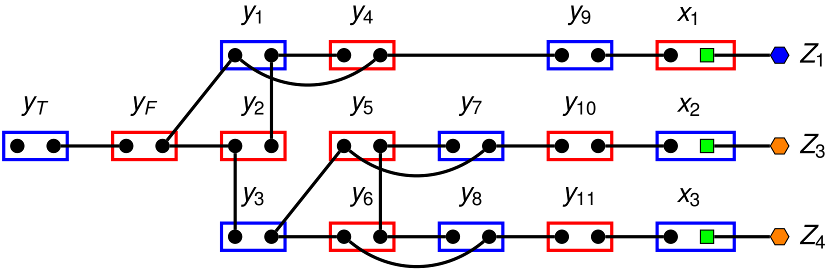


Figure: Z_1 appartient à une solution.

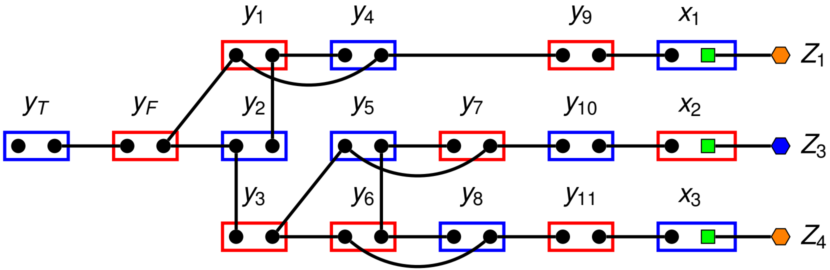


Figure: Z_3 appartient à une solution.

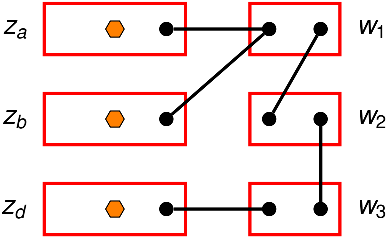
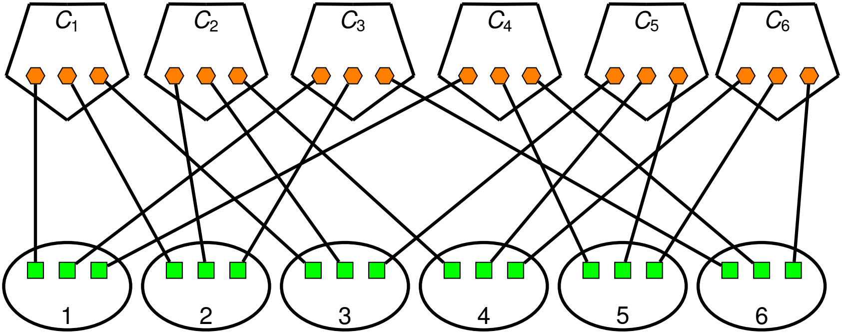


Figure: Gadget pour un triplet.

IDO dans un chemin

Schéma général de la construction

- $\mathcal{X} = \{1, \ldots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,6\}, \{1,5,6\}, \{3,4,5\}, \{4,5,6\}\}$.



- Chaque pentagone représente le gadget de liaison d'un triplet.
- Chaque ellipse représente le gadget interrupteur d'un élément.

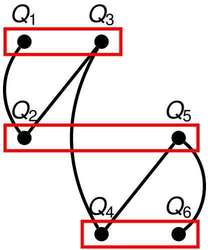


Figure: Un connecteur neutre avec des obligations de taille 2.

IDO dans un chemin
Connecteur neutre

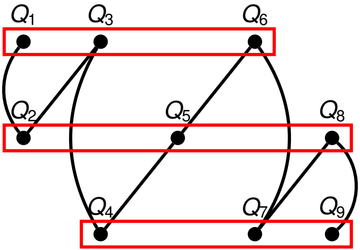


Figure: Un connecteur neutre avec des obligations de taille 3.

Maximiser le nombre de sommets dominés

Indépendant partiellement dominant avec obligations (*PIDO*)

Données : $G = (V, E)$, $\Pi = \{V_1, \ldots, V_l\}$.

Contrainte : $V' \subseteq V$ tel que :

- V' est un indépendant ;
- V' respecte les obligations Π.

Mesure : $|V' \cup N(V')|$: le nombre de sommets de G dominés par V'.

- Domination d'exactement $2(Y-1)$ sommets maximum sur $Y(Y-1)$.

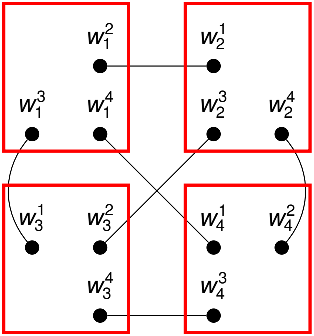


Figure: Illustration de la construction pour $Y = 4$.

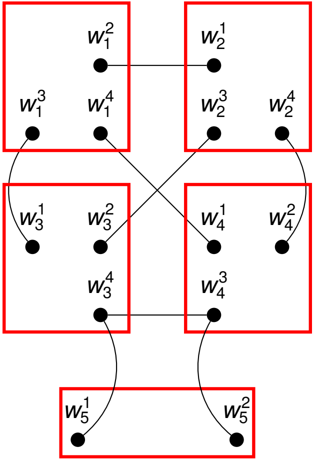
Maximiser le nombre de sommets dominés
Synthèse des résultats

Graphe	Obligation	Nombre de dominés	Complexité
Collection de chemins	Stable	$3\sqrt{n}-2$	$\mathcal{NPC}$
Quelconque	Stable	$2\sqrt{n}-1$	$\mathcal{P}$

Table: Synthèse des résultats principaux pour l'existence d'une solution au *PIDO*.

Maximiser le nombre de sommets dominés

Dominer au moins $2\sqrt{n} - 1$ sommets



- $|o_m| \times \#o \geq n$.
- Si $|o_m| = \#o = \sqrt{n}$:
  - $|o_m| + \#o - 1 = 2\sqrt{n} - 1$.
- Si $|o_m| = \sqrt{n} + \lambda$:
  - $\#o \geq \frac{n}{\sqrt{n}+\lambda} \geq \sqrt{n} - \lambda - 1$.
  - $|o_m| + \#o - 1 \geq 2\sqrt{n} - 1$.

Conclusion

Conclusion

- Le problème de l'IDO est très contraint (*NP*-complet même dans les chemins, pour toute taille d'obligations stables et équilibrées).
- Le nombre de sommets pouvant être dominés par un algorithme polynomial est très proche de sa limite.
- Un rapport reprenant ces résultats est disponible sur HAL [2].

Bibliographie :

[1] A. Cornet and C. Laforest, *Graph Problems with Obligations*, conférence COCOA, LNCS 11346 (2018), 183–197.

[2] C. Laforest and T. Martinod, *On the complexity of Independent Dominant with Obligations in graphs*, hal-02946979, soumis (2020).

Annexe

IDO dans un chemin

Passage à des obligations de taille 3 (interrupteur)

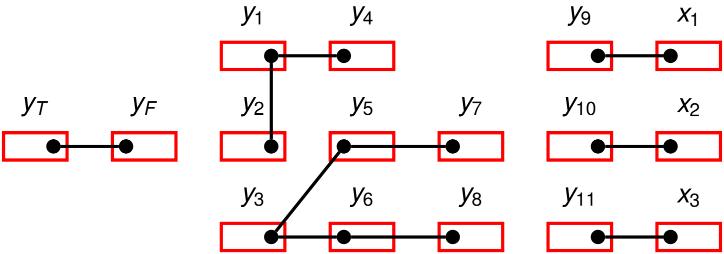


Figure: Illustration de la construction pour un élément quelconque.

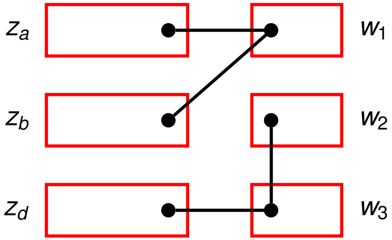


Figure: Illustration de la construction pour un triplet quelconque.

IDO dans un chemin

Un autre exemple de connecteur neutre

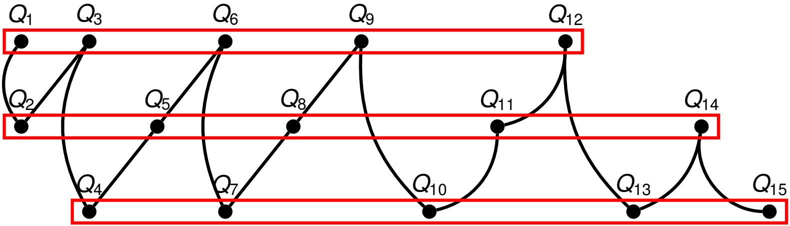


Figure: Un connecteur neutre avec une taille d'obligation de 5.

IDO dans un graphe diamètre 3

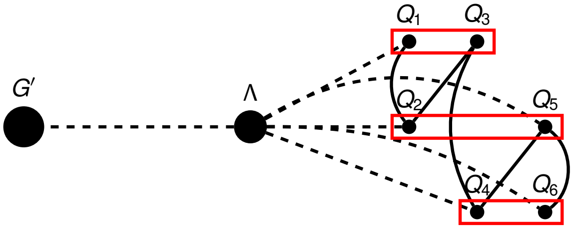


Figure: Illustration du gadget pour obtenir un diamètre 3.