

# Sur la coloration de certains graphes sans trou pair

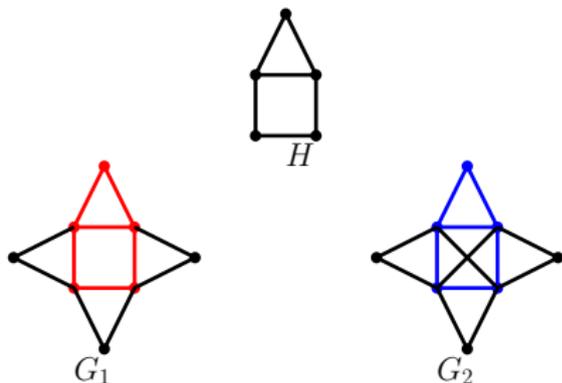
Irena Penev

Université Charles  
Prague, République tchèque

JGA 2020  
16/11/2020

## Définition

Soit  $H$  un graphe. Un graphe  $G$  est dit *sans  $H$*  si aucun sous-graphe induit de  $G$  n'est isomorphe à  $H$ .

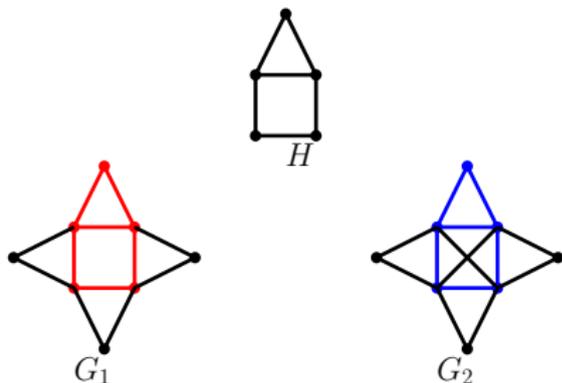


$G_1$  n'est pas sans  $H$ .

$G_2$  est sans  $H$ .

## Définition

Soit  $H$  un graphe. Un graphe  $G$  est dit *sans  $H$*  si aucun sous-graphe induit de  $G$  n'est isomorphe à  $H$ .



$G_1$  n'est pas sans  $H$ .

$G_2$  est sans  $H$ .

## Définition

Soit  $\mathcal{F}$  une famille de graphes. Un graphe  $G$  est dit *sans  $\mathcal{F}$*  si  $G$  est sans  $H$  pour tout  $H \in \mathcal{F}$ .

## Définition

Une classe de graphes  $\mathcal{G}$  est *héréditaire* si pour tout graphe  $G \in \mathcal{G}$  et tout sous-graphe induit  $H$  de  $G$ , la classe  $\mathcal{G}$  contient tout graphe isomorphe à  $H$ .

## Définition

Une classe de graphes  $\mathcal{G}$  est *héréditaire* si pour tout graphe  $G \in \mathcal{G}$  et tout sous-graphe induit  $H$  de  $G$ , la classe  $\mathcal{G}$  contient tout graphe isomorphe à  $H$ .

- Remarque : pour toute famille  $\mathcal{F}$ , la classe de tous les graphes sans  $\mathcal{F}$  est héréditaire.

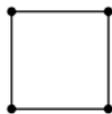
## Définition

Une classe de graphes  $\mathcal{G}$  est *héréditaire* si pour tout graphe  $G \in \mathcal{G}$  et tout sous-graphe induit  $H$  de  $G$ , la classe  $\mathcal{G}$  contient tout graphe isomorphe à  $H$ .

- Remarque : pour toute famille  $\mathcal{F}$ , la classe de tous les graphes sans  $\mathcal{F}$  est héréditaire.
- En fait, une classe  $\mathcal{G}$  est héréditaire ssi il existe une famille  $\mathcal{F}$  t.q.  $\mathcal{G}$  est exactement la classe de tous les graphes sans  $\mathcal{F}$  (exercice).

## Définition

Un *trou* est un cycle de longueur  $\geq 4$ .



$C_4$



$C_5$



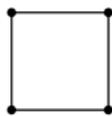
$C_6$



$C_7$

## Définition

Un *trou* est un cycle de longueur  $\geq 4$ .



$C_4$



$C_5$



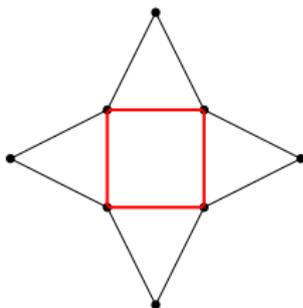
$C_6$



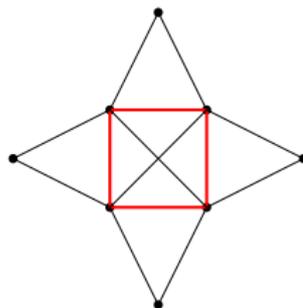
$C_7$

## Définition

Un graphe est dit *cordal* s'il est sans trou.



graphe non-cordal

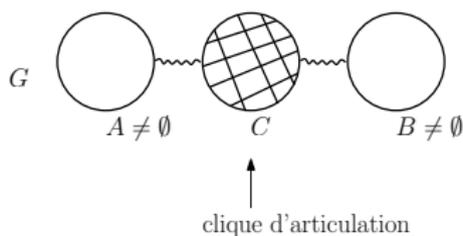


graphe cordal

## Définition

Un *ensemble d'articulation* d'un graphe  $G$  est un ensemble  $C \subsetneq V(G)$  t.q.  $G \setminus C$  n'est pas connexe. Une *clique d'articulation* de  $G$  est une clique de  $G$  qui est un ensemble d'articulation.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>En particulier, si  $G$  n'est pas connexe, alors  $\emptyset$  est une clique d'articulation de  $G$ .



## Théorème de décomposition pour les graphes cordaux [Dirac, 1961]

Soit  $G$  un graphe cordal. Alors  $G$  est complet<sup>a</sup> ou admet une clique d'articulation.

<sup>a</sup>Un graphe est *complet* si ses sommets sont deux à deux adjacents.

## Définition

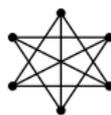
Un *anti-trou* est le complémentaire d'un trou.



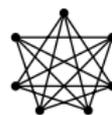
$$\overline{C_4} \cong 2K_2$$



$$\overline{C_5} \cong C_5$$



$$\overline{C_6}$$



$$\overline{C_7}$$

## Définition

Un *anti-trou* est le complémentaire d'un trou.



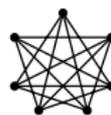
$$\overline{C_4} \cong 2K_2$$



$$\overline{C_5} \cong C_5$$



$$\overline{C_6}$$



$$\overline{C_7}$$

## Définition

Un trou ou anti-trou *pair* ou *impaire* selon la parité de sa longueur.<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>La *longueur* d'un trou ou anti-trou est le nombre de sommets qu'il contient.

- Dans cet exposé, nous considérons les graphes sans trou pair.

- Dans cet exposé, nous considérons les graphes sans trou pair.
- Motivation : les graphes parfaits.

- Dans cet exposé, nous considérons les graphes sans trou pair.
- Motivation : les graphes parfaits.

### Définition

Un graphe  $G$  est *parfait* si tous ses sous-graphes induits  $H$  vérifient  $\chi(H) = \omega(H)$ .

- Dans cet exposé, nous considérons les graphes sans trou pair.
- Motivation : les graphes parfaits.

### Définition

Un graphe  $G$  est *parfait* si tous ses sous-graphes induits  $H$  vérifient  $\chi(H) = \omega(H)$ .

### Définition

Un graphe est dit *de Berge* si ni lui ni son complémentaire ne contiennent de trou impair. Autrement dit, un graphe est *de Berge* s'il est sans (trou impair, anti-trou impair).

- Dans cet exposé, nous considérons les graphes sans trou pair.
- Motivation : les graphes parfaits.

### Définition

Un graphe  $G$  est *parfait* si tous ses sous-graphes induits  $H$  vérifient  $\chi(H) = \omega(H)$ .

### Définition

Un graphe est dit *de Berge* si ni lui ni son complémentaire ne contiennent de trou impair. Autrement dit, un graphe est *de Berge* s'il est sans (trou impair, anti-trou impair).

Le théorème fort des graphes parfaits [Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas, 2002]

Un graphe est parfait ssi il est de Berge.

Le théorème fort des graphes parfaits [Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas, 2002]

Un graphe est parfait ssi il est de Berge.

Le théorème fort des graphes parfaits [Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas, 2002]

Un graphe est parfait ssi il est de Berge.

- Preuve de “tout graphe parfait est de Berge” : exercice.

Le théorème fort des graphes parfaits [Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas, 2002]

Un graphe est parfait ssi il est de Berge.

- Preuve de “tout graphe parfait est de Berge” : exercice.
- Et comment faire pour “tout graphe de Berge est parfait” ?

Le théorème fort des graphes parfaits [Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas, 2002]

Un graphe est parfait ssi il est de Berge.

- Preuve de “tout graphe parfait est de Berge” : exercice.
- Et comment faire pour “tout graphe de Berge est parfait” ?
- L'ingrédient principal de la preuve : un théorème de décomposition pour les graphes de Berge énonçant (en gros) que tout graphe de Berge est “basique” ou admet une “décomposition” (longueur de la preuve : plus de 100 pages).

## Le théorème fort des graphes parfaits [Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas, 2002]

Un graphe est parfait ssi il est de Berge.

- Preuve de “tout graphe parfait est de Berge” : exercice.
- Et comment faire pour “tout graphe de Berge est parfait” ?
- L’ingrédient principal de la preuve : un théorème de décomposition pour les graphes de Berge énonçant (en gros) que tout graphe de Berge est “basique” ou admet une “décomposition” (longueur de la preuve : plus de 100 pages).
- Après, c’est “facile” : on démontre que tout graphe “basique” est parfait et qu’aucun contreexemple minimum n’admet de “décomposition”.
  - Un “contreexemple” serait un graphe de Berge imparfait.
  - Un “contreexemple minimum” serait un contreexemple ayant le plus petit nombre de sommets parmi tous les contreexemples.

- Les graphes de Berge (et donc, les graphes parfaits) peuvent être reconnus en temps polynomial (Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour, Vušković, 2004).

- Les graphes de Berge (et donc, les graphes parfaits) peuvent être reconnus en temps polynomial (Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour, Vušković, 2004).
- Les problèmes de la CLIQUE MAXIMUM, du STABLE MAXIMUM, de la COLORATION et de la PARTITION EN CLIQUES peuvent être résolus en temps polynomial pour les graphes parfaits (Grötschel, Lovász, Schrijver, 1988).

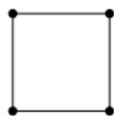
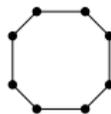
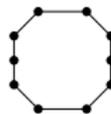
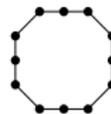
- Les graphes de Berge (et donc, les graphes parfaits) peuvent être reconnus en temps polynomial (Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour, Vušković, 2004).
- Les problèmes de la CLIQUE MAXIMUM, du STABLE MAXIMUM, de la COLORATION et de la PARTITION EN CLIQUES peuvent être résolus en temps polynomial pour les graphes parfaits (Grötschel, Lovász, Schrijver, 1988).
  - Ces algorithmes utilisent directement le fait que  $\chi = \omega$  et non pas les propriétés structurels des graphes parfaits/de Berge.

- Les graphes de Berge (et donc, les graphes parfaits) peuvent être reconnus en temps polynomial (Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour, Vušković, 2004).
- Les problèmes de la CLIQUE MAXIMUM, du STABLE MAXIMUM, de la COLORATION et de la PARTITION EN CLIQUES peuvent être résolus en temps polynomial pour les graphes parfaits (Grötschel, Lovász, Schrijver, 1988).
  - Ces algorithmes utilisent directement le fait que  $\chi = \omega$  et non pas les propriétés structurels des graphes parfaits/de Berge.
  - Donc, ces algorithmes ne sont pas “combinatoire”.

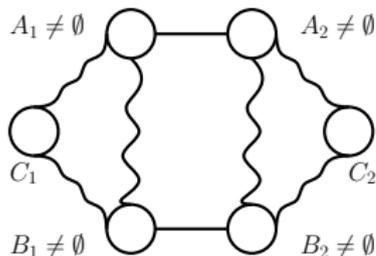
- Les graphes de Berge (et donc, les graphes parfaits) peuvent être reconnus en temps polynomial (Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour, Vušković, 2004).
- Les problèmes de la CLIQUE MAXIMUM, du STABLE MAXIMUM, de la COLORATION et de la PARTITION EN CLIQUES peuvent être résolus en temps polynomial pour les graphes parfaits (Grötschel, Lovász, Schrijver, 1988).
  - Ces algorithmes utilisent directement le fait que  $\chi = \omega$  et non pas les propriétés structurels des graphes parfaits/de Berge.
  - Donc, ces algorithmes ne sont pas “combinatoire”.
  - On ne comprends pas quelles propriétés structurels permettent à construire ces algorithmes.

- Les graphes de Berge (et donc, les graphes parfaits) peuvent être reconnus en temps polynomial (Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour, Vušković, 2004).
- Les problèmes de la CLIQUE MAXIMUM, du STABLE MAXIMUM, de la COLORATION et de la PARTITION EN CLIQUES peuvent être résolus en temps polynomial pour les graphes parfaits (Grötschel, Lovász, Schrijver, 1988).
  - Ces algorithmes utilisent directement le fait que  $\chi = \omega$  et non pas les propriétés structurels des graphes parfaits/de Berge.
  - Donc, ces algorithmes ne sont pas “combinatoire”.
  - On ne comprends pas quelles propriétés structurels permettent à construire ces algorithmes.
  - Donc, on ne comprends pas pour quelles classes structurellement similaires aux graphes parfaits/de Berge on devrait être capable de résoudre ces quatre problèmes en temps polynomial.

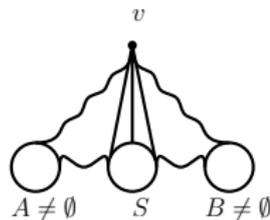
- Les graphes de Berge (et donc, les graphes parfaits) peuvent être reconnus en temps polynomial (Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour, Vušković, 2004).
- Les problèmes de la CLIQUE MAXIMUM, du STABLE MAXIMUM, de la COLORATION et de la PARTITION EN CLIQUES peuvent être résolus en temps polynomial pour les graphes parfaits (Grötschel, Lovász, Schrijver, 1988).
  - Ces algorithmes utilisent directement le fait que  $\chi = \omega$  et non pas les propriétés structurels des graphes parfaits/de Berge.
  - Donc, ces algorithmes ne sont pas “combinatoire”.
  - On ne comprends pas quelles propriétés structurels permettent à construire ces algorithmes.
  - Donc, on ne comprends pas pour quelles classes structurellement similaires aux graphes parfaits/de Berge on devrait être capable de résoudre ces quatre problèmes en temps polynomial.
  - Une telle classe : les graphes sans trou pair.

 $C_4$  $C_6$  $C_8$  $C_{10}$  $C_{12}$ 

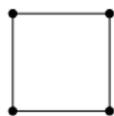
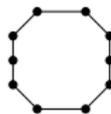
- Il existe un théorème de décomposition pour les graphes sans trou pair (Conforti, Cornuéjols, Kapoor, Vušković, 2002; da Silva, Vušković, 2013).



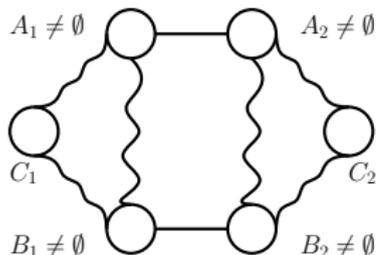
2-joint



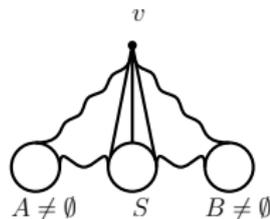
étoile d'articulation

 $C_4$  $C_6$  $C_8$  $C_{10}$  $C_{12}$ 

- Il existe un théorème de décomposition pour les graphes sans trou pair (Conforti, Cornuéjols, Kapoor, Vušković, 2002; da Silva, Vušković, 2013).

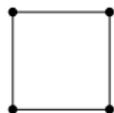
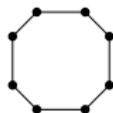


2-joint

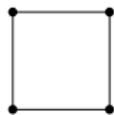
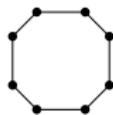
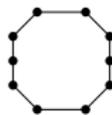
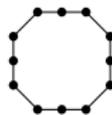


étoile d'articulation

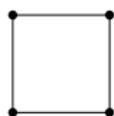
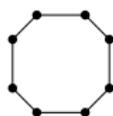
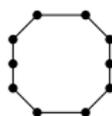
- Les graphes sans trou pair peuvent être reconnus en temps polynomial (Conforti, Cornuéjols, Kapoor, Vušković, 2002; Chang, Lu, 2015).

 $C_4$  $C_6$  $C_8$  $C_{10}$  $C_{12}$ 

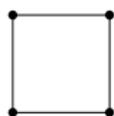
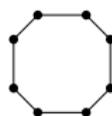
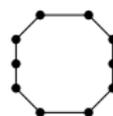
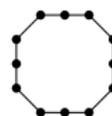
- Le problème de la CLIQUE MAXIMUM peut être résolu en temps polynomial pour les graphes sans  $C_4$  (Farber, 1989), et donc pour les graphes sans trou pair.

 $C_4$  $C_6$  $C_8$  $C_{10}$  $C_{12}$ 

- Le problème de la CLIQUE MAXIMUM peut être résolu en temps polynomial pour les graphes sans  $C_4$  (Farber, 1989), et donc pour les graphes sans trou pair.
- Problèmes ouverts pour les graphes sans trou pair :
  - Quelle est la complexité du problème du STABLE MAXIMUM pour les graphes sans trou pair ?

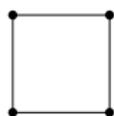
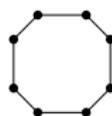
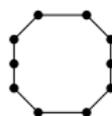
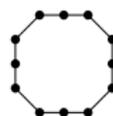
 $C_4$  $C_6$  $C_8$  $C_{10}$  $C_{12}$ 

- Le problème de la CLIQUE MAXIMUM peut être résolu en temps polynomial pour les graphes sans  $C_4$  (Farber, 1989), et donc pour les graphes sans trou pair.
- Problèmes ouverts pour les graphes sans trou pair :
  - Quelle est la complexité du problème du STABLE MAXIMUM pour les graphes sans trou pair ?
  - Quelle est la complexité du problème de la COLORATION pour les graphes sans trou pair ?

 $C_4$  $C_6$  $C_8$  $C_{10}$  $C_{12}$ 

- Le problème de la CLIQUE MAXIMUM peut être résolu en temps polynomial pour les graphes sans  $C_4$  (Farber, 1989), et donc pour les graphes sans trou pair.
- Problèmes ouverts pour les graphes sans trou pair :
  - Quelle est la complexité du problème du STABLE MAXIMUM pour les graphes sans trou pair ?
  - Quelle est la complexité du problème de la COLORATION pour les graphes sans trou pair ?
- Un autre problème ouvert : Quelle est la complexité du problème de la COLORATION pour les graphes sans  $(4K_1, C_4)$  ?

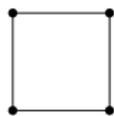
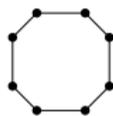
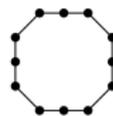
 $4K_1$  $C_4$

 $C_4$  $C_6$  $C_8$  $C_{10}$  $C_{12}$ 

- Le problème de la CLIQUE MAXIMUM peut être résolu en temps polynomial pour les graphes sans  $C_4$  (Farber, 1989), et donc pour les graphes sans trou pair.
- Problèmes ouverts pour les graphes sans trou pair :
  - Quelle est la complexité du problème du STABLE MAXIMUM pour les graphes sans trou pair ?
  - Quelle est la complexité du problème de la COLORATION pour les graphes sans trou pair ?
- Un autre problème ouvert : Quelle est la complexité du problème de la COLORATION pour les graphes sans  $(4K_1, C_4)$  ?

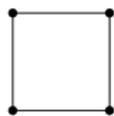
 $4K_1$  $C_4$ 

- Et l'intersection de ces deux classes ?

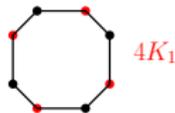
 $C_4$  $C_6$  $C_8$  $C_{10}$  $C_{12}$ 

- Tout trou de longueur  $\geq 8$  contient un  $4K_1$  induit.

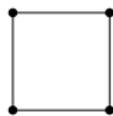
 $4K_1$  $C_8$

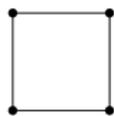
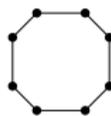
 $C_4$  $C_6$  $C_8$  $C_{10}$  $C_{12}$ 

- Tout trou de longueur  $\geq 8$  contient un  $4K_1$  induit.

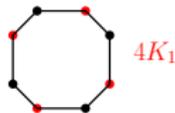
 $4K_1$  $C_8$ 

- Donc, les graphes sans trou pair et sans  $(4K_1, C_4)$  sont exactement les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$ .

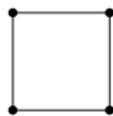
 $4K_1$  $C_4$  $C_6$

 $C_4$  $C_6$  $C_8$  $C_{10}$  $C_{12}$ 

- Tout trou de longueur  $\geq 8$  contient un  $4K_1$  induit.

 $4K_1$  $C_8$ 

- Donc, les graphes sans trou pair et sans  $(4K_1, C_4)$  sont exactement les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$ .

 $4K_1$  $C_4$  $C_6$ 

- Ceci est exactement la classe de tous les graphes sans trou pair et du nombre de stabilité  $\leq 3$ .

Question [Foley, Fraser, Hoàng, Holmes, LaMantia, 2020]

Quelle est la complexité du problème de la COLORATION pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  ?

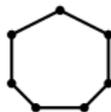
Question [Foley, Fraser, Hoàng, Holmes, LaMantia, 2020]

Quelle est la complexité du problème de la COLORATION pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  ?

- Tout trou dans un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  est de longueur 5 ou 7.



$C_5$



$C_7$

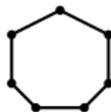
Question [Foley, Fraser, Hoàng, Holmes, LaMantia, 2020]

Quelle est la complexité du problème de la COLORATION pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  ?

- Tout trou dans un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  est de longueur 5 ou 7.



$C_5$



$C_7$

Théorème [Foley, Fraser, Hoàng, Holmes, LaMantia, 2020]

Le problème de la COLORATION peut être résolu en temps polynomial pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  contenant un  $C_7$  induit.

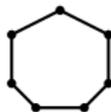
Question [Foley, Fraser, Hoàng, Holmes, LaMantia, 2020]

Quelle est la complexité du problème de la COLORATION pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  ?

- Tout trou dans un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  est de longueur 5 ou 7.



$C_5$



$C_7$

Théorème [Foley, Fraser, Hoàng, Holmes, LaMantia, 2020]

Le problème de la COLORATION peut être résolu en temps polynomial pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  contenant un  $C_7$  induit.

- Et les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  ?

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Le problème de la COLORATION peut être résolu en temps polynomial pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ .

## Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Le problème de la COLORATION peut être résolu en temps polynomial pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ .

- Observation : Tout trou dans un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  est de longueur 5.



$C_5$

## Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Le problème de la COLORATION peut être résolu en temps polynomial pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ .

- Observation : Tout trou dans un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  est de longueur 5.



$C_5$

- En fait, les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  sont exactement les graphes du nombre de stabilité  $\leq 3$  et dans lesquels tout trou est de longueur 5.

## Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

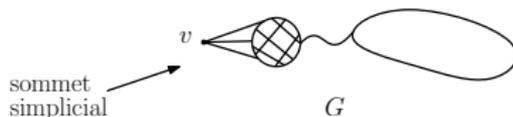
Le problème de la COLORATION peut être résolu en temps polynomial pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ .

- L'ingrédient principal de la preuve : un théorème de décomposition.

## Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

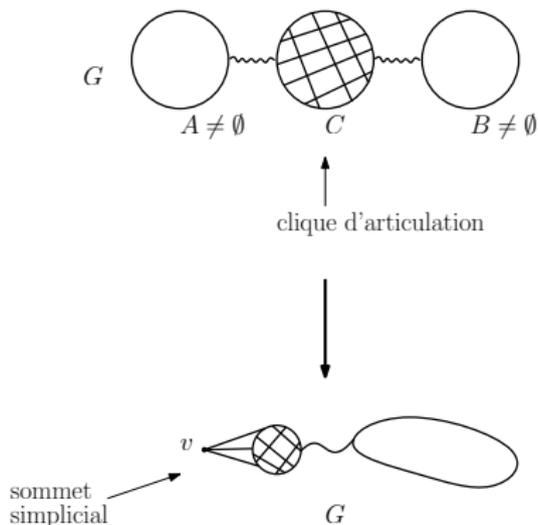
Le problème de la COLORATION peut être résolu en temps polynomial pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ .

- L'ingrédient principal de la preuve : un théorème de décomposition.
- En fait, ce théorème de décomposition est une description structurelle complète pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  et ne contenant pas de "sommet simplicial" (sommet dont le voisinage est une clique).



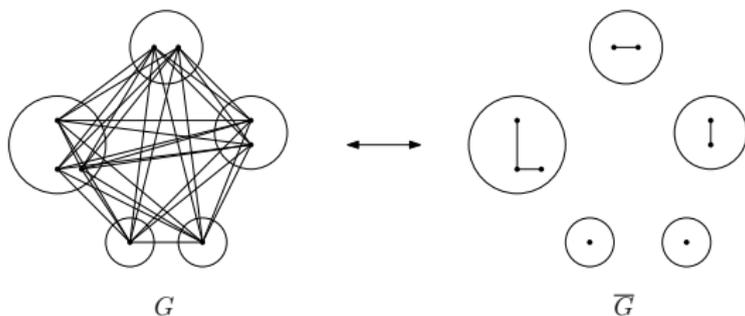
## Proposition

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4)$  admettant une clique d'articulation. Alors  $G$  contient un sommet simplicial.



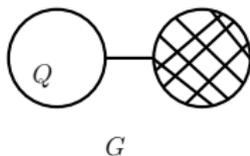
## Définition

Un graphe est *anti-connecte* si son complémentaire est connexe. Une *composante anti-connecte* d'un graphe  $G$  est un sous-graphe induit  $Q$  de  $G$  t.q.  $\overline{Q}$  est une composante connexe de  $\overline{G}$ . Une composante anti-connecte est *triviale* si elle a un seul sommet, et elle est *non-triviale* si elle a au moins deux sommets.

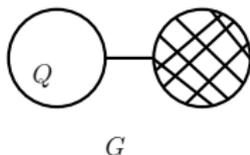


- Tout graphe est le joint de ses composantes anti-connecte.

- “ $Q$  est la seule composante anti-connexe non-triviale de  $G$ ”  
veut dire :
  - $Q$  est un sous-graphe induit anti-connexe de  $G$  ;
  - $|V(Q)| \geq 2$  ;
  - soit  $G = Q$ , soit  $G$  est le joint de  $Q$  et d'un graphe complet.

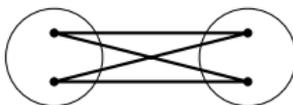


- “ $Q$  est la seule composante anti-connexes non-triviale de  $G$ ”  
veut dire :
  - $Q$  est un sous-graphe induit anti-connexes de  $G$  ;
  - $|V(Q)| \geq 2$  ;
  - soit  $G = Q$ , soit  $G$  est le joint de  $Q$  et d'un graphe complet.



### Proposition

Soit  $G$  un graphe sans  $C_4$ . Alors  $G$  a au plus une composante anti-connexes non-triviale.



- Rappel :
  - On veut décomposer les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ .

- Rappel :
  - On veut décomposer les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ .
  - Ce sont exactement les graphes du nombre de stabilité  $\leq 3$  et dans lesquels tout trou est de longueur 5.

- Rappel :
  - On veut décomposer les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ .
  - Ce sont exactement les graphes du nombre de stabilité  $\leq 3$  et dans lesquels tout trou est de longueur 5.
  - Si  $G$  est sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  alors
    - si  $G$  admet une clique d'articulation, alors il contient un sommet simplicial ;
    - $G$  a au plus une composante anti-connexe non-triviale.

- Rappel :
  - On veut décomposer les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ .
  - Ce sont exactement les graphes du nombre de stabilité  $\leq 3$  et dans lesquels tout trou est de longueur 5.
  - Si  $G$  est sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  alors
    - si  $G$  admet une clique d'articulation, alors il contient un sommet simplicial ;
    - $G$  a au plus une composante anti-connexe non-triviale.
- On décompose les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  en utilisant les “configurations de Truemper”.

- Il y a deux types de configurations de Truemper : les “configurations à trois chemins” (les “thêtas”, les “pyramides” et les “prismes”) et les “roues”.

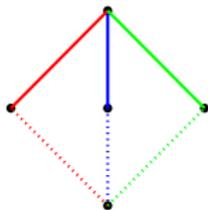
- Il y a deux types de configurations de Truemper : les “configurations à trois chemins” (les “thêtas”, les “pyramides” et les “prismes”) et les “roues”.
- Ces configurations ont joué un rôle important dans l'étude de nombreuses classes héréditaires complexes, y compris la classe des graphes de Berge et la classe des graphes sans trou pair.

- Il y a deux types de configurations de Truemper : les “configurations à trois chemins” (les “thêtas”, les “pyramides” et les “prismes”) et les “roues”.
- Ces configurations ont joué un rôle important dans l'étude de nombreuses classes héréditaires complexes, y compris la classe des graphes de Berge et la classe des graphes sans trou pair.
- Parfois, elles apparaissent comme des sous-graphes induits interdits.

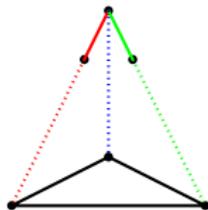
- Il y a deux types de configurations de Truemper : les “configurations à trois chemins” (les “thêtas”, les “pyramides” et les “prismes”) et les “roues”.
- Ces configurations ont joué un rôle important dans l'étude de nombreuses classes héréditaires complexes, y compris la classe des graphes de Berge et la classe des graphes sans trou pair.
- Parfois, elles apparaissent comme des sous-graphes induits interdits.
- Parfois, elles apparaissent comme des sous-graphes induits autour desquels on peut décomposer le graphe en question (afin de démontrer un théorème de décomposition).

## Définition

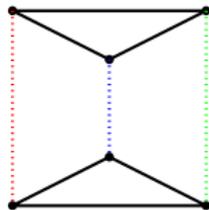
Les *configurations à trois chemins* (abréviation : *3PC*) sont les thêtas, les pyramides et les prismes.



thêta



pyramide



prisme



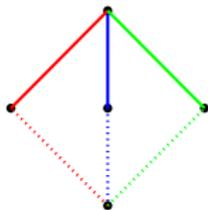
arête



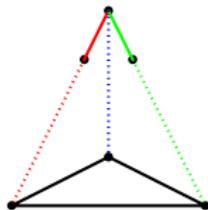
chemin ayant au moins une arête

## Définition

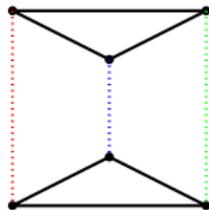
Les *configurations à trois chemins* (abréviation : *3PC*) sont les thêtas, les pyramides et les prismes.



thêta



pyramide



prisme



arête

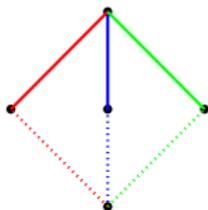


chemin ayant au moins une arête

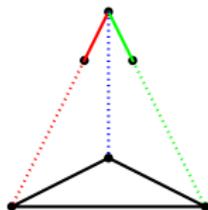
- Tout 3PC contient un trou.

## Définition

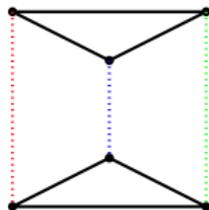
Les *configurations à trois chemins* (abréviation : *3PC*) sont les thêtas, les pyramides et les prismes.



thêta



pyramide



prisme

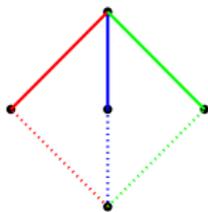


arête

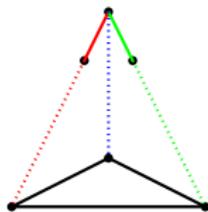


chemin ayant au moins une arête

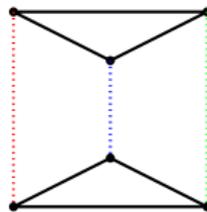
- Tout 3PC contient un trou.
- En fait, tout 3PC contient exactement trois trous.



thêta



pyramide



prisme

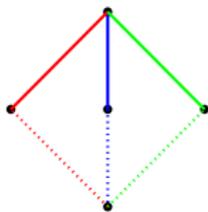


arête

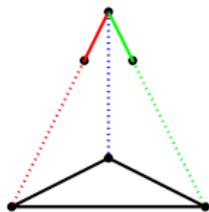


chemin ayant au moins une arête

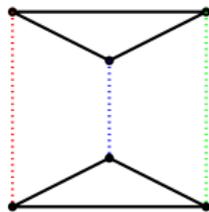
- Tout thêta et tout prisme contient un trou pair.



thêta



pyramide



prisme

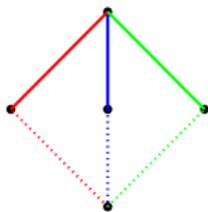


arête

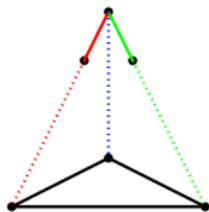


chemin ayant au moins une arête

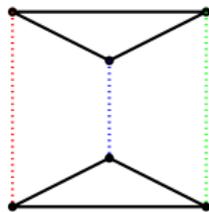
- Tout thêta et tout prisme contient un trou pair.
  - Donc, les graphes sans trou pair sont sans (thêta, prisme).



thêta



pyramide



prisme

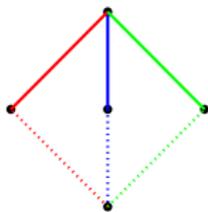


arête

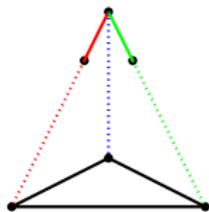


chemin ayant au moins une arête

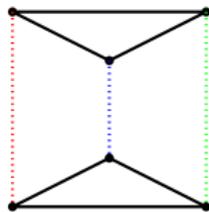
- Tout thêta et tout prisme contient un trou pair.
  - Donc, les graphes sans trou pair sont sans (thêta, prisme).
- Tout pyramide contient un trou impair.



thêta



pyramide



prisme

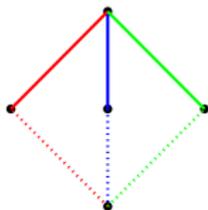


arête

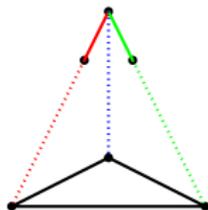


chemin ayant au moins une arête

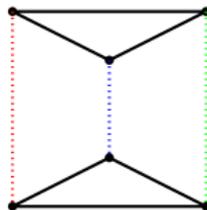
- Tout thêta et tout prisme contient un trou pair.
  - Donc, les graphes sans trou pair sont sans (thêta, prisme).
- Tout pyramide contient un trou impair.
  - Donc, les graphes sans trou impair (et en particulier, les graphes de Berge) sont sans pyramide.



thêta



pyramide



prisme

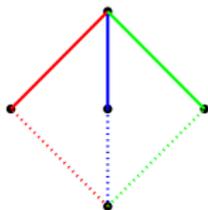


arête

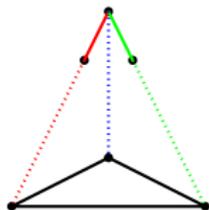


chemin ayant au moins une arête

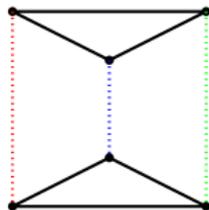
- Détection du thêta :  $O(n^{11})$  (Chudnovsky, Seymour, 2006).



thêta



pyramide



prisme

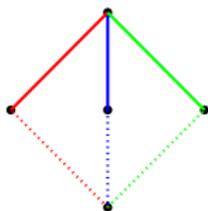


arête

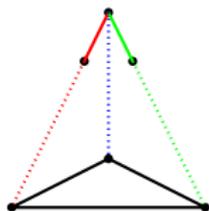


chemin ayant au moins une arête

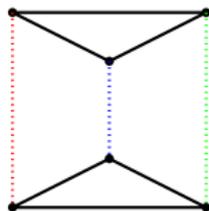
- Détection du thêta :  $O(n^{11})$  (Chudnovsky, Seymour, 2006).
- Détection du pyramide :  $O(n^9)$  (Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour, Vušković, 2004).



thêta



pyramide



prisme

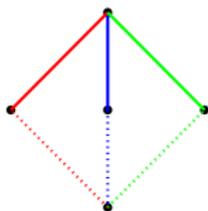


arête

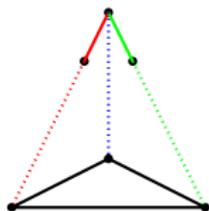


chemin ayant au moins une arête

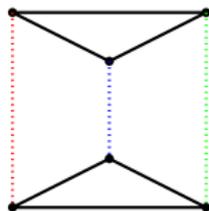
- Détection du thêta :  $O(n^{11})$  (Chudnovsky, Seymour, 2006).
- Détection du pyramide :  $O(n^9)$  (Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour, Vušković, 2004).
  - La détection des pyramides a joué un rôle clé dans l'algorithme de reconnaissance des graphes de Berge (Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour, Vušković, 2004) et des graphes sans trou impair (Chudnovsky, Scott, Seymour, Spirkl, 2020).



thêta



pyramide



prisme



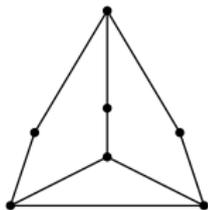
arête



chemin ayant au moins une arête

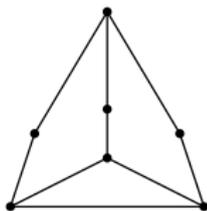
- Détection du thêta :  $O(n^{11})$  (Chudnovsky, Seymour, 2006).
- Détection du pyramide :  $O(n^9)$  (Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour, Vušković, 2004).
  - La détection des pyramides a joué un rôle clé dans l'algorithme de reconnaissance des graphes de Berge (Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour, Vušković, 2004) et des graphes sans trou impair (Chudnovsky, Scott, Seymour, Spirkl, 2020).
- Détection du prisme : NPC (Maffray, Trotignon, 2003).

- Puisque tout trou dans un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  est de longueur 5, le seul 3PC qu'un tel graphe peut contenir comme sous-graphe induit est le 5-pyramide.



5-pyramide

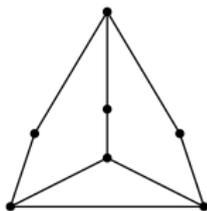
- Puisque tout trou dans un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  est de longueur 5, le seul 3PC qu'un tel graphe peut contenir comme sous-graphe induit est le 5-pyramide.



5-pyramide

- Donc, tout graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7, 5\text{-pyramide})$  est sans 3PC.

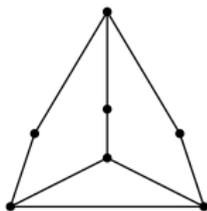
- Puisque tout trou dans un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  est de longueur 5, le seul 3PC qu'un tel graphe peut contenir comme sous-graphe induit est le 5-pyramide.



5-pyramide

- Donc, tout graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7, 5\text{-pyramide})$  est sans 3PC.
- Notre preuve du théorème de décomposition pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  est divisée en deux cas :

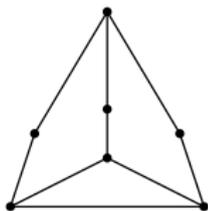
- Puisque tout trou dans un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  est de longueur 5, le seul 3PC qu'un tel graphe peut contenir comme sous-graphe induit est le 5-pyramide.



5-pyramide

- Donc, tout graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7, 5\text{-pyramide})$  est sans 3PC.
- Notre preuve du théorème de décomposition pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  est divisée en deux cas :
  - le cas où le graphe est sans 5-pyramide (et donc sans 3PC) ;

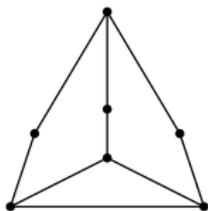
- Puisque tout trou dans un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  est de longueur 5, le seul 3PC qu'un tel graphe peut contenir comme sous-graphe induit est le 5-pyramide.



5-pyramide

- Donc, tout graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7, 5\text{-pyramide})$  est sans 3PC.
- Notre preuve du théorème de décomposition pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  est divisée en deux cas :
  - le cas où le graphe est sans 5-pyramide (et donc sans 3PC) ;
  - le cas où le graphe contient un 5-pyramide induit.

- Puisque tout trou dans un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  est de longueur 5, le seul 3PC qu'un tel graphe peut contenir comme sous-graphe induit est le 5-pyramide.

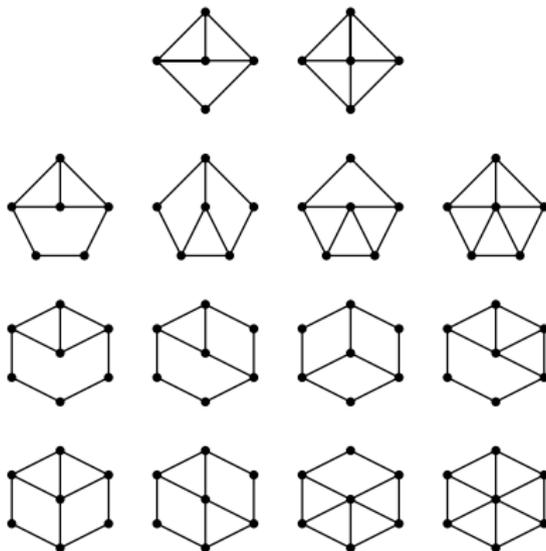


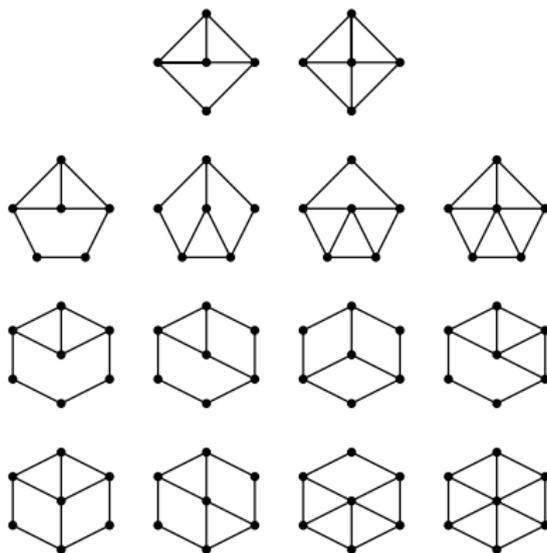
5-pyramide

- Donc, tout graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7, 5\text{-pyramide})$  est sans 3PC.
- Notre preuve du théorème de décomposition pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  est divisée en deux cas :
  - le cas où le graphe est sans 5-pyramide (et donc sans 3PC) ;
  - le cas où le graphe contient un 5-pyramide induit.
- On considère d'abord le cas sans 5-pyramide (et l'on continue avec les configurations de Truemper).

## Définition

On appelle *roue* tout graphe formé en ajoutant un sommet à un trou et en reliant ce sommet à au moins trois sommets de ce trou.





- Détection des roues : NPC (Diot, Tavenas, Trotignon, 2013).
- Les roues ont joué un rôle important dans la preuve du théorème de décomposition des graphes de Berge et donc dans la preuve du théorème fort des graphes parfaits (Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas, 2002)

## Définition

Les *configurations de Truemper* sont les 3PC (les thêta, les pyramides et les prismes) et les roues.

## Définition

Les *configurations de Truemper* sont les 3PC (les thêta, les pyramides et les prismes) et les roues.

- Toute configuration de Truemper contient un trou.

## Définition

Les *configurations de Truemper* sont les 3PC (les thêta, les pyramides et les prismes) et les roues.

- Toute configuration de Truemper contient un trou.
- Donc, les graphes cordaux ne contiennent aucune configuration de Truemper comme sous-graphe induit, c.à.d. les graphes cordaux sont sans (3PC, roue).

## Définition

Les *configurations de Truemper* sont les 3PC (les thêta, les pyramides et les prismes) et les roues.

- Toute configuration de Truemper contient un trou.
- Donc, les graphes cordaux ne contiennent aucune configuration de Truemper comme sous-graphe induit, c.à.d. les graphes cordaux sont sans (3PC, roue).

## Théorème [Conforti, Cornuéjols, Kapoor, Vušković, 1997]

Soit  $G$  un graphe sans (3PC, roue). Alors l'une de ces trois conditions est satisfaite :

- $G$  est un graphe complet ;
- $G$  est un cycle ;
- $G$  admet une clique d'articulation.

- Puisque tout trou dans un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  est de longueur 5, les seules roues qu'un tel graphe peut contenir comme sous-graphes induits sont les deux roues ci-dessous :



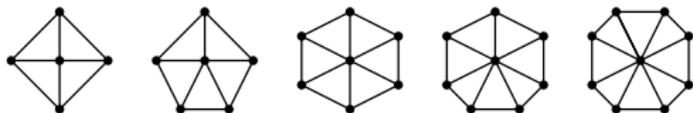
## Définition

Une *roue jumelle* est tout graphe formé en ajoutant un sommet à un trou et en reliant ce sommet à trois sommets consécutifs de ce trou (et à aucun autre sommet).



## Définition

Une *roue universelle* est tout graphe formé en ajoutant un sommet à un trou et en reliant ce sommet à tous les sommets de ce trou.



## Définition

Une *roue propre* est toute roue qui n'est ni jumelle ni universelle.

- Rappel : Les seules roues qu'un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  peut contenir comme sous-graphes induits :



- Rappel : Les seules roues qu'un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  peut contenir comme sous-graphes induits :

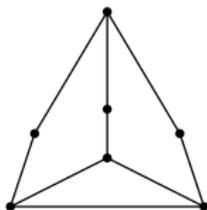


- Donc, les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  sont sans roue propre.

- Rappel : Les seules roues qu'un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  peut contenir comme sous-graphes induits :

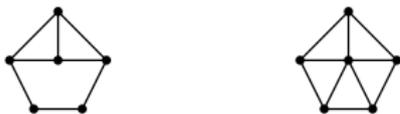


- Donc, les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  sont sans roue propre.
- Rappel : Le seul 3PC qu'un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  peut contenir comme sous-graphe induit est le 5-pyramide.

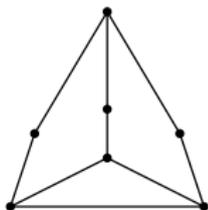


5-pyramide

- Rappel : Les seules roues qu'un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  peut contenir comme sous-graphes induits :



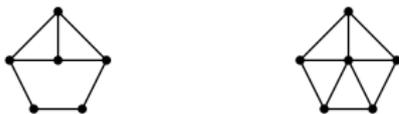
- Donc, les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  sont sans roue propre.
- Rappel : Le seul 3PC qu'un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  peut contenir comme sous-graphe induit est le 5-pyramide.



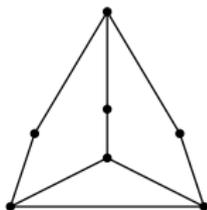
5-pyramide

- Donc, les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7, 5\text{-pyramide})$  sont sans (3PC, roue propre).

- Rappel : Les seules roues qu'un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  peut contenir comme sous-graphes induits :



- Donc, les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  sont sans roue propre.
- Rappel : Le seul 3PC qu'un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  peut contenir comme sous-graphe induit est le 5-pyramide.

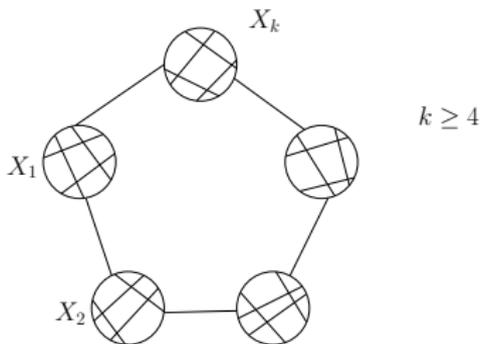


5-pyramide

- Donc, les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7, 5\text{-pyramide})$  sont sans (3PC, roue propre).
- Il y a un théorème de décomposition pour les graphes sans (3PC, roue propre) ! (Boncompagni, P., Vušković, 2019)

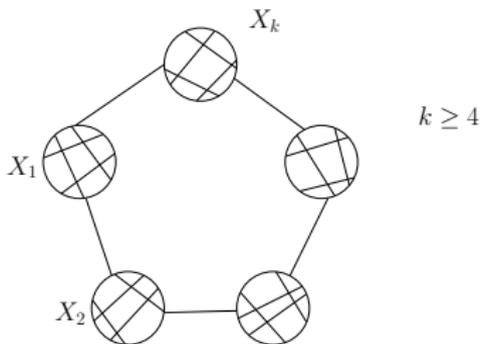
## Définition

Un  $k$ -hypertrou ( $k \geq 4$ ) est tout graphe que l'on peut obtenir à partir d'un trou de longueur  $k$  en remplaçant chaque sommet par une clique non-vide.



## Définition

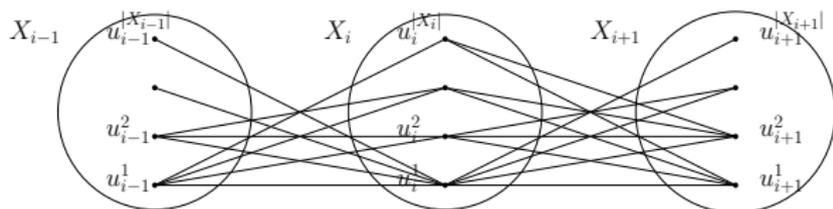
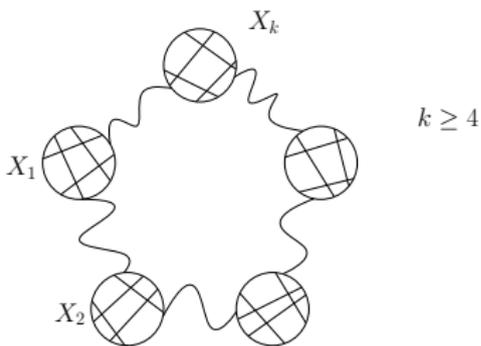
Un  $k$ -hypertrou ( $k \geq 4$ ) est tout graphe que l'on peut obtenir à partir d'un trou de longueur  $k$  en remplaçant chaque sommet par une clique non-vide.



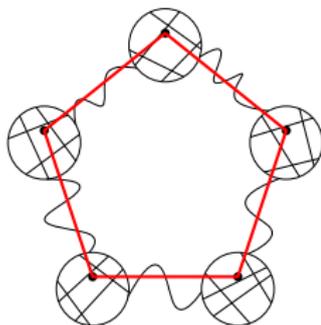
- Une généralisation des hypertrous : les “anneaux”.

## Définition

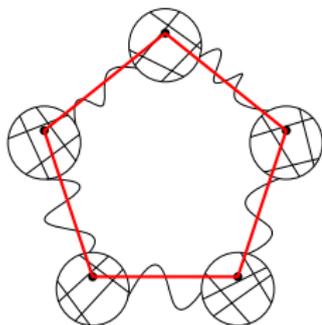
Un  $k$ -anneau ( $k \geq 4$ ) est tout graphe  $R$  dont l'ensemble de sommets peut être partitionné en  $k$  sous-ensembles non-vides,  $X_1 = \{u_1^1, \dots, u_1^{|X_1|}\}, \dots, X_k = \{u_k^1, \dots, u_k^{|X_k|}\}$ , t.q.  $\forall i \in \mathbb{Z}_k$ ,  $X_i \subseteq N_R[u_i^{|X_i|}] \subseteq \dots \subseteq N_R[u_i^1] = X_{i-1} \cup X_i \cup X_{i+1}$ .



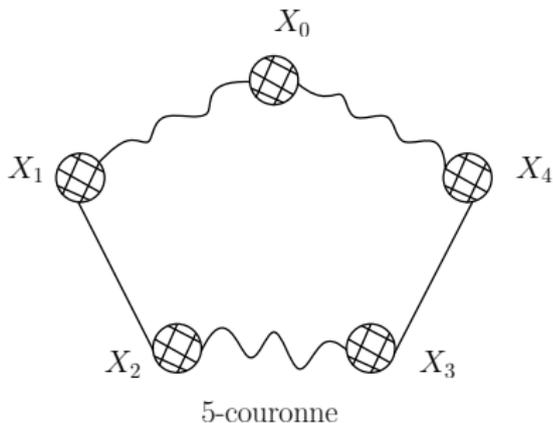
- Tout trou dans un  $k$ -anneau est de longueur  $k$ .



- Tout trou dans un  $k$ -anneau est de longueur  $k$ .



- Un anneau est sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  ssi il est une 5-couronne.



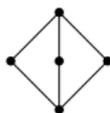
## Théorème [Boncompagni, P., Vušković, 2019]

Soit  $G$  un graphe sans (3PC, roue propre). Alors l'une des conditions suivantes est satisfaite :

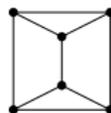
- 1  $G$  a une seule composante anti-connexe non-triviale et cette composante anti-connexe est un anneau de longueur  $\geq 5$  ;
- 2  $G$  est sans (trou long<sup>a</sup>,  $K_{2,3}$ ,  $\overline{C_6}$ ) ;
- 3  $\alpha(G) = 2$  et toute composante anti-connexe de  $G$  est un 5-hypertrou ou un graphe sans ( $C_5$ ,  $\overline{C_6}$ ) ;
- 4  $G$  admet une clique d'articulation.

---

<sup>a</sup>Un *trou long* est un trou de longueur  $\geq 5$ .



$K_{2,3}$



$\overline{C_6}$

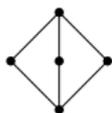
## Théorème [Boncompagni, P., Vušković, 2019]

Soit  $G$  un graphe sans (3PC, roue propre). Alors l'une des conditions suivantes est satisfaite :

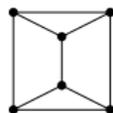
- 1  $G$  a une seule composante anti-connexe non-triviale et cette composante anti-connexe est un anneau de longueur  $\geq 5$  ;
- 2  $G$  est sans (trou long<sup>a</sup>,  $K_{2,3}$ ,  $\overline{C_6}$ ) ;
- 3  $\alpha(G) = 2$  et toute composante anti-connexe de  $G$  est un 5-hypertrou ou un graphe sans ( $C_5$ ,  $\overline{C_6}$ ) ;
- 4  $G$  admet une clique d'articulation.

---

<sup>a</sup>Un *trou long* est un trou de longueur  $\geq 5$ .



$K_{2,3}$



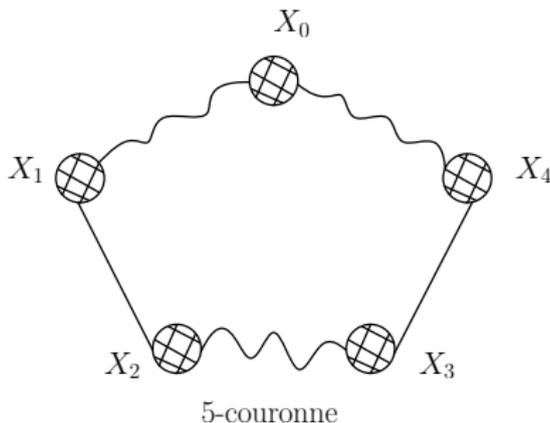
$\overline{C_6}$

- Et pour les graphes sans ( $4K_1$ ,  $C_4$ ,  $C_6$ ,  $C_7$ , 5-pyramide)...

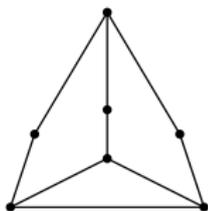
## Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Soit  $G$  un graphe. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents :

- (a)  $G$  est sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7, 5\text{-pyramide})$  et ne contient pas de sommet simplicial ;
- (b)  $G$  a une seule composante anti-connexe non-triviale et cette composante anti-connexe est une 5-couronne.

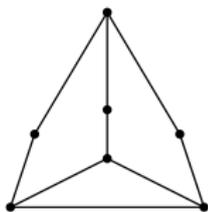


- Et quoi faire avec les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  contenant un 5-pyramide induit ?



5-pyramide

- Et quoi faire avec les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  contenant un 5-pyramide induit ?



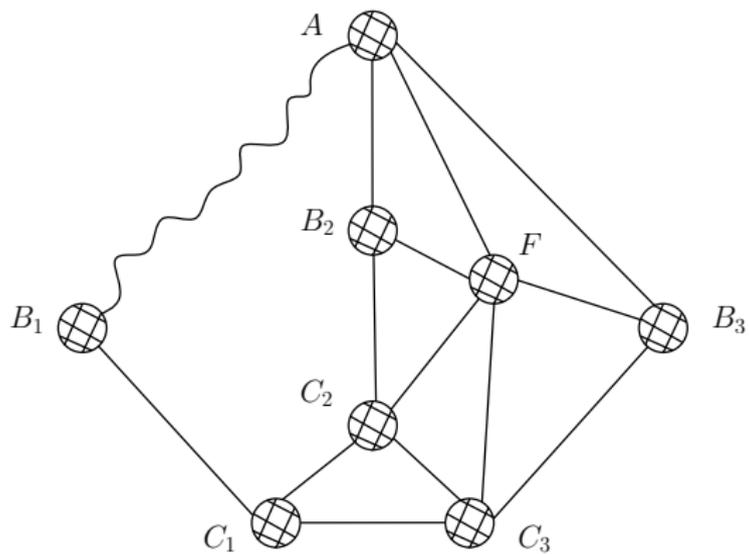
5-pyramide

- Alors on examine comment les autres sommets du graphe peuvent s'attacher à ce 5-pyramide induit et après une dizaine de pages...

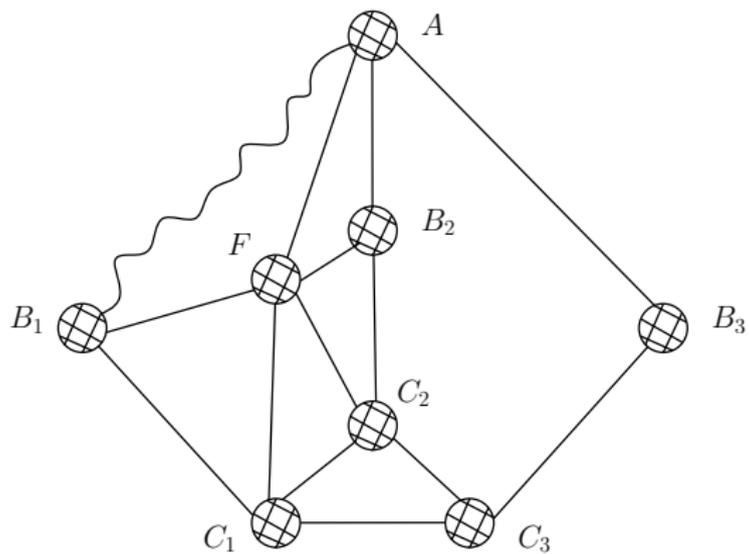
### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Soit  $G$  un graphe. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents :

- (a)  $G$  est sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ ,  $G$  contient un 5-pyramide induit et  $G$  ne contient pas de sommet simplicial ;
- (b)  $G$  a une seule composante anti-connexe non-triviale et cette composante anti-connexe est un 5-panier.



5-panier (version 1)



5-panier (version 2)

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Soit  $G$  un graphe. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents :

- (a)  $G$  est sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  et ne contient pas de sommet simplicial ;
- (b)  $G$  a une seule composante anti-connexe non-triviale et cette composante anti-connexe est une 5-couronne ou un 5-panier.

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Soit  $G$  un graphe. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents :

- (a)  $G$  est sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  et ne contient pas de sommet simplicial ;
- (b)  $G$  a une seule composante anti-connexe non-triviale et cette composante anti-connexe est une 5-couronne ou un 5-panier.

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ . Alors soit  $\text{cwd}(G) \leq 5$ , soit  $G$  contient un sommet simplicial.

## Définition

Soit  $G$  un graphe. La *largeur de clique* (ou *clique-width*) de  $G$ , dénotée  $cwd(G)$ , est le nombre minimum d'étiquettes nécessaire pour construire  $G$  en appliquant les opérations suivantes :

- 1 Création d'un nouveau sommet  $v$  avec étiquette  $i$  ;
- 2 Union disjointe de deux graphes étiquetés  $G_1$  et  $G_2$  ;
- 3 Insertion d'arêtes entre chaque sommet étiqueté  $i$  et chaque sommet étiqueté  $j$  ;
- 4 Renommage de l'étiquette  $i$  en étiquette  $j$ .

## Définition

Soit  $G$  un graphe. La *largeur de clique* (ou *clique-width*) de  $G$ , dénotée  $\text{cwd}(G)$ , est le nombre minimum d'étiquettes nécessaire pour construire  $G$  en appliquant les opérations suivantes :

- 1 Création d'un nouveau sommet  $v$  avec étiquette  $i$  ;
  - 2 Union disjointe de deux graphes étiquetés  $G_1$  et  $G_2$  ;
  - 3 Insertion d'arêtes entre chaque sommet étiqueté  $i$  et chaque sommet étiqueté  $j$  ;
  - 4 Renommage de l'étiquette  $i$  en étiquette  $j$ .
- Si  $G$  est complet, alors  $\text{cwd}(G) \leq 2$ .

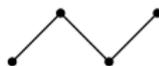
## Définition

Soit  $G$  un graphe. La *largeur de clique* (ou *clique-width*) de  $G$ , dénotée  $\text{cwd}(G)$ , est le nombre minimum d'étiquettes nécessaire pour construire  $G$  en appliquant les opérations suivantes :

- 1 Création d'un nouveau sommet  $v$  avec étiquette  $i$  ;
- 2 Union disjointe de deux graphes étiquetés  $G_1$  et  $G_2$  ;
- 3 Insertion d'arêtes entre chaque sommet étiqueté  $i$  et chaque sommet étiqueté  $j$  ;
- 4 Renommage de l'étiquette  $i$  en étiquette  $j$ .

- Si  $G$  est complet, alors  $\text{cwd}(G) \leq 2$ .
- En fait  $\text{cwd}(G) \leq 2$  ssi  $G$  est un cocomplete (ou ce qui est équivalent : un graphe sans  $P_4$ ).

$P_4$



### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ . Alors soit  $\text{cwd}(G) \leq 5$ , soit  $G$  contient un sommet simplicial.

- La largeur de clique des graphes cordaux sans  $4K_1$  n'est pas bornée (Brandstädt, Engelfriet, Le, Lozin, 2006).

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ . Alors soit  $\text{cwd}(G) \leq 5$ , soit  $G$  contient un sommet simplicial.

- La largeur de clique des graphes cordaux sans  $4K_1$  n'est pas bornée (Brandstädt, Engelfriet, Le, Lozin, 2006).
- Évidemment, tout graphe cordal sans  $4K_1$  est sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ .

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ . Alors soit  $\text{cwd}(G) \leq 5$ , soit  $G$  contient un sommet simplicial.

- La largeur de clique des graphes cordaux sans  $4K_1$  n'est pas bornée (Brandstädt, Engelfriet, Le, Lozin, 2006).
- Évidemment, tout graphe cordal sans  $4K_1$  est sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ .
- Donc on ne peut pas éliminer la possibilité du sommet simplicial dans notre Théorème, même si l'on augmente la borne pour la largeur de clique.

## Théorème [Rao, 2007]

Le problème de la COLORATION peut être résolu en temps polynomial pour toute classe de graphes ayant la largeur de clique bornée.

### Théorème [Rao, 2007]

Le problème de la COLORATION peut être résolu en temps polynomial pour toute classe de graphes ayant la largeur de clique bornée.

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ . Alors soit  $\text{cwd}(G) \leq 5$ , soit  $G$  contient un sommet simplicial.

### Théorème [Rao, 2007]

Le problème de la COLORATION peut être résolu en temps polynomial pour toute classe de graphes ayant la largeur de clique bornée.

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ . Alors soit  $\text{cwd}(G) \leq 5$ , soit  $G$  contient un sommet simplicial.

- Les sommets simpliciaux ne posent pas de problème pour la coloration.

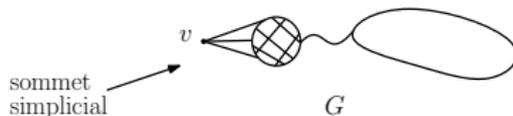
## Théorème [Rao, 2007]

Le problème de la COLORATION peut être résolu en temps polynomial pour toute classe de graphes ayant la largeur de clique bornée.

## Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ . Alors soit  $\text{cwd}(G) \leq 5$ , soit  $G$  contient un sommet simplicial.

- Les sommets simpliciaux ne posent pas de problème pour la coloration.
- En effet, si  $v$  est un sommet simplicial de  $G$ , alors  $\chi(G) = \max\{d_G(v) + 1, \chi(G \setminus v)\}$ .



### Théorème [Rao, 2007]

Le problème de la COLORATION peut être résolu en temps polynomial pour toute classe de graphes ayant la largeur de clique bornée.

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ . Alors soit  $\text{cwd}(G) \leq 5$ , soit  $G$  contient un sommet simplicial.

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Le problème de la COLORATION peut être résolu en temps polynomial pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$ .

Théorème [Foley, Fraser, Hoàng, Holmes, LaMantia, 2020]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  contenant un  $C_7$  induit. Alors  $\text{cwd}(G) \leq 26$ .

Théorème [Foley, Fraser, Hoàng, Holmes, LaMantia, 2020]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  contenant un  $C_7$  induit. Alors  $\text{cwd}(G) \leq 26$ .

Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6)$ . Alors soit  $\text{cwd}(G) \leq 26$ , soit  $G$  contient un sommet simplicial.

Théorème [Foley, Fraser, Hoàng, Holmes, LaMantia, 2020]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  contenant un  $C_7$  induit. Alors  $\text{cwd}(G) \leq 26$ .

Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6)$ . Alors soit  $\text{cwd}(G) \leq 26$ , soit  $G$  contient un sommet simplicial.

Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Le problème de la COLORATION peut être résolu en temps polynomial pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$ .

Théorème [Foley, Fraser, Hoàng, Holmes, LaMantia, 2020]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  contenant un  $C_7$  induit. Alors  $\text{cwd}(G) \leq 26$ .

Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6)$ . Alors soit  $\text{cwd}(G) \leq 26$ , soit  $G$  contient un sommet simplicial.

Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Le problème de la COLORATION peut être résolu en temps polynomial pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$ .

- Rappel : Les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  sont exactement les graphes sans trou pair et du nombre de stabilité  $\leq 3$ .

### Théorème [Rao, 2007]

Le problème de la COLORATION peut être résolu en temps polynomial pour toute classe de graphes ayant la largeur de clique bornée.

## Théorème [Rao, 2007]

Le problème de la COLORATION peut être résolu en temps polynomial pour toute classe de graphes ayant la largeur de clique bornée.

- L'algorithme est en temps polynomial :  $O(n^{f(k)})$ , où  $k$  est la borne pour la largeur de clique et  $f$  est une fonction (à croissance rapide).

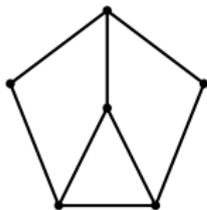
## Théorème [Rao, 2007]

Le problème de la COLORATION peut être résolu en temps polynomial pour toute classe de graphes ayant la largeur de clique bornée.

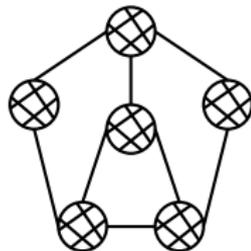
- L'algorithme est en temps polynomial :  $O(n^{f(k)})$ , où  $k$  est la borne pour la largeur de clique et  $f$  est une fonction (à croissance rapide).
- Peut-on faire mieux pour notre classe, c.à.d. pour les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  ?

Théorème [Foley, Fraser, Hoàng, Holmes, LaMantia, 2020]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  contenant un  $C_7$  induit. Alors  $G$  peut être obtenu à partir d'un graphe à  $\leq 13$  sommets, en remplaçant chaque sommet par une clique non-vide.

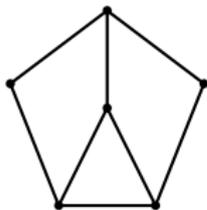


remplacement de  
chaque sommet  
par une clique  
non-vide

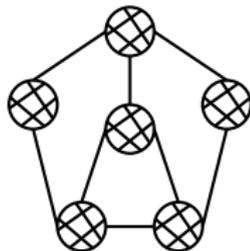


Théorème [Foley, Fraser, Hoàng, Holmes, LaMantia, 2020]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  contenant un  $C_7$  induit. Alors  $G$  peut être obtenu à partir d'un graphe à  $\leq 13$  sommets, en remplaçant chaque sommet par une clique non-vide.



remplacement de  
chaque sommet  
par une clique  
non-vide

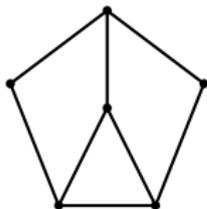


Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

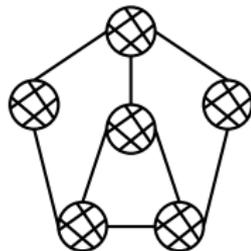
Les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  contenant un  $C_7$  induit peuvent être colorés en temps  $O(n^9)$ .

### Théorème [Foley, Fraser, Hoàng, Holmes, LaMantia, 2020]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  contenant un  $C_7$  induit. Alors  $G$  peut être obtenu à partir d'un graphe à  $\leq 13$  sommets, en remplaçant chaque sommet par une clique non-vide.



remplacement de  
chaque sommet  
par une clique  
non-vide



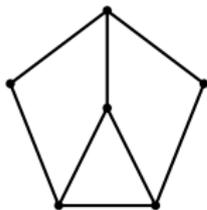
### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  contenant un  $C_7$  induit peuvent être colorés en temps  $O(n^9)$ .

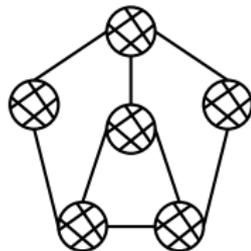
- Et les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  ?

### Théorème [Foley, Fraser, Hoàng, Holmes, LaMantia, 2020]

Soit  $G$  un graphe sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  contenant un  $C_7$  induit. Alors  $G$  peut être obtenu à partir d'un graphe à  $\leq 13$  sommets, en remplaçant chaque sommet par une clique non-vide.



remplacement de  
chaque sommet  
par une clique  
non-vide



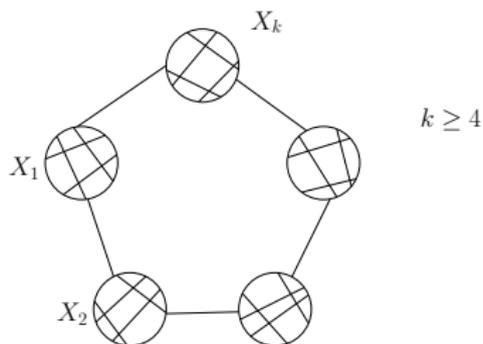
### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  contenant un  $C_7$  induit peuvent être colorés en temps  $O(n^9)$ .

- Et les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  ?
- On utilise les anneaux !

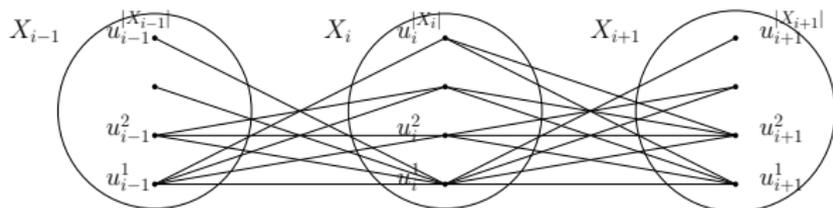
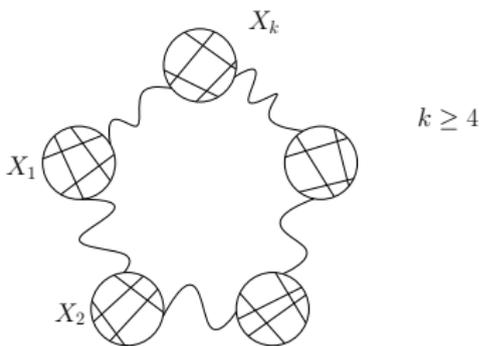
## Définition

Un  $k$ -hypertrou ( $k \geq 4$ ) est tout graphe que l'on peut obtenir à partir d'un trou de longueur  $k$  en remplaçant chaque sommet par une clique non-vide.



## Définition

Un  $k$ -anneau ( $k \geq 4$ ) est tout graphe  $R$  dont l'ensemble de sommets peut être partitionné en  $k$  sous-ensembles non-vides,  $X_1 = \{u_1^1, \dots, u_1^{|X_1|}\}, \dots, X_k = \{u_k^1, \dots, u_k^{|X_k|}\}$ , t.q.  $\forall i \in \mathbb{Z}_k$ ,  $X_i \subseteq N_R[u_i^{|X_i|}] \subseteq \dots \subseteq N_R[u_i^1] = X_{i-1} \cup X_i \cup X_{i+1}$ .



Théorème [Maffray, P., Vušković, 2020<sup>+</sup>]

Soit  $R$  un anneau. Alors

$$\chi(R) = \max\{\chi(H) \mid H \text{ est un hypertrou dans } R\}.$$

Théorème [Maffray, P., Vušković, 2020<sup>+</sup>]

Soit  $R$  un anneau. Alors

$$\chi(R) = \max\{\chi(H) \mid H \text{ est un hypertrou dans } R\}.$$

Théorème [Narayanan, Shende, 2001]

Soit  $H$  un hypertrou. Alors  $\chi(H) = \max\{\omega(H), \lceil \frac{|V(H)|}{\alpha(H)} \rceil\}$ .<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Si  $H$  est un  $k$ -hypertrou ( $k \geq 4$ ), alors  $\alpha(H) = \lfloor k/2 \rfloor$ .

### Théorème [Maffray, P., Vušković, 2020<sup>+</sup>]

Soit  $R$  un anneau. Alors

$$\chi(R) = \max\{\chi(H) \mid H \text{ est un hypertrou dans } R\}.$$

### Théorème [Narayanan, Shende, 2001]

Soit  $H$  un hypertrou. Alors  $\chi(H) = \max\{\omega(H), \lceil \frac{|V(H)|}{\alpha(H)} \rceil\}$ .<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Si  $H$  est un  $k$ -hypertrou ( $k \geq 4$ ), alors  $\alpha(H) = \lfloor k/2 \rfloor$ .

### Théorème [Maffray, P., Vušković, 2020<sup>+</sup>]

Soit  $k \geq 4$ . Alors tout  $k$ -anneau  $R$  vérifie

$$\chi(R) = \max\{\omega(R)\} \cup \left\{ \left\lceil \frac{|V(H)|}{\lfloor k/2 \rfloor} \right\rceil \mid H \text{ est un hypertrou dans } R \right\}.$$

**Théorème [Maffray, P., Vušković, 2020<sup>+</sup>]**

Soit  $k \geq 4$ . Alors tout  $k$ -anneau  $R$  vérifie

$$\chi(R) = \max\{\omega(R)\} \cup \left\{ \left\lceil \frac{|V(H)|}{\lfloor k/2 \rfloor} \right\rceil \mid H \text{ est un hypertrou dans } R \right\}.$$

**Théorème [Maffray, P., Vušković, 2020<sup>+</sup>]**

Le nombre chromatique d'un anneau peut être trouvé en temps  $O(n^3)$ .

Théorème [Maffray, P., Vušković, 2020<sup>+</sup>]

Soit  $k \geq 4$ . Alors tout  $k$ -anneau  $R$  vérifie

$$\chi(R) = \max\{\omega(R)\} \cup \left\{ \left\lceil \frac{|V(H)|}{\lfloor k/2 \rfloor} \right\rceil \mid H \text{ est un hypertrou dans } R \right\}.$$

Théorème [Maffray, P., Vušković, 2020<sup>+</sup>]

Le nombre chromatique d'un anneau peut être trouvé en temps  $O(n^3)$ .

Théorème [Maffray, P., Vušković, 2020<sup>+</sup>]

Une coloration optimale d'un anneau peut être trouvée en temps  $O(n^6)$ .

### Théorème [Maffray, P., Vušković, 2020<sup>+</sup>]

Soit  $k \geq 4$ . Alors tout  $k$ -anneau  $R$  vérifie

$$\chi(R) = \max\{\omega(R)\} \cup \left\{ \left\lceil \frac{|V(H)|}{\lfloor k/2 \rfloor} \right\rceil \mid H \text{ est un hypertrou dans } R \right\}.$$

### Théorème [Maffray, P., Vušković, 2020<sup>+</sup>]

Le nombre chromatique d'un anneau peut être trouvé en temps  $O(n^3)$ .

### Théorème [Maffray, P., Vušković, 2020<sup>+</sup>]

Une coloration optimale d'un anneau peut être trouvée en temps  $O(n^6)$ .

- En fait, les deux algorithmes sont pour une classe un peu plus large, qui contient en particulier tous les sous-graphes induits des anneaux.

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Soit  $G$  un graphe. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents :

- (a)  $G$  est sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  et ne contient pas de sommet simplicial ;
- (b)  $G$  a une seule composante anti-connexe non-triviale et cette composante anti-connexe est une 5-couronne ou un 5-panier.

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Soit  $G$  un graphe. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents :

- (a)  $G$  est sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  et ne contient pas de sommet simplicial ;
- (b)  $G$  a une seule composante anti-connexe non-triviale et cette composante anti-connexe est une 5-couronne ou un 5-panier.

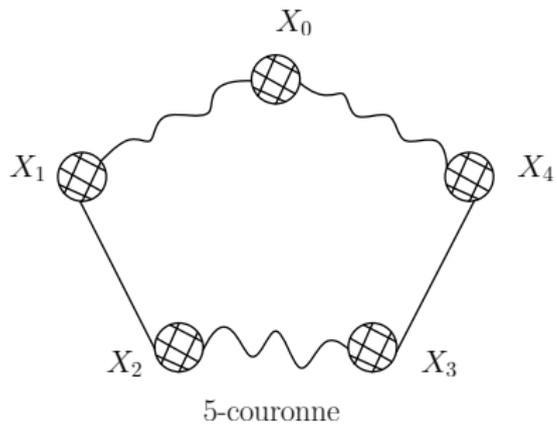
- Les composantes anti-connexe et les sommets simpliciaux ne posent pas de problèmes pour la coloration.

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

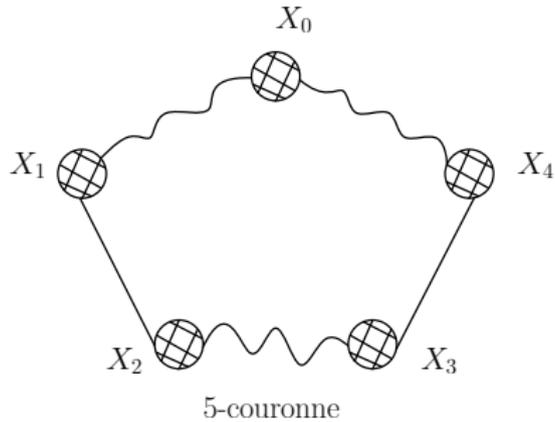
Soit  $G$  un graphe. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents :

- (a)  $G$  est sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  et ne contient pas de sommet simplicial ;
- (b)  $G$  a une seule composante anti-connexe non-triviale et cette composante anti-connexe est une 5-couronne ou un 5-panier.

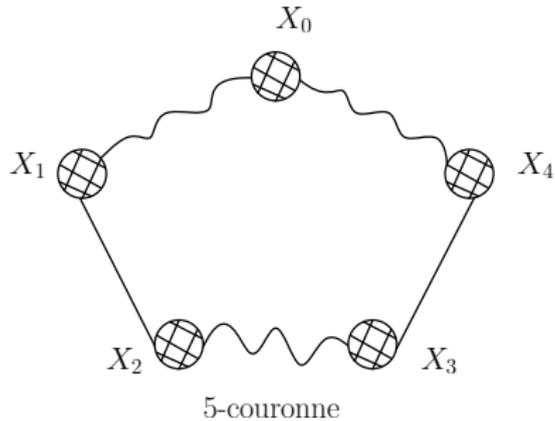
- Les composantes anti-connexe et les sommets simpliciaux ne posent pas de problèmes pour la coloration.
- Comment colorer les 5-couronnes et les 5-paniers (sans utiliser la largeur de clique) ?



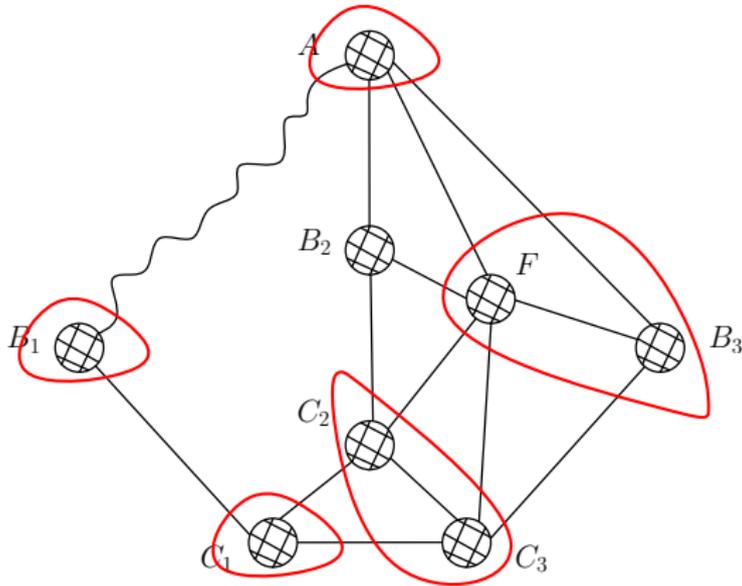
- Les 5-couronnes sont des anneaux.



- Les 5-couronnes sont des anneaux.
- Donc, on peut les colorer en temps  $O(n^6)$ .



- Les 5-couronnes sont des anneaux.
- Donc, on peut les colorer en temps  $O(n^6)$ .
- Et les 5-paniers ?



$Q$  - 5-panier (version 1)

- $Q \setminus B_2$  est sous-graphe induit d'un anneau.
- Donc, le nombre chromatique d'un sous-graphe induit de  $Q \setminus B_2$  peut être calculé en temps  $O(n^3)$  et une coloration optimale peut être trouvée en temps  $O(n^6)$ .

- L'idée pour colorer un 5-panier  $Q$  :

- L'idée pour colorer un 5-panier  $Q$  :
  - D'abord, on choisit de manière commode  $O(n^2)$  sous-ensembles  $X \subseteq V(Q)$  t.q. :
    - $B_2 \subseteq X$  (donc,  $Q \setminus X$  est sous-graphe induit d'un anneau),
    - $Q[X]$  est cordal et vérifie  $\chi(Q[X]) = |B_2|$ .et t.q. l'ensemble  $X$  "optimal" (c.à.d. l'ensemble  $X$  pour lequel  $\chi(Q \setminus X)$  est minimum) vérifie  $\chi(Q[X]) + \chi(Q \setminus X) = \chi(Q)$ .

- L'idée pour colorer un 5-panier  $Q$  :
  - D'abord, on choisit de manière commode  $O(n^2)$  sous-ensembles  $X \subseteq V(Q)$  t.q. :
    - $B_2 \subseteq X$  (donc,  $Q \setminus X$  est sous-graphe induit d'un anneau),
    - $Q[X]$  est cordal et vérifie  $\chi(Q[X]) = |B_2|$ .
 et t.q. l'ensemble  $X$  "optimal" (c.à.d. l'ensemble  $X$  pour lequel  $\chi(Q \setminus X)$  est minimum) vérifie  $\chi(Q[X]) + \chi(Q \setminus X) = \chi(Q)$ .
  - On calcule  $\chi(Q \setminus X)$  pour tous nos ensembles  $X$ .
    - Pour un seul  $X$  :  $O(n^3)$ .
    - Pour tous les  $X$  :  $O(n^5)$ .

- L'idée pour colorer un 5-panier  $Q$  :
  - D'abord, on choisit de manière commode  $O(n^2)$  sous-ensembles  $X \subseteq V(Q)$  t.q. :
    - $B_2 \subseteq X$  (donc,  $Q \setminus X$  est sous-graphe induit d'un anneau),
    - $Q[X]$  est cordal et vérifie  $\chi(Q[X]) = |B_2|$ .
 et t.q. l'ensemble  $X$  "optimal" (c.à.d. l'ensemble  $X$  pour lequel  $\chi(Q \setminus X)$  est minimum) vérifie  $\chi(Q[X]) + \chi(Q \setminus X) = \chi(Q)$ .
  - On calcule  $\chi(Q \setminus X)$  pour tous nos ensembles  $X$ .
    - Pour un seul  $X$  :  $O(n^3)$ .
    - Pour tous les  $X$  :  $O(n^5)$ .
  - Pour notre  $X$  optimal, on colore  $Q[X]$  (cordal) et  $Q \setminus X$  (sous-graphe induit d'un anneau) en temps  $O(n^6)$ .

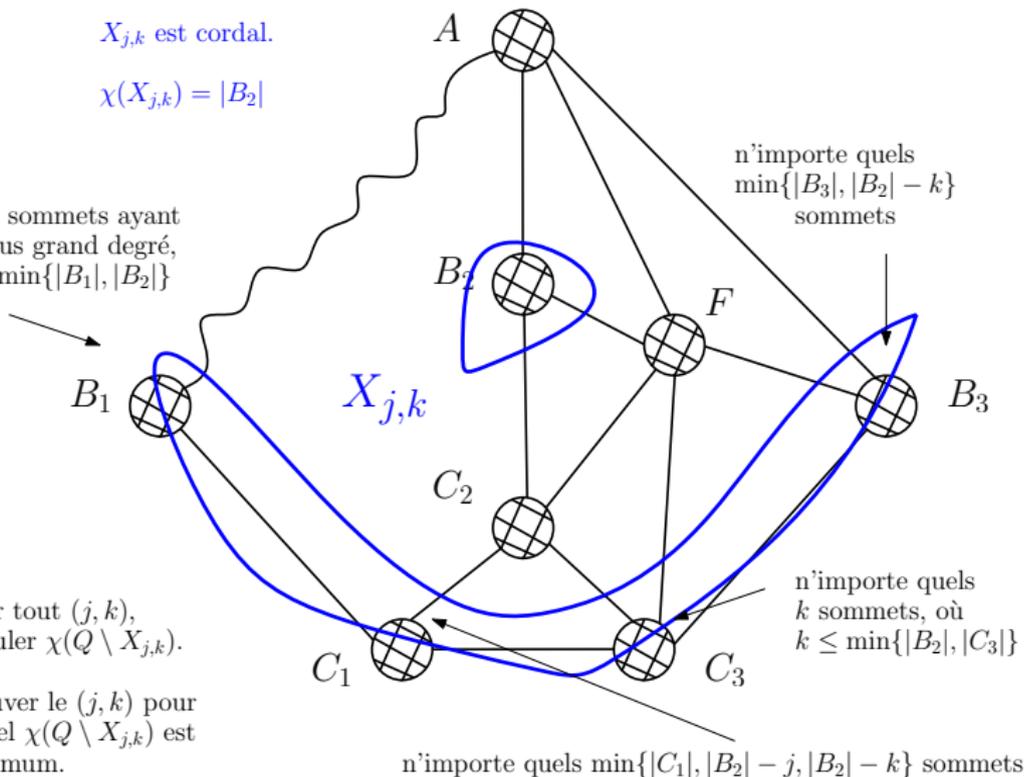
- L'idée pour colorer un 5-panier  $Q$  :
  - D'abord, on choisit de manière commode  $O(n^2)$  sous-ensembles  $X \subseteq V(Q)$  t.q. :
    - $B_2 \subseteq X$  (donc,  $Q \setminus X$  est sous-graphe induit d'un anneau),
    - $Q[X]$  est cordal et vérifie  $\chi(Q[X]) = |B_2|$ .
 et t.q. l'ensemble  $X$  "optimal" (c.à.d. l'ensemble  $X$  pour lequel  $\chi(Q \setminus X)$  est minimum) vérifie  $\chi(Q[X]) + \chi(Q \setminus X) = \chi(Q)$ .
  - On calcule  $\chi(Q \setminus X)$  pour tous nos ensembles  $X$ .
    - Pour un seul  $X$  :  $O(n^3)$ .
    - Pour tous les  $X$  :  $O(n^5)$ .
  - Pour notre  $X$  optimal, on colore  $Q[X]$  (cordal) et  $Q \setminus X$  (sous-graphe induit d'un anneau) en temps  $O(n^6)$ .
  - Donc, on obtient une coloration optimale de  $Q$  en temps  $O(n^6)$ .

$X_{j,k}$  est cordal.

$$\chi(X_{j,k}) = |B_2|$$

les  $j$  sommets ayant  
le plus grand degré,  
 $j \leq \min\{|B_1|, |B_2|\}$

n'importe quels  
 $\min\{|B_3|, |B_2| - k\}$   
sommets



Pour tout  $(j, k)$ ,  
calculer  $\chi(Q \setminus X_{j,k})$ .

Trouver le  $(j, k)$  pour  
lequel  $\chi(Q \setminus X_{j,k})$  est  
minimum.

n'importe quels  
 $k$  sommets, où  
 $k \leq \min\{|B_2|, |C_3|\}$

n'importe quels  $\min\{|C_1|, |B_2| - j, |B_2| - k\}$  sommets

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  peuvent être colorés en temps  $O(n^6)$ .

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  peuvent être colorés en temps  $O(n^6)$ .

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  contenant un  $C_7$  induit peuvent être colorés en temps  $O(n^9)$ .

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6, C_7)$  peuvent être colorés en temps  $O(n^6)$ .

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

Les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  contenant un  $C_7$  induit peuvent être colorés en temps  $O(n^9)$ .

### Théorème [P., 2020<sup>+</sup>]

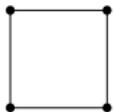
Les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  peuvent être colorés en temps  $O(n^9)$ .

- Rappel : Les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$  sont exactement les graphes sans trou pair et du nombre de stabilité  $\leq 3$ .

- Problèmes ouverts :

- Problèmes ouverts :

- Quelle est la complexité du problème de la COLORATION pour les graphes sans trou pair ?



$C_4$



$C_6$



$C_8$



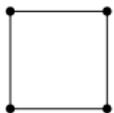
$C_{10}$



$C_{12}$

- Problèmes ouverts :

- Quelle est la complexité du problème de la COLORATION pour les graphes sans trou pair ?



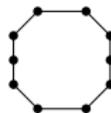
$C_4$



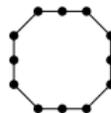
$C_6$



$C_8$



$C_{10}$



$C_{12}$

- Quelle est la complexité du problème de la COLORATION pour les graphes sans  $(4K_1, C_4)$  ?



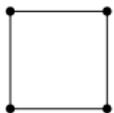
$4K_1$



$C_4$

- Problèmes ouverts :

- Quelle est la complexité du problème de la COLORATION pour les graphes sans trou pair ?



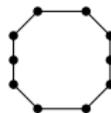
$C_4$



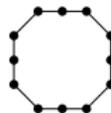
$C_6$



$C_8$



$C_{10}$



$C_{12}$

- Quelle est la complexité du problème de la COLORATION pour les graphes sans  $(4K_1, C_4)$  ?



$4K_1$



$C_4$

- Quelle est la complexité du problème du STABLE MAXIMUM pour les graphes sans trou pair ?

C'est tout !

Merci.