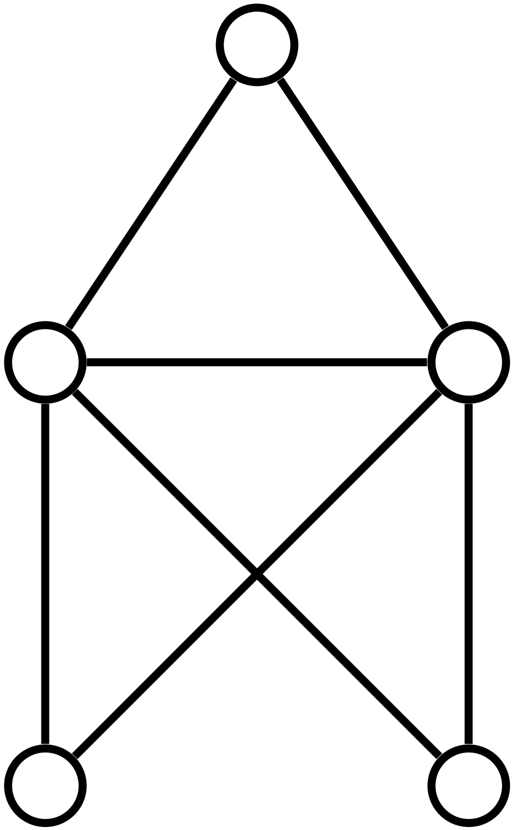
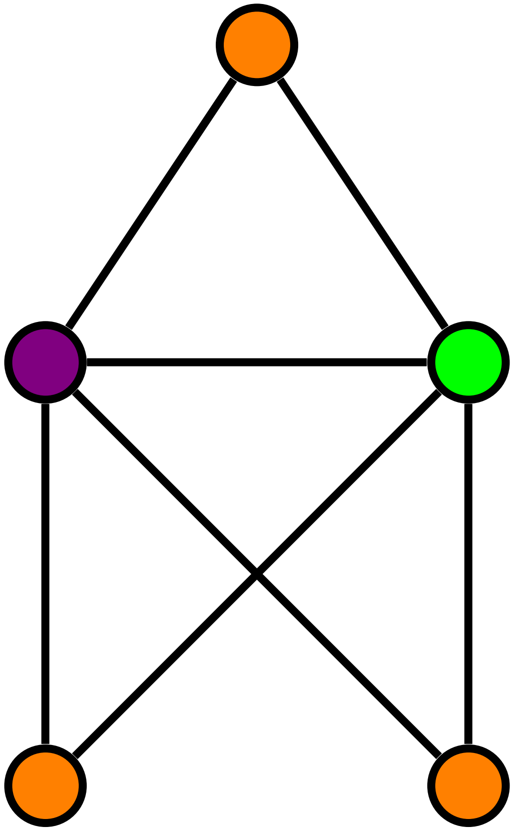
Homomorphismes de graphes (m,n)-mixtes-coloriés planaires vers des graphes cibles planaires

Fabien JACQUES, Pascal OCHEM
LIRMM, Université de Montpellier, CNRS, France

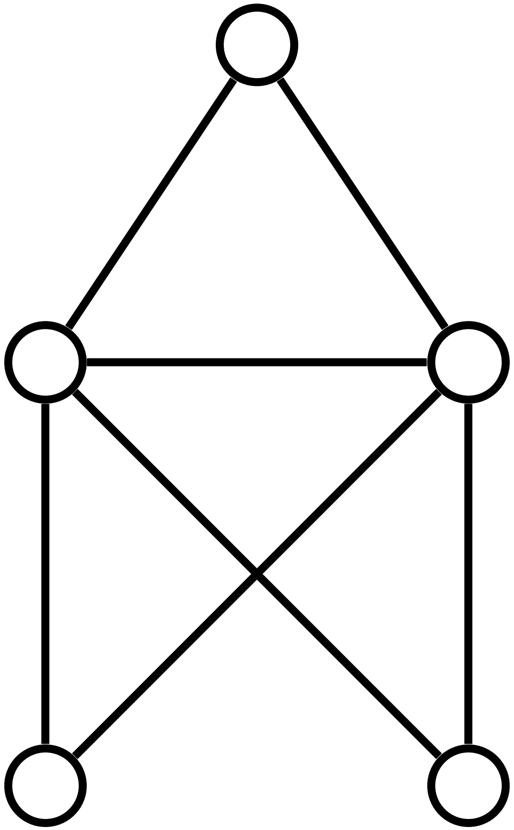
Coloration



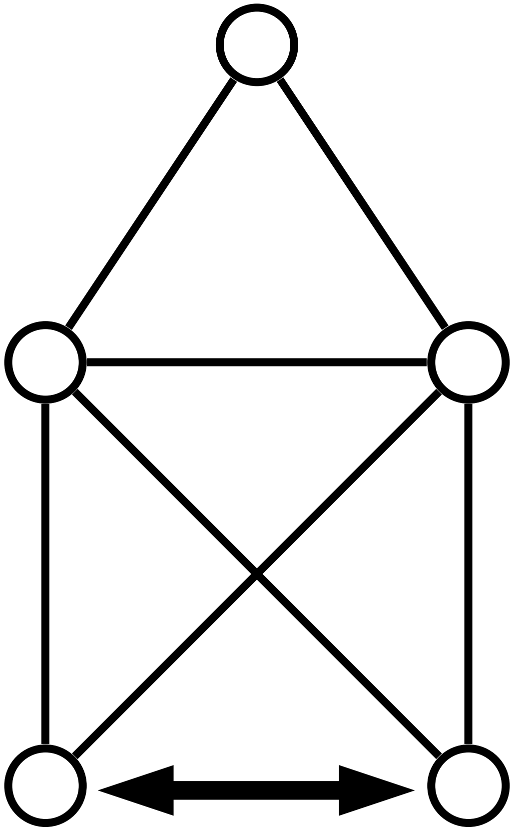
Coloration



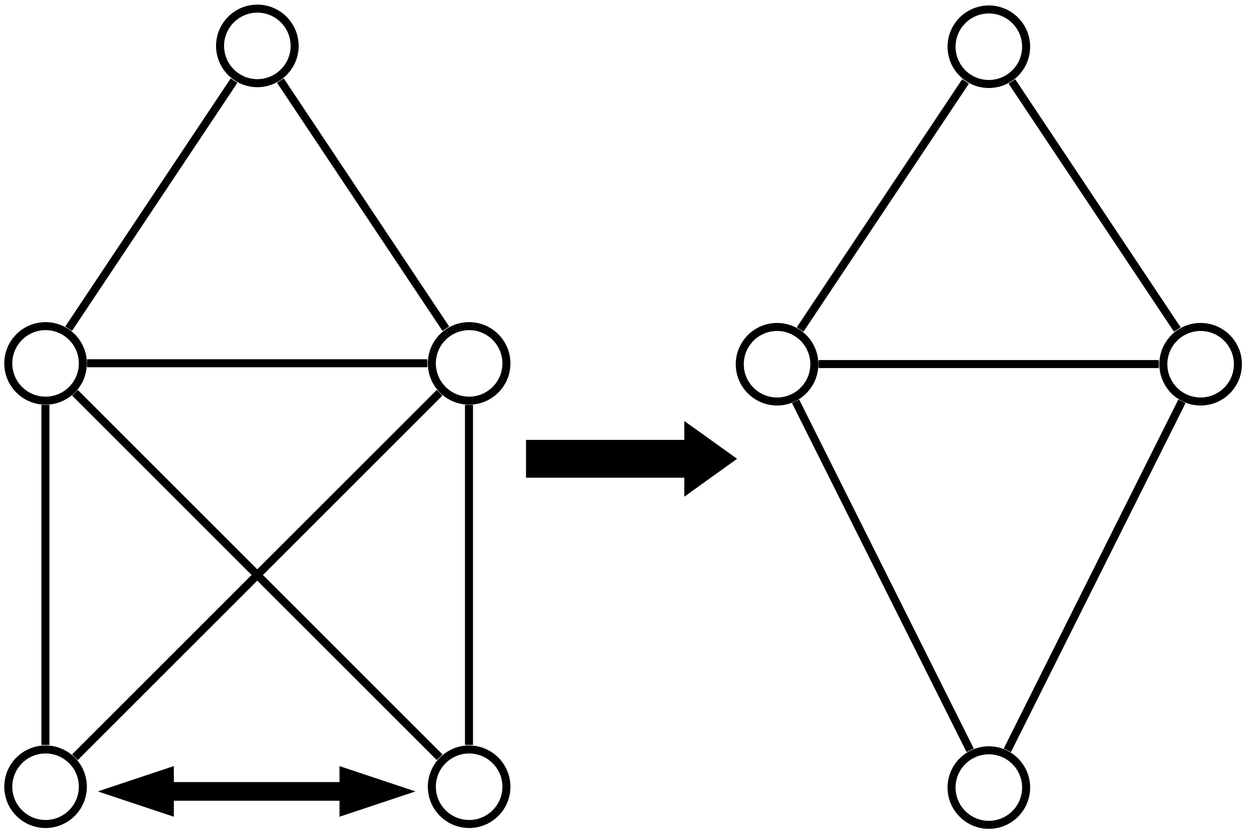
Homomorphismes



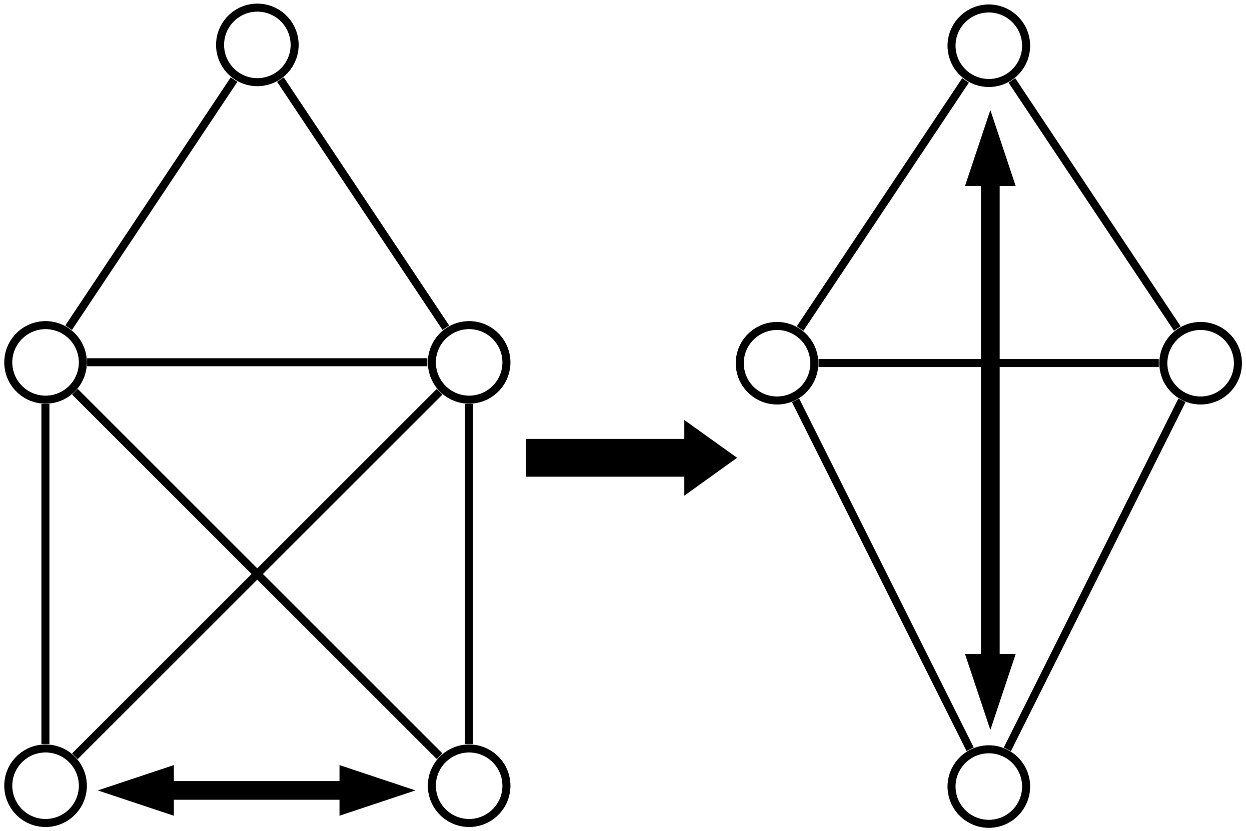
Homomorphismes



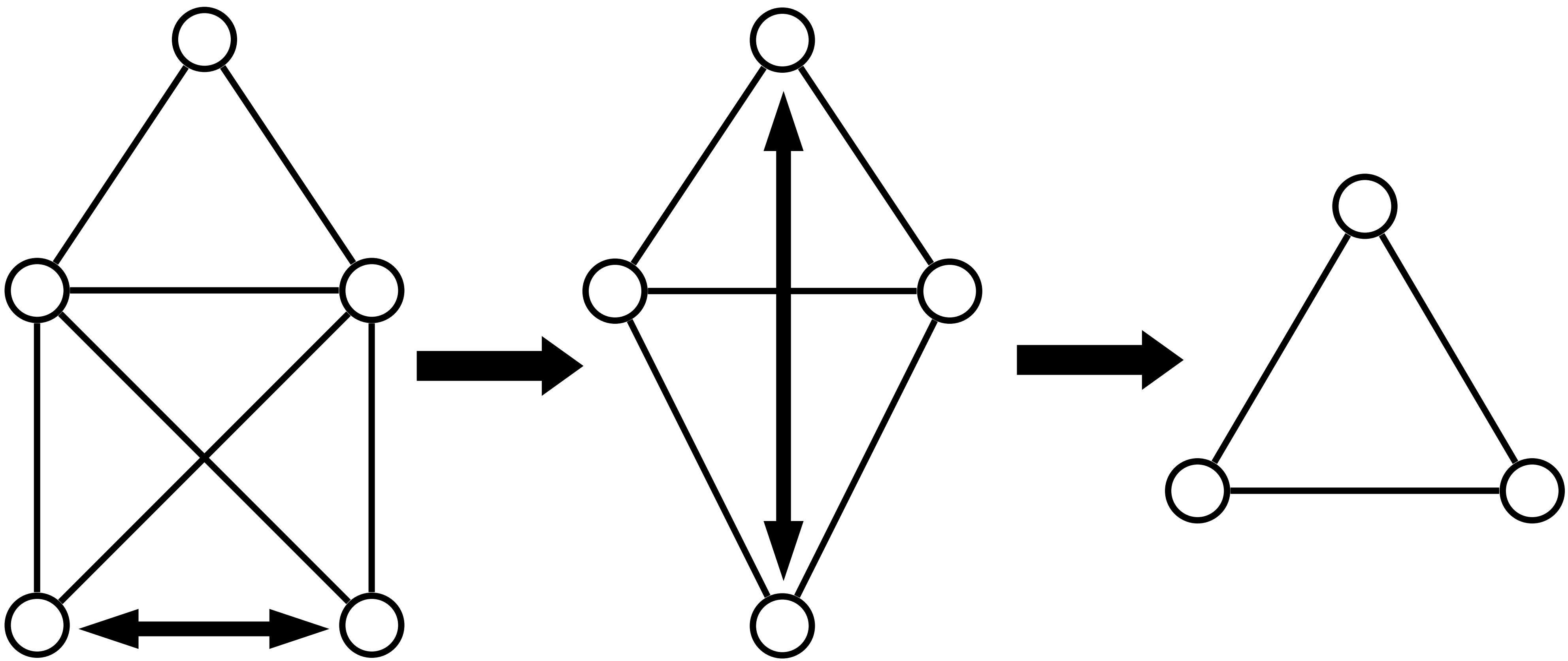
Homomorphismes



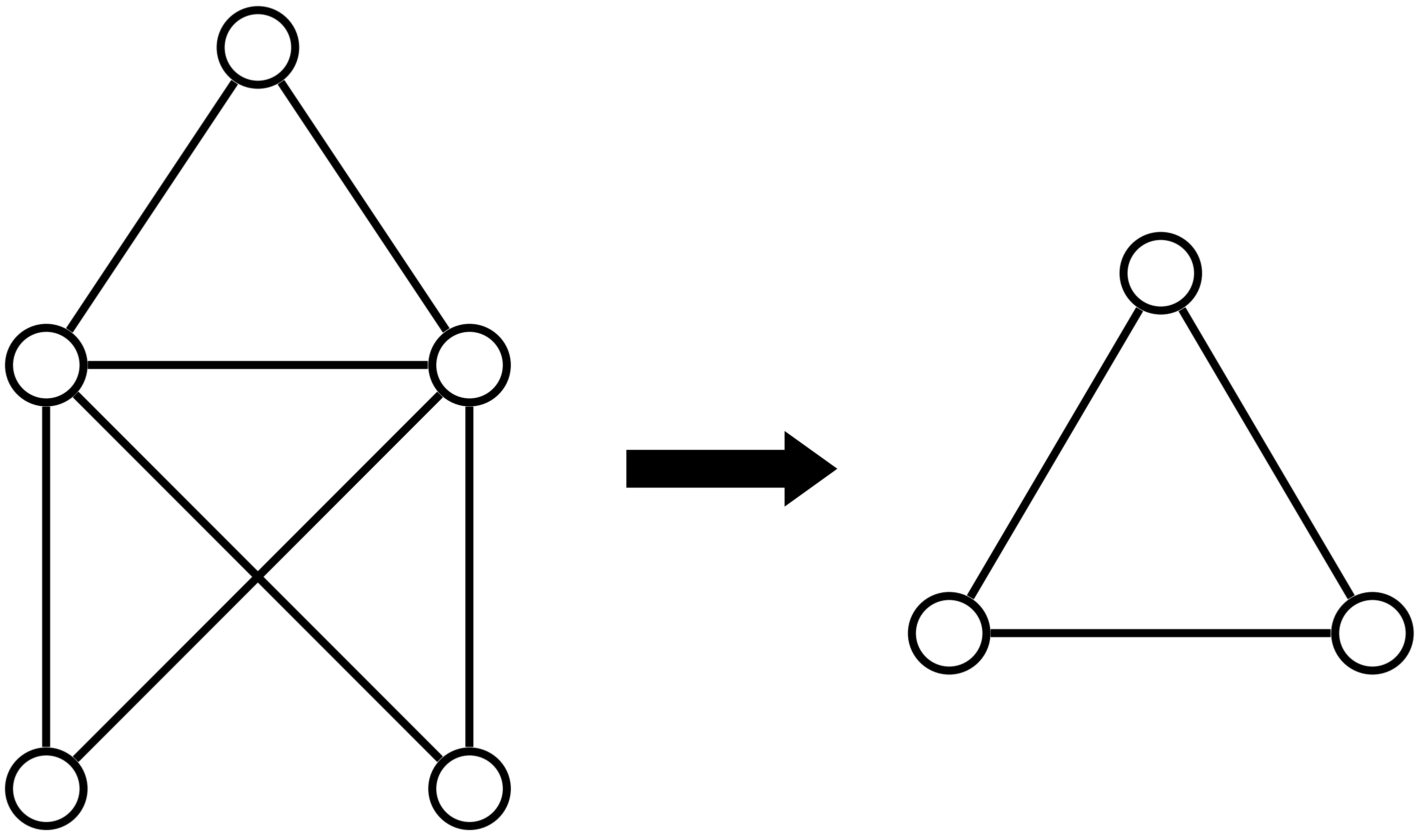
Homomorphismes



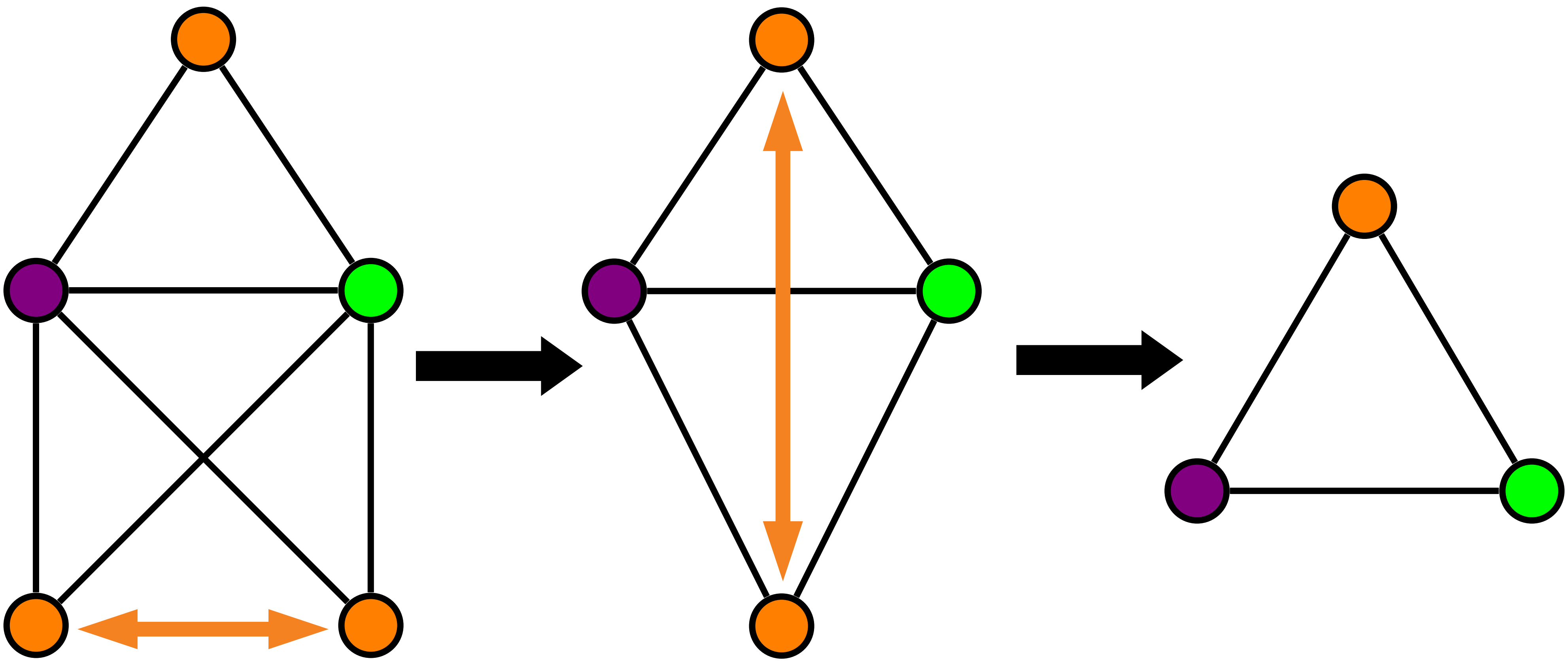
Homomorphismes



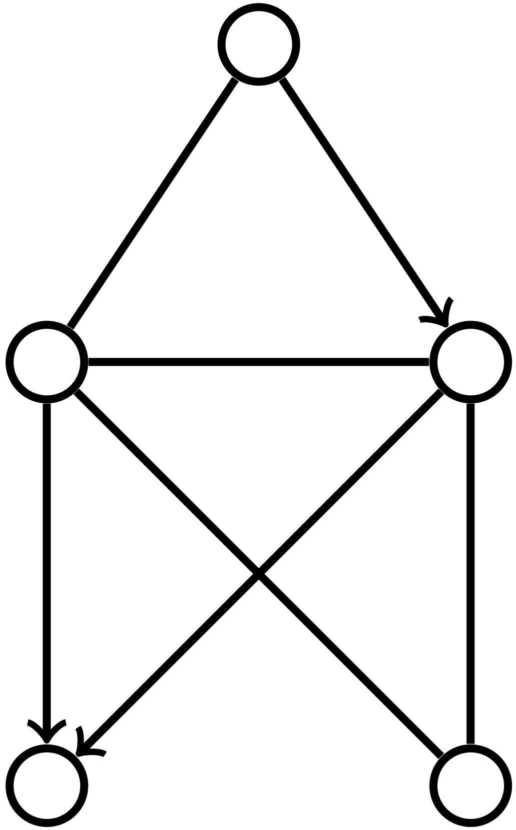
Homomorphismes



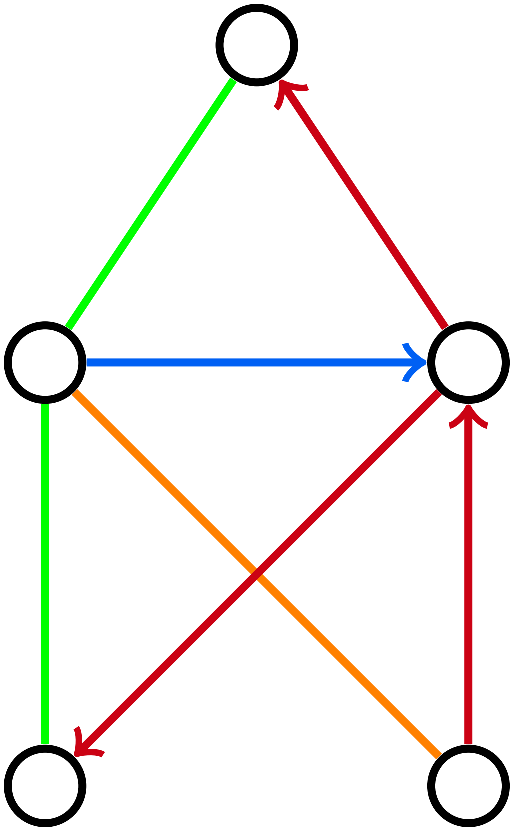
Homomorphismes



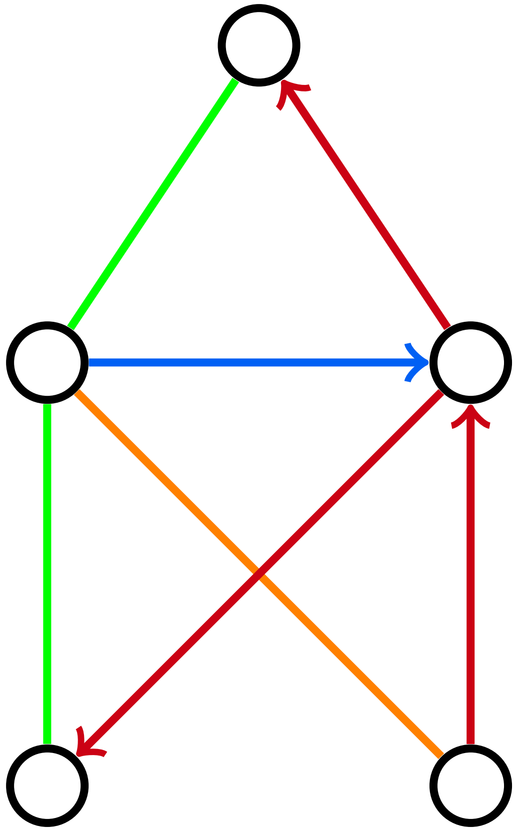
Graphes Mixtes



Graphes (m, n)-mixtes-coloriés

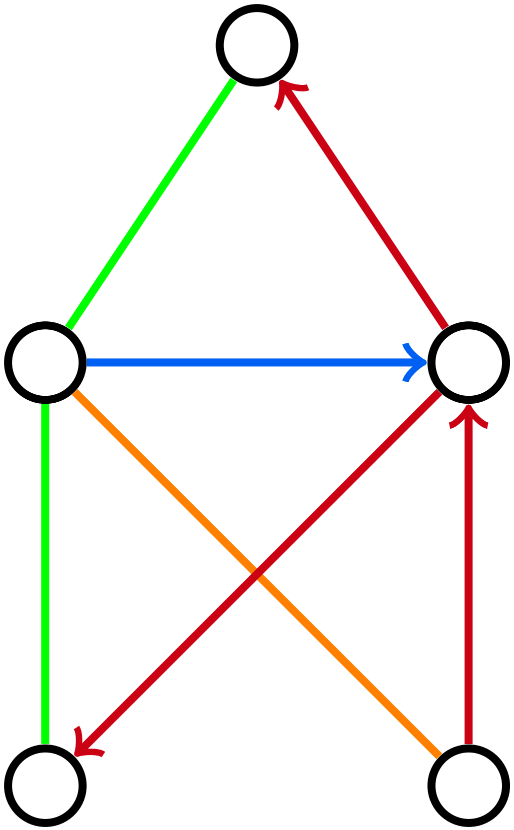


Graphes (m, n)-mixtes-coloriés



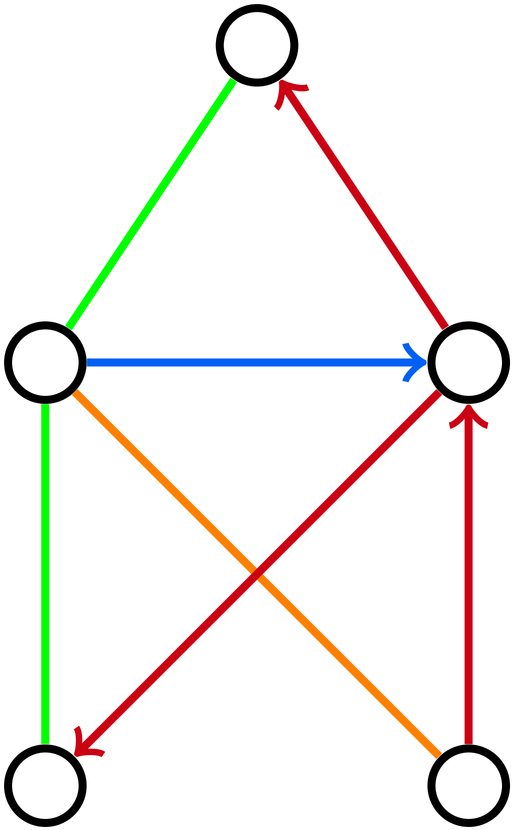
m types d’arcs et

Graphes (m, n)-mixtes-coloriés



m types d'arcs et
n types d'arêtes

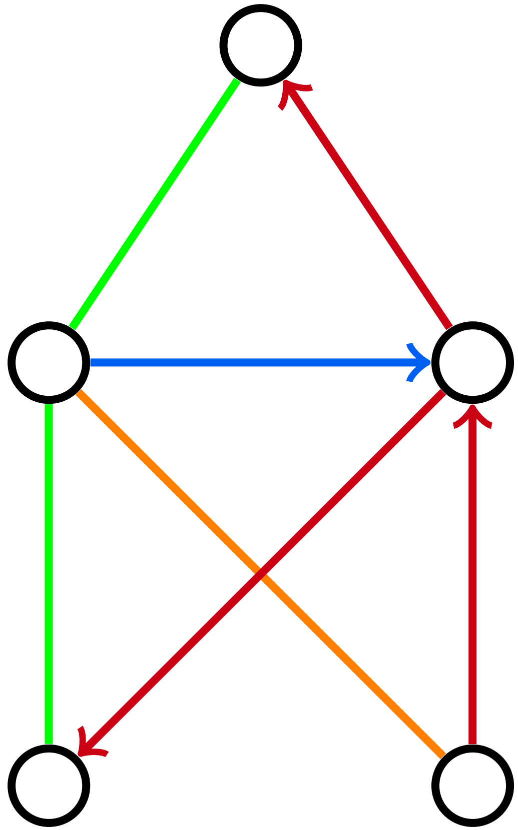
Graphes (m, n)-mixtes-coloriés



m types d'arcs et n types d'arêtes

$$G = (V, A_1, A_2, ..., A_m, E_1, E_2, ..., E_n)$$

Graphes (m, n)-mixtes-coloriés

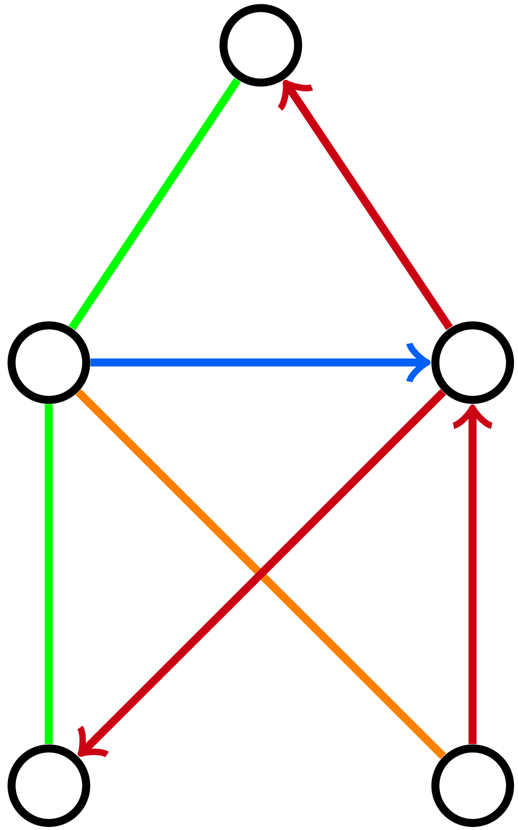


m types d'arcs et
n types d'arêtes

$$G = (V, A_1, A_2, ..., A_m, E_1, E_2, ..., E_n)$$

Graphes (0, 1)-mixtes-coloriés
= graphes simples

Graphes (m, n)-mixtes-coloriés



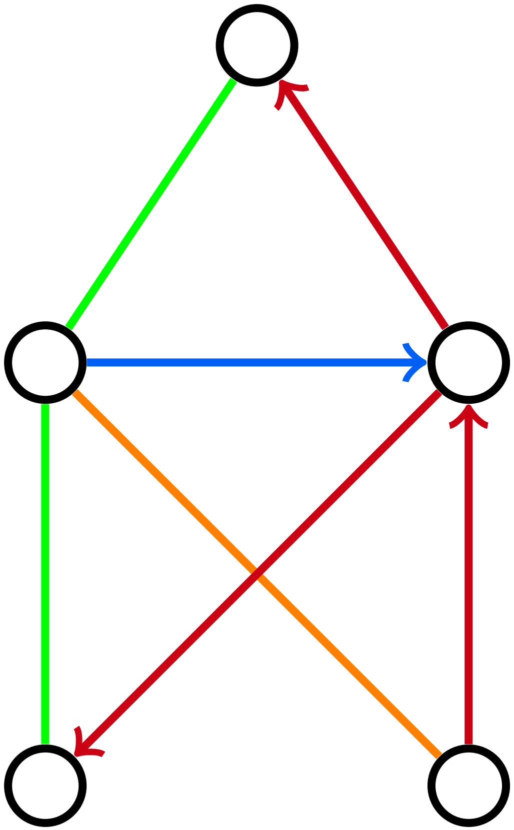
Graphes (0, 1)-mixtes-coloriés = graphes simples

Graphes (1, 0)-mixtes-coloriés = graphes orientés

m types d'arcs et n types d'arêtes

$$G = (V, A_1, A_2, ..., A_m, E_1, E_2, ..., E_n)$$

Graphes (m, n)-mixtes-coloriés



m types d'arcs et n types d'arêtes

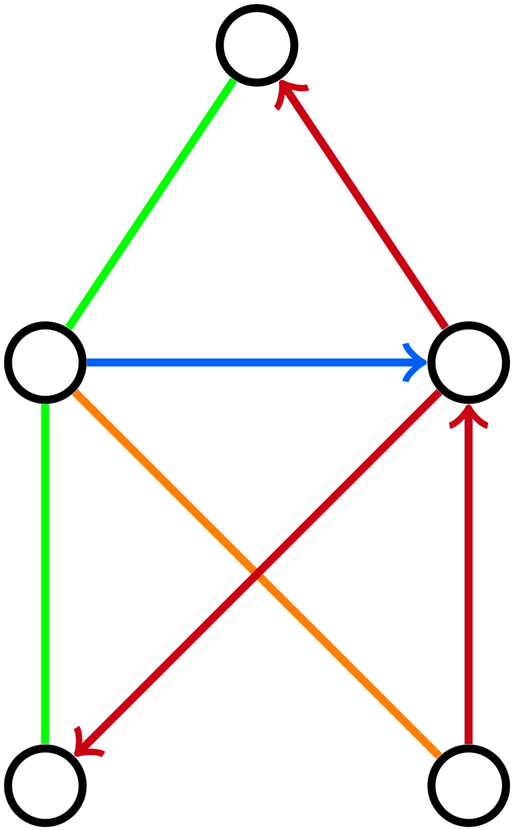
$$G = (V, A_1, A_2, ..., A_m, E_1, E_2, ..., E_n)$$

Graphes (0, 1)-mixtes-coloriés = graphes simples

Graphes (1, 0)-mixtes-coloriés = graphes orientés

Graphes (0, k)-mixtes-coloriés = graphes k-arête-coloriés

Graphes (m, n)-mixtes-coloriés



m types d'arcs et n types d'arêtes

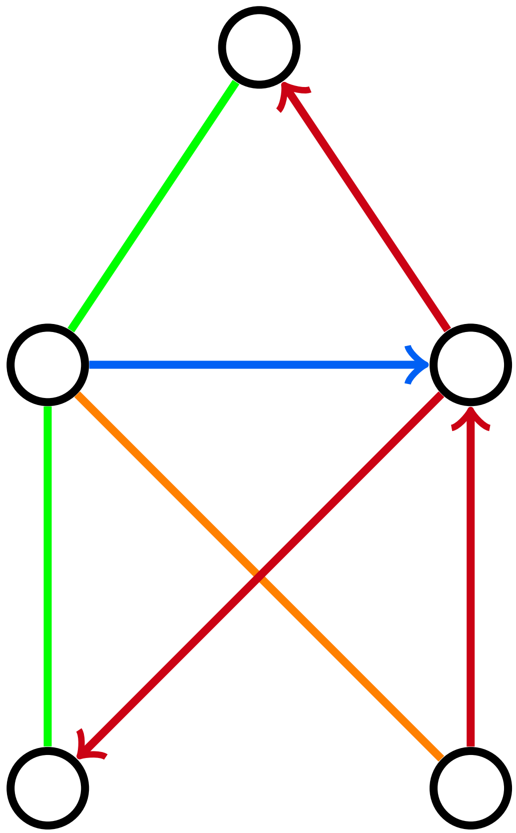
$$G = (V, A_1, A_2, ..., A_m, E_1, E_2, ..., E_n)$$

Graphes (0, 1)-mixtes-coloriés = graphes simples

Graphes (1, 0)-mixtes-coloriés = graphes orientés

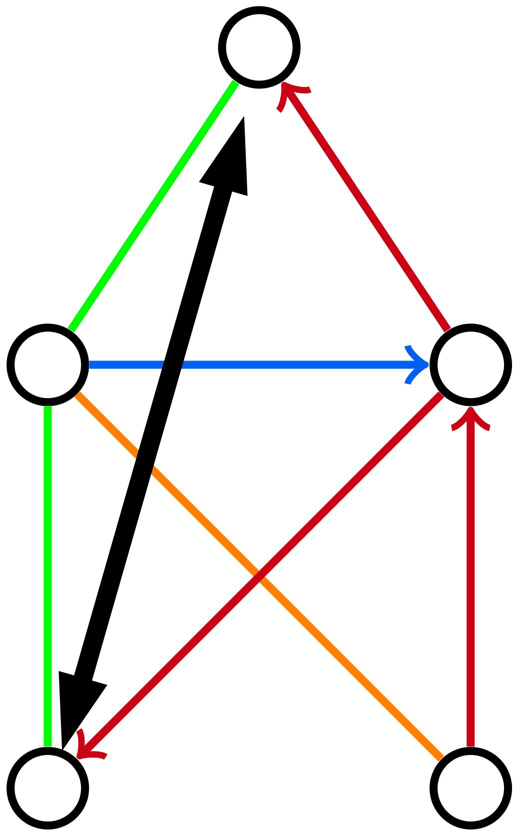
Graphes (0, k)-mixtes-coloriés = graphes k-arête-coloriés

Homomorphismes de graphes (m, n)-mixtes-coloriés

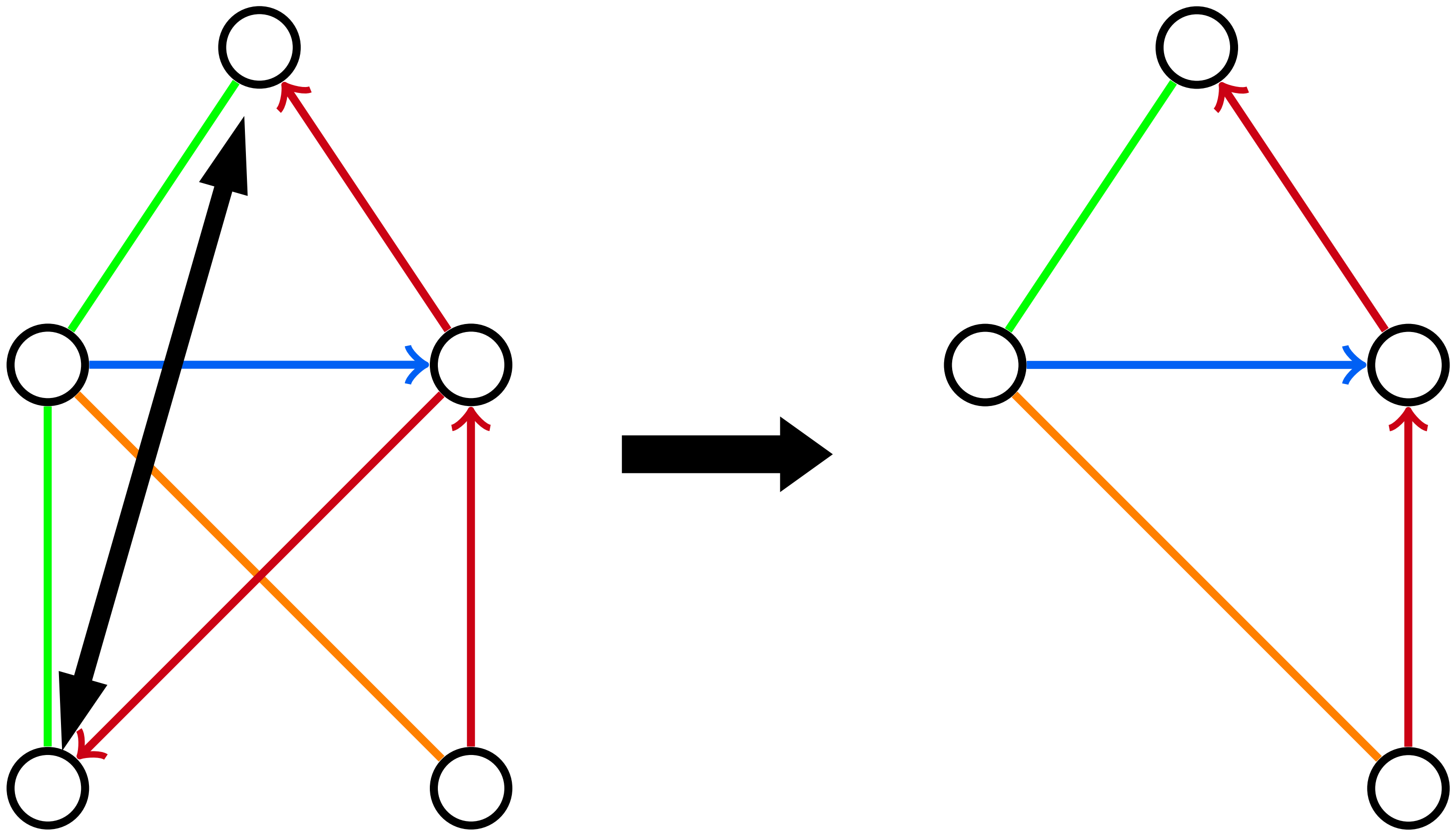


Homomorphismes de graphes (m, n)-mixtes-coloriés

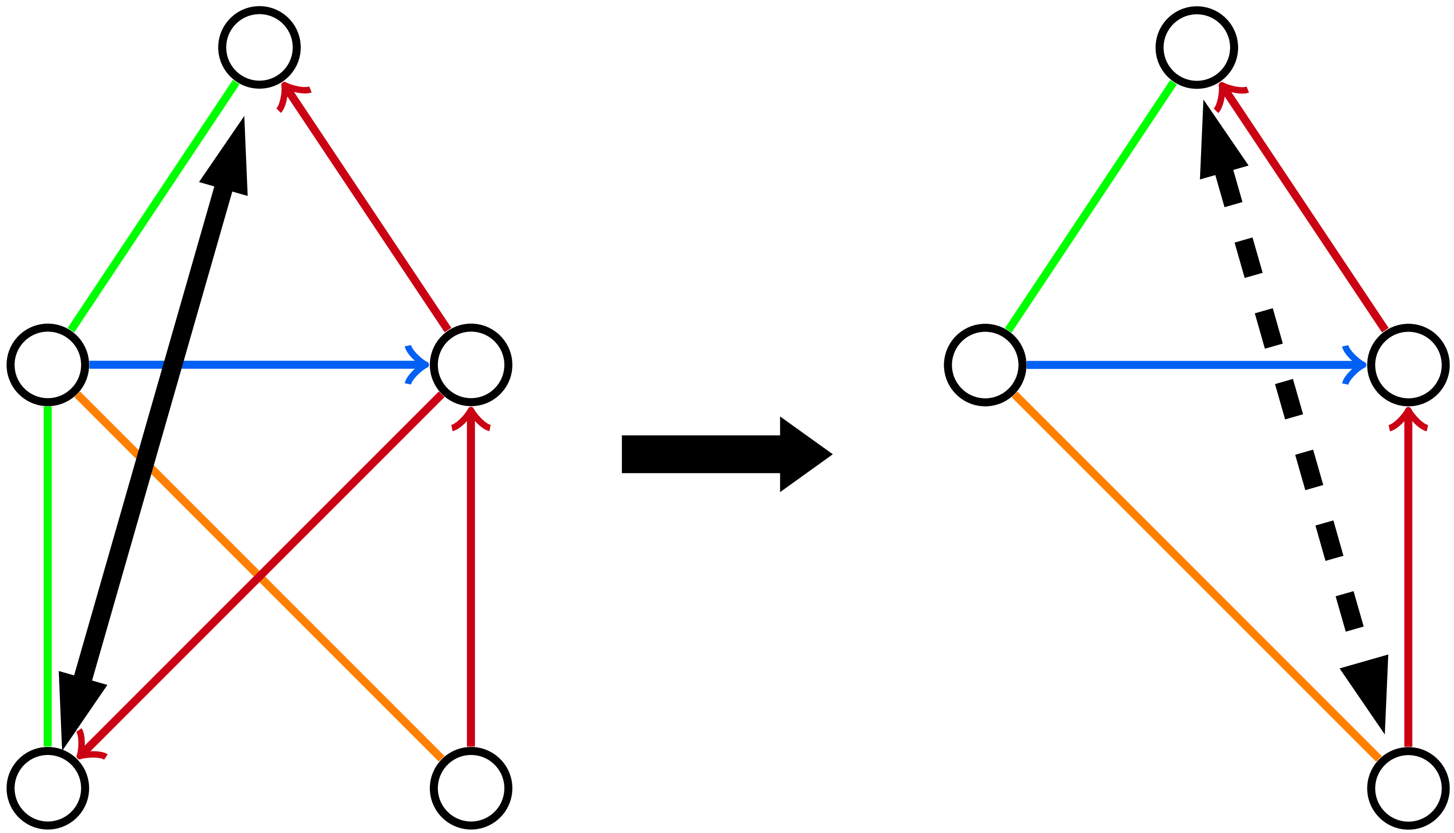
$(\vec{m}, \overline{n})$



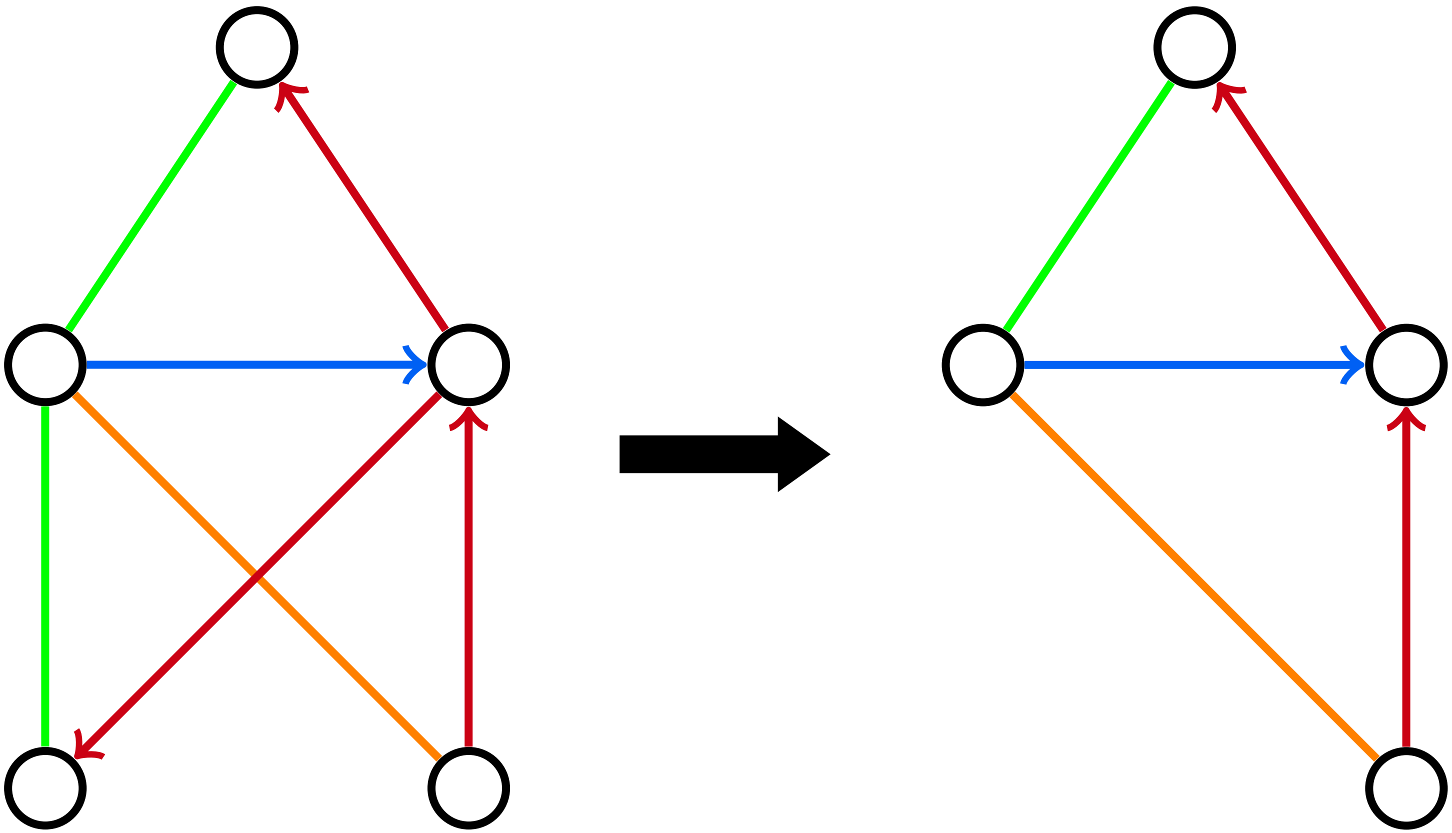
Homomorphismes de graphes (m, n)-mixtes-coloriés



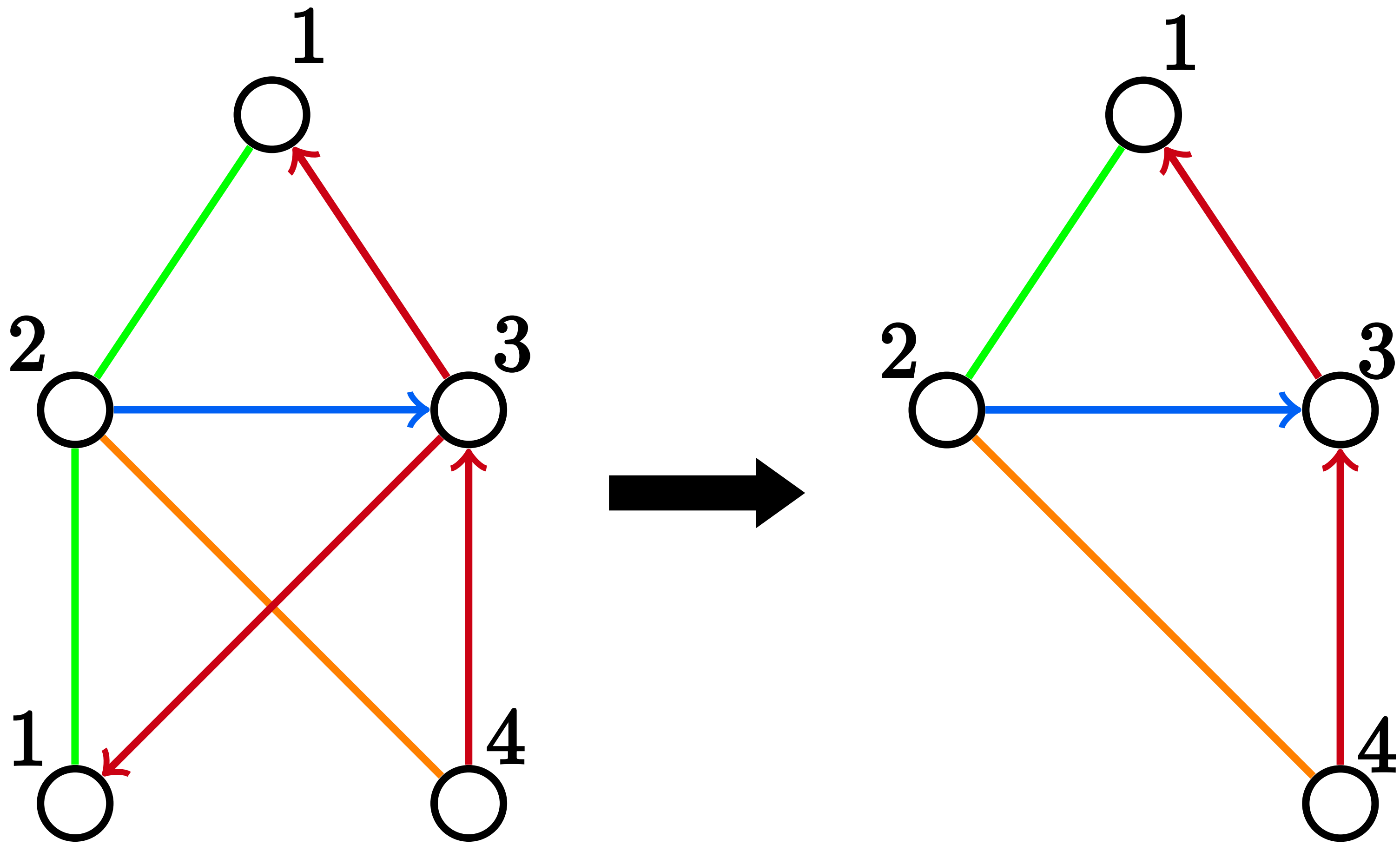
Homomorphismes de graphes (m, n)-mixtes-coloriés



Homomorphismes de graphes (m, n)-mixtes-coloriés



Homomorphismes de graphes (m, n)-mixtes-coloriés



Graphes planaires et maille

$$P_g^{(m,n)}$$

Graphes planaires et maille

$P_g^{(m,n)}$ = La classe des graphes (m, n)-mixtes-coloriés planaires de maille au moins g

Graphes planaires et maille

$P_g^{(m,n)}$ = La classe des graphes (m, n)-mixtes-coloriés planaires de maille au moins g

T est $P_g^{(m,n)}$-universel

Graphes planaires et maille

$$P_g^{(m,n)} =$$ La classe des graphes (m, n)-mixtes-coloriés planaires de maille au moins g

$$T \text{ est } P_g^{(m,n)}\text{-universel}$$

$$\iff \forall G \in P_g^{(m,n)}, G \to T$$

Graphes planaires et maille

$P_g^{(m,n)}$ **=** La classe des graphes (m, n)-mixtes-coloriés planaires de maille au moins g

$$T \text{ est } P_g^{(m,n)}\text{-universel}$$

$$\iff \forall G \in P_g^{(m,n)}, G \to T$$

$$\iff P_g^{(m,n)} \to T$$

Objectif

Objectif :

Objectif

Objectif : Étant donné (m, n), existe-t-il un graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire** ? (peu importe g)

Objectif

Objectif : Étant donné (m, n), existe-t-il un graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire** ? (peu importe g)

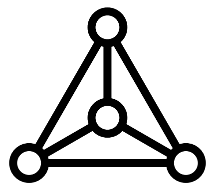
Si oui, quelle est la taille minimale d'un tel graphe ?

Objectif

Objectif : Étant donné (m, n), existe-t-il un graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire** ? (peu importe g)

Si oui, quelle est la taille minimale d'un tel graphe ?

$$P_3^{(0,1)}$$

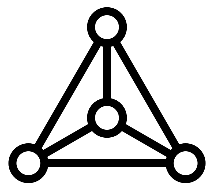


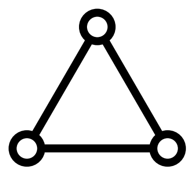
(four color theorem)

Objectif

Objectif : Étant donné (m,n), existe-t-il un graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire** ? (peu importe g)

Si oui, quelle est la taille minimale d'un tel graphe ?

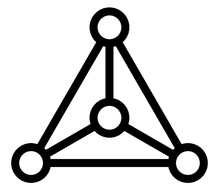
$P_3^{(0,1)}$ $\Rightarrow$  (four color theorem)

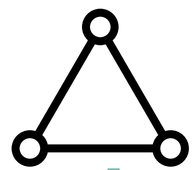
$P_4^{(0,1)}$ $\Rightarrow$  (Grötzsch's theorem)

Objectif

Objectif : Étant donné (m,n), existe-t-il un graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire** ? (peu importe g)

Si oui, quelle est la taille minimale d'un tel graphe ?

$P_3^{(0,1)}$  (four color theorem)

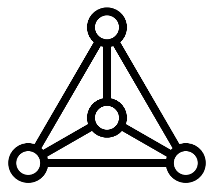
$P_4^{(0,1)}$  (Grötzsch's theorem)

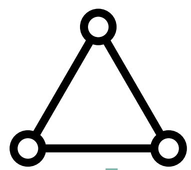
Optimal

Objectif

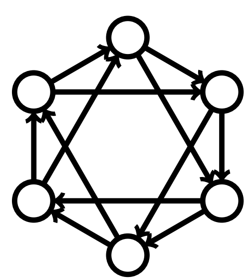
Objectif : Étant donné (m, n), existe-t-il un graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire** ? (peu importe g)

Si oui, quelle est la taille minimale d'un tel graphe ?

$P_3^{(0,1)}$ →  (four color theorem)

$P_4^{(0,1)}$ →  (Grötzsch's theorem)

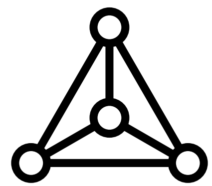
Optimal

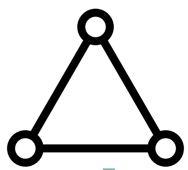
$P_{16}^{(1,0)}$ →  Borodin, Kostochka, Nešetřil, Raspaud, Sopena (1998)

Objectif

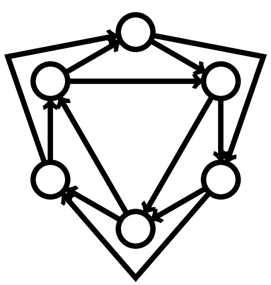
Objectif : Étant donné (m,n), existe-t-il un graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire** ? (peu importe g)

Si oui, quelle est la taille minimale d'un tel graphe ?

$P_3^{(0,1)}$ ➡  (four color theorem)

$P_4^{(0,1)}$ ➡  (Grötzsch's theorem)

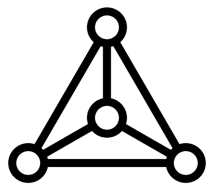
Optimal

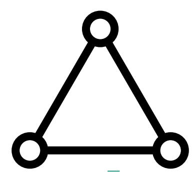
$P_{16}^{(1,0)}$ ➡  Borodin, Kostochka, Nešetřil, Raspaud, Sopena (1998)

Objectif

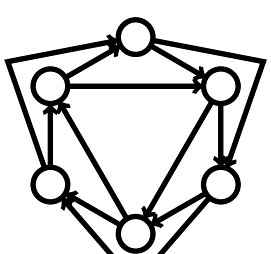
Objectif : Étant donné (m,n), existe-t-il un graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire** ? (peu importe g)

Si oui, quelle est la taille minimale d'un tel graphe ?

$P_3^{(0,1)}$  (four color theorem)

$P_4^{(0,1)}$  (Grötzsch's theorem)

Optimal

$P_{16}^{(1,0)}$  Borodin, Kostochka, Nešetřil, Raspaud, Sopena (1998)

Optimal ?

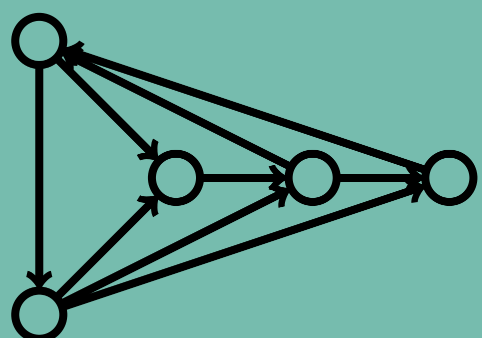
Résultats

Théorème :

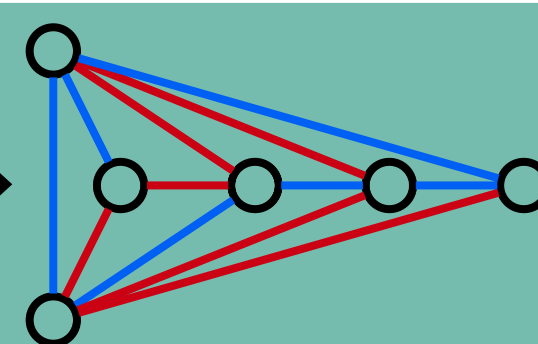
Si $2m + n \geq 3$, il n'existe pas de graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire**.

Théorème :

$P_{28}^{(1,0)}$



$P_{22}^{(0,2)}$



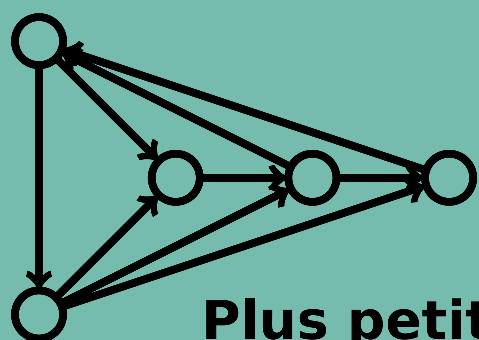
Résultats

Théorème :

Si $2m + n \geq 3$, il n'existe pas de graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire**.

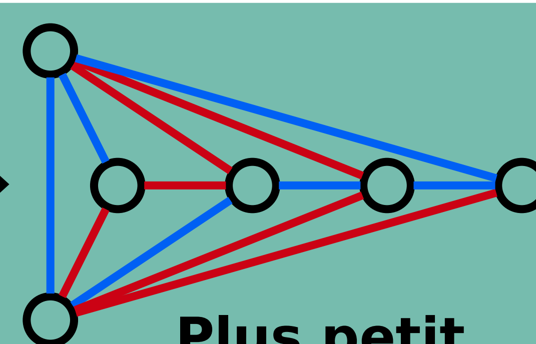
Théorème :

$P_{28}^{(1,0)} \Rightarrow$



Plus petit

$P_{22}^{(0,2)} \Rightarrow$



Plus petit

Idée de Preuve

Théorème :

Si $2m + n \geq 3$, il n'existe pas de graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire**.

Idée de Preuve

Théorème :

Si $2m + n \geq 3$, il n'existe pas de graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire**.

$$T$$

$P_g^{(m,n)}$-universel **minimal**

Idée de Preuve

Théorème :

Si $2m + n \geq 3$, il n'existe pas de graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire**.

$$G \xrightarrow{\text{Toutes les couleurs sont utilisées}} T$$

$P_g^{(m,n)}$-universel **minimal**

Idée de Preuve

Théorème :

Si $2m+n \geq 3$, il n'existe pas de graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire**.

Toutes les couleurs sont utilisées

$$P_g^{(m,n)} \ni G \Longrightarrow T$$

$P_g^{(m,n)}$-universel **minimal**

Idée de Preuve

Théorème :

Si $2m + n \geq 3$, il n'existe pas de graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire**.

Toutes les couleurs sont utilisées

$P_g^{(m,n)} \ni G \Longrightarrow T$

Connexe

$P_g^{(m,n)}$-universel **minimal**

Idée de Preuve

Théorème :

Si $2m+n \geq 3$, il n'existe pas de graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire**.

Toutes les couleurs sont utilisées

$P_g^{(m,n)} \ni G$ $\Rightarrow$ T

Connexe

$P_g^{(m,n)}$-universel **minimal**

$$\Longrightarrow \text{Nombre d'arêtes et arcs} \geq (2m+n) \cdot |V(T)| - m$$

Idée de Preuve

Théorème :

Si $2m + n \geq 3$, il n'existe pas de graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire**.

Toutes les couleurs sont utilisées

$P_g^{(m,n)} \ni G$

Connexe

T

$P_g^{(m,n)}$-universel **minimal**

$$\Longrightarrow \text{ Nombre d'arêtes et arcs} \geq (2m+n) \cdot |V(T)| - m$$

$$\text{Nombre d'arêtes et arcs d'un graphe planaire} \leq 3 \cdot |V(T)| - 6$$

Idée de Preuve

Théorème :

Si $2m + n \geq 3$, il n'existe pas de graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire**.

Toutes les couleurs sont utilisées

$P_g^{(m,n)} \ni G$ $\Rightarrow$ T

Connexe

$P_g^{(m,n)}$-universel **minimal**

$$\Longrightarrow \text{ Nombre d'arêtes et arcs} \geq (2m+n) \cdot |V(T)| - m$$

$$\text{Nombre d'arêtes et arcs d'un graphe planaire} \leq 3 \cdot |V(T)| - 6$$

Contradiction

Résultats

Résultats

Théorème :

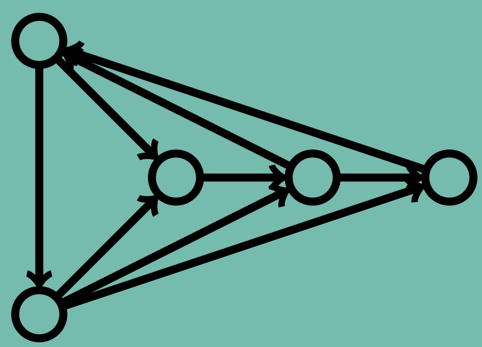
Si $2m + n \geq 3$, il n'existe pas de graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire**.

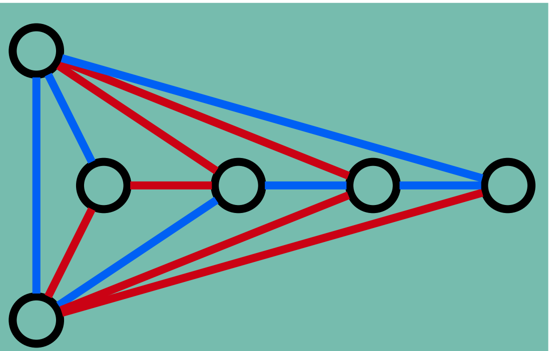
Résultats

Théorème :

Si $2m + n \geq 3$, il n'existe pas de graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire**.

Théorème :

$P_{28}^{(1,0)}$ 

$P_{22}^{(0,2)}$ 

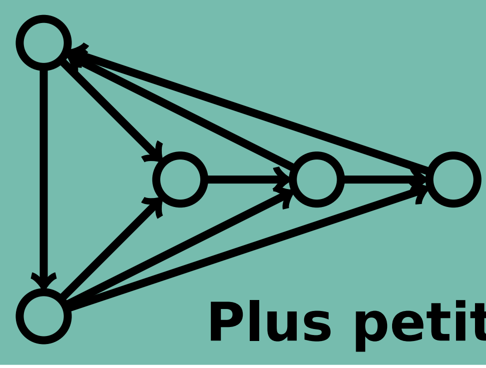
Résultats

Théorème :

Si $2m + n \geq 3$, il n'existe pas de graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire**.

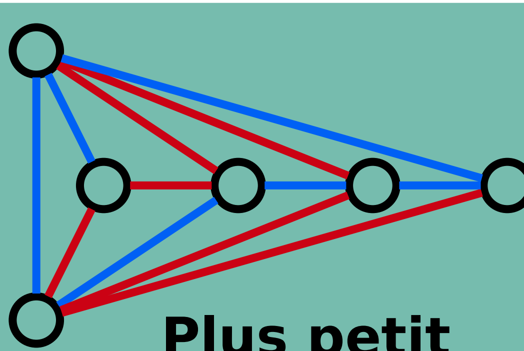
Théorème :

$P_{28}^{(1,0)}$



Plus petit

$P_{22}^{(0,2)}$

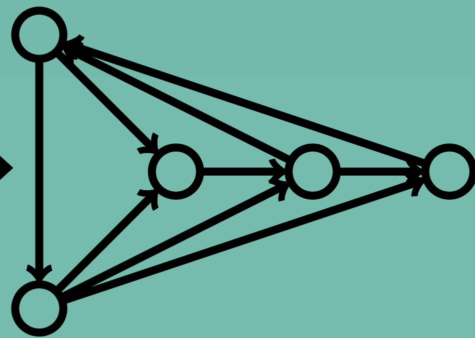


Plus petit

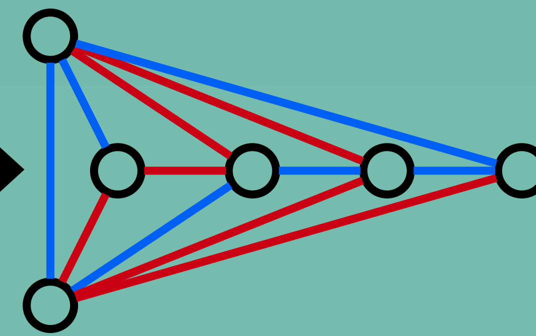
Idée de Preuve

Théorème :

$P_{28}^{(1,0)}$



$P_{22}^{(0,2)}$

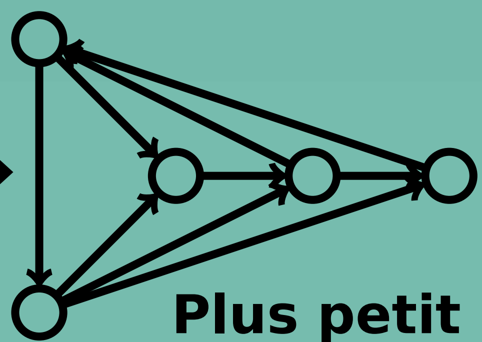


Idée de Preuve

$(\vec{m}, \overline{n})$

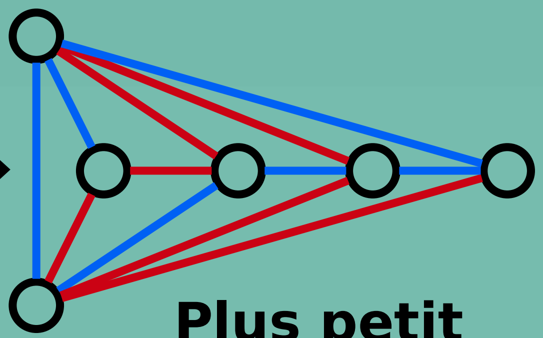
Théorème :

$P_{28}^{(1,0)}$ $\Rightarrow$



Plus petit

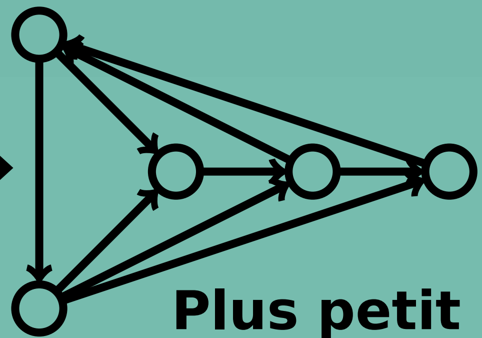
$P_{22}^{(0,2)}$ $\Rightarrow$



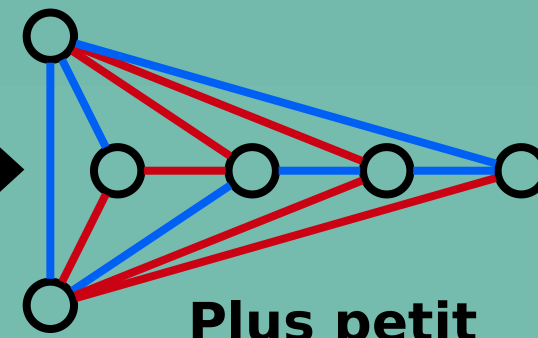
Plus petit

Idée de Preuve

Théorème :

$P_{28}^{(1,0)}$ ➡ 

Plus petit

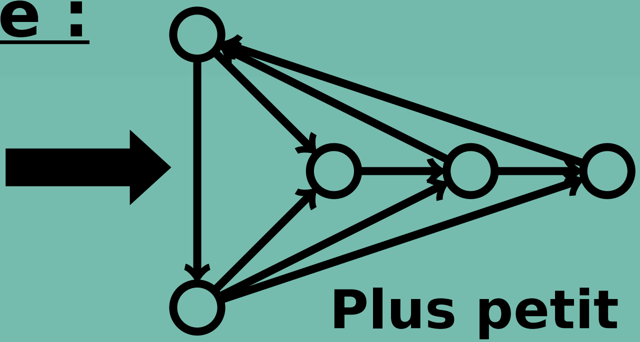
$P_{22}^{(0,2)}$ ➡ 

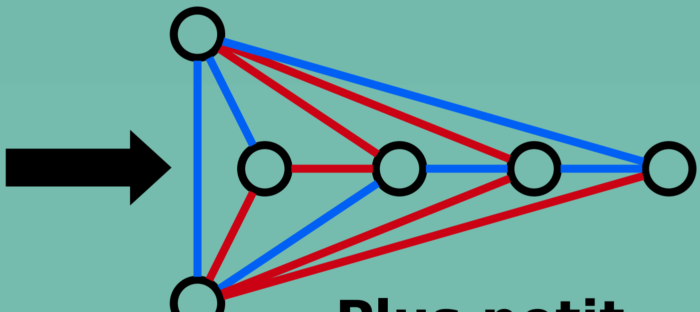
Plus petit

$P_g^{(1,0)}$-universel avec 4 sommets ?

Idée de Preuve

Théorème :

$P_{28}^{(1,0)}$ 

$P_{22}^{(0,2)}$ 

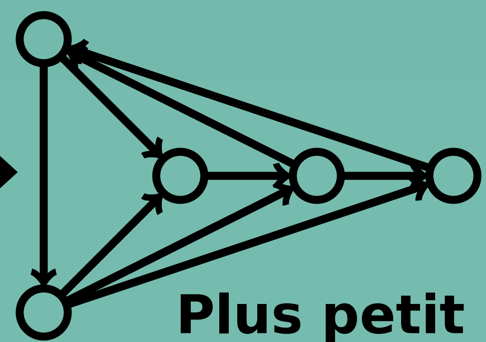
$P_g^{(1,0)}$-universel avec 4 sommets ?

$P_g^{(0,2)}$-universel avec 5 sommets ?

Idée de Preuve

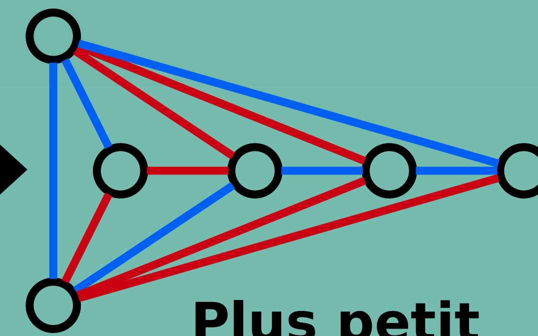
Théorème :

$P_{28}^{(1,0)}$ $\Rightarrow$



Plus petit

$P_{22}^{(0,2)}$ $\Rightarrow$



Plus petit

$P_g^{(1,0)}$-universel avec 4 sommets ?

$P_g^{(0,2)}$-universel avec 5 sommets ?

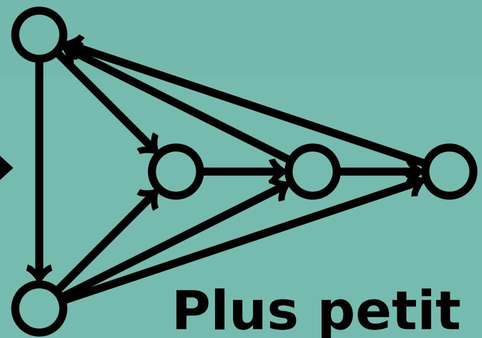
$$\text{Nombre d'arêtes et arcs d'un } P_g^{(m,n)}\text{-universel} \geq (2m+n) \cdot |V(T)| - m$$

$$\text{Nombre d'arêtes et arcs d'un graphe planaire} \leq 3 \cdot |V(T)| - 6$$

Idée de Preuve

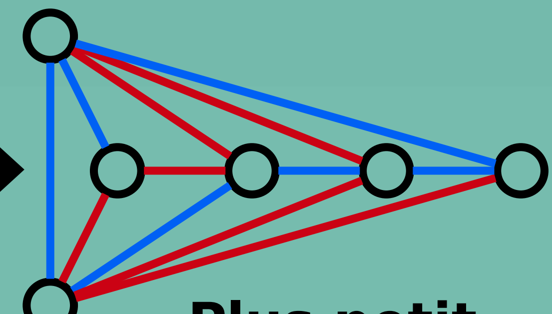
Théorème :

$P_{28}^{(1,0)} \Rightarrow$



Plus petit

$P_{22}^{(0,2)} \Rightarrow$



Plus petit

$P_g^{(1,0)}$-universel avec 4 sommets ?

$P_g^{(0,2)}$-universel avec 5 sommets ?

Nombre d'arcs $\geq 2 \cdot 4 - 1 = 7$

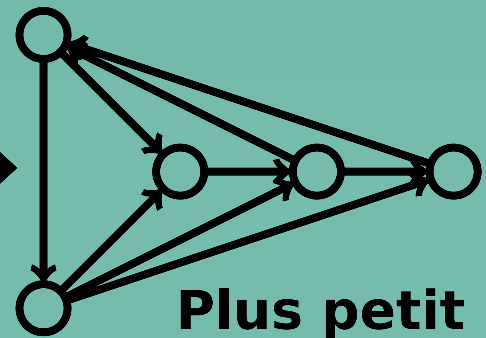
Nombre d'arêtes et arcs d'un $P_g^{(m,n)}$-universel $\geq (2m+n) \cdot |V(T)| - m$

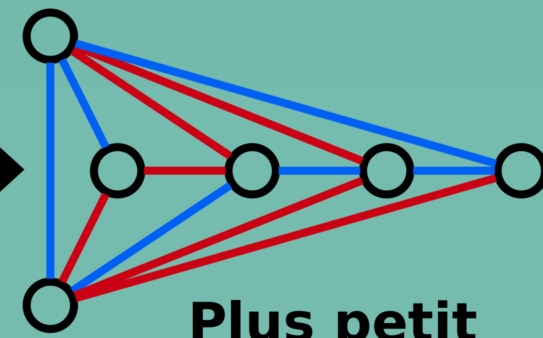
Nombre d'arêtes et arcs d'un graphe planaire $\leq 3 \cdot |V(T)| - 6$

Idée de Preuve

$(\overrightarrow{m}, \overline{n})$

Théorème :

$P_{28}^{(1,0)}$ $\Rightarrow$  Plus petit

$P_{22}^{(0,2)}$ $\Rightarrow$  Plus petit

$P_g^{(1,0)}$-universel avec 4 sommets ?

$P_g^{(0,2)}$-universel avec 5 sommets ?

$$\text{Nombre d'arcs} \geq 2 \cdot 4 - 1 = 7$$

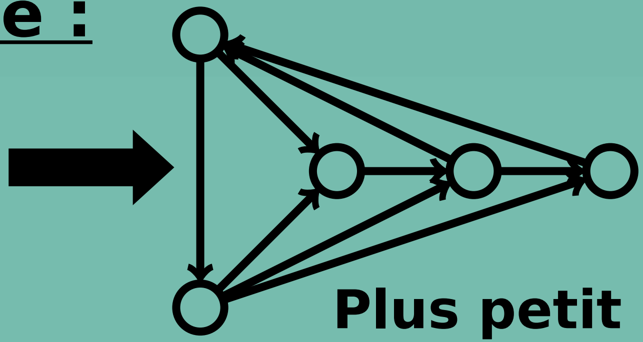
$$\text{Nombre d'arcs} \leq 3 \cdot 4 - 6 = 6$$

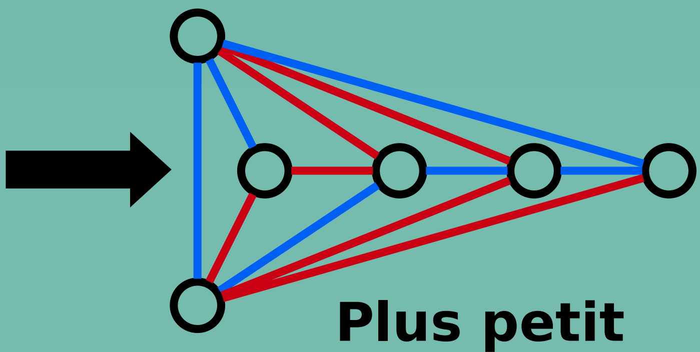
$$\text{Nombre d'arêtes et arcs d'un } P_g^{(m,n)}\text{-universel} \geq (2m+n) \cdot |V(T)| - m$$

$$\text{Nombre d'arêtes et arcs d'un graphe planaire} \leq 3 \cdot |V(T)| - 6$$

Idée de Preuve

Théorème :

$P_{28}^{(1,0)}$ 

$P_{22}^{(0,2)}$ 

$P_g^{(1,0)}$-universel avec 4 sommets ?

$P_g^{(0,2)}$-universel avec 5 sommets ?

Nombre d'arcs $\geq 2 \cdot 4 - 1 = 7$

Nombre d'arcs $\leq 3 \cdot 4 - 6 = 6$

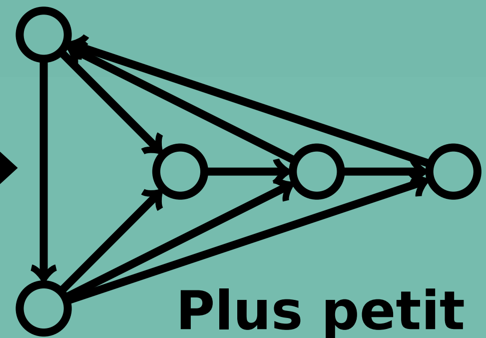
Contradiction

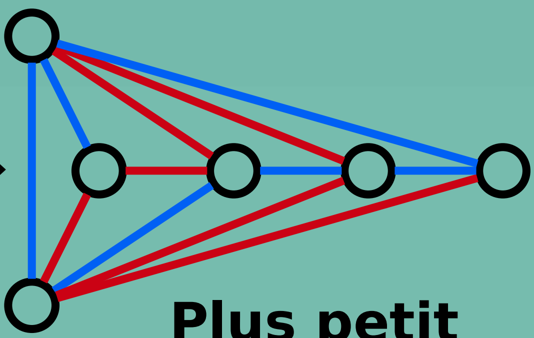
Nombre d'arêtes et arcs d'un $P_g^{(m,n)}$-universel $\geq (2m+n) \cdot |V(T)| - m$

Nombre d'arêtes et arcs d'un graphe planaire $\leq 3 \cdot |V(T)| - 6$

Idée de Preuve

Théorème :

$P_{28}^{(1,0)}$ ➡ 

$P_{22}^{(0,2)}$ ➡ 

$P_g^{(1,0)}$-universel avec 4 sommets ?

$P_g^{(0,2)}$-universel avec 5 sommets ?

Nombre d'arcs $\geq 2 \cdot 4 - 1 = 7$

Nombre d'arêtes $\geq 2 \cdot 5 = 10$

Nombre d'arcs $\leq 3 \cdot 4 - 6 = 6$

Contradiction

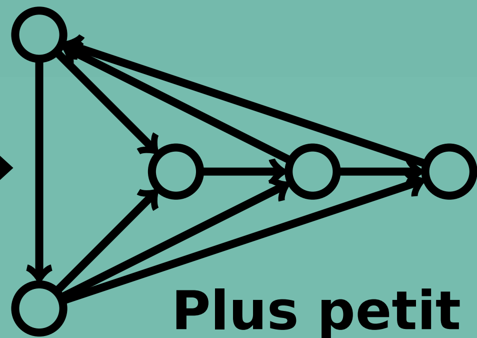
Nombre d'arêtes et arcs d'un $P_g^{(m,n)}$-universel $\geq (2m+n) \cdot |V(T)| - m$

Nombre d'arêtes et arcs d'un graphe planaire $\leq 3 \cdot |V(T)| - 6$

Idée de Preuve

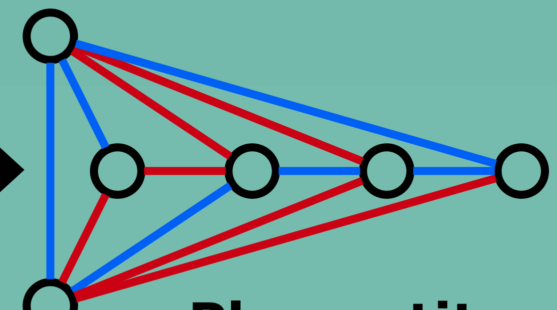
Théorème :

$P_{28}^{(1,0)}$ $\Rightarrow$



Plus petit

$P_{22}^{(0,2)}$ $\Rightarrow$



Plus petit

$P_g^{(1,0)}$-universel avec 4 sommets ?

$P_g^{(0,2)}$-universel avec 5 sommets ?

Nombre d'arcs $\geq 2 \cdot 4 - 1 = 7$

Nombre d'arcs $\leq 3 \cdot 4 - 6 = 6$

Nombre d'arêtes $\geq 2 \cdot 5 = 10$

Nombre d'arêtes $\leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$

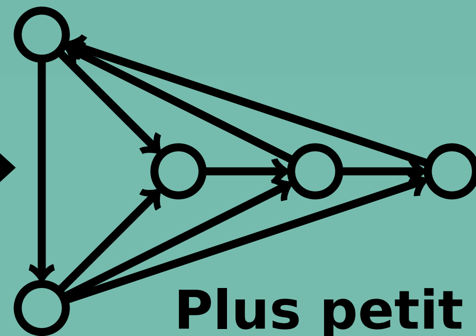
Contradiction

Nombre d'arêtes et arcs d'un $P_g^{(m,n)}$-universel $\geq (2m+n) \cdot |V(T)| - m$

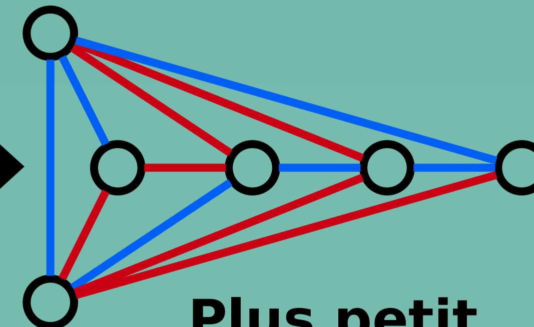
Nombre d'arêtes et arcs d'un graphe planaire $\leq 3 \cdot |V(T)| - 6$

Idée de Preuve

Théorème :

$P_{28}^{(1,0)}$ ➡ 

Plus petit

$P_{22}^{(0,2)}$ ➡ 

Plus petit

$P_g^{(1,0)}$-universel avec 4 sommets ?

Nombre d'arcs $\geq 2 \cdot 4 - 1 = 7$

Nombre d'arcs $\leq 3 \cdot 4 - 6 = 6$

Contradiction

$P_g^{(0,2)}$-universel avec 5 sommets ?

Nombre d'arêtes $\geq 2 \cdot 5 = 10$

Nombre d'arêtes $\leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$

Contradiction

Nombre d'arêtes et arcs d'un $P_g^{(m,n)}$-universel $\geq (2m+n) \cdot |V(T)| - m$

Nombre d'arêtes et arcs d'un graphe planaire $\leq 3 \cdot |V(T)| - 6$

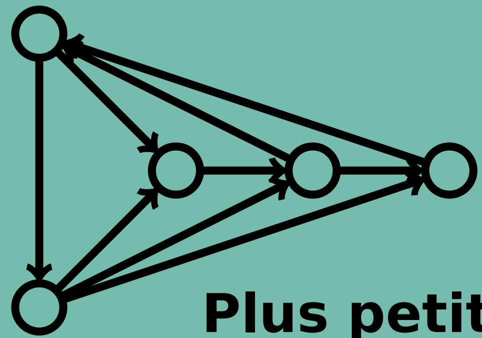
Résultats

Théorème :

Si $2m + n \geq 3$, il n'existe pas de graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire**.

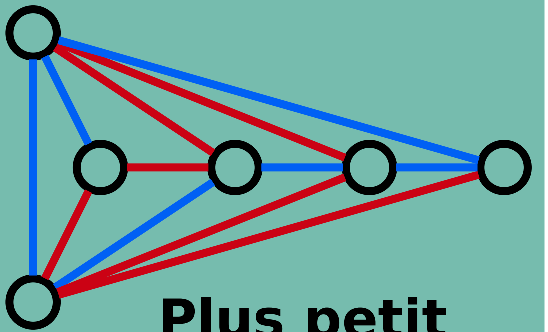
Théorème :

$P_{28}^{(1,0)} \Rightarrow$



Plus petit

$P_{22}^{(0,2)} \Rightarrow$



Plus petit

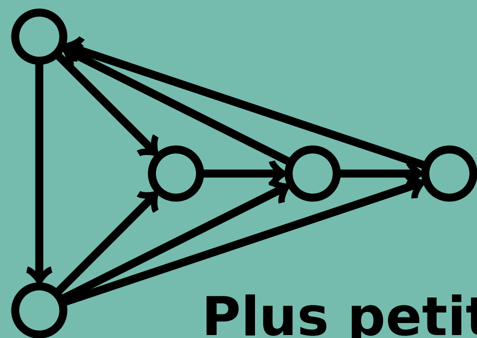
Résultats

Théorème :

Si $2m+n \geq 3$, il n'existe pas de graphe $P_g^{(m,n)}$-universel **planaire**.

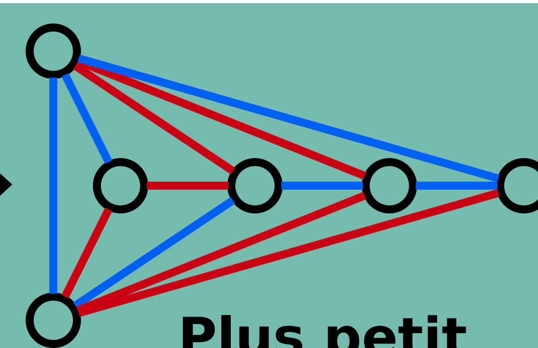
Théorème :

$P_{28}^{(1,0)} \Rightarrow$



Plus petit

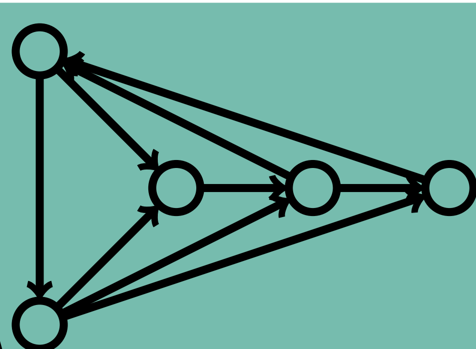
$P_{22}^{(0,2)} \Rightarrow$



Plus petit

Théorème :

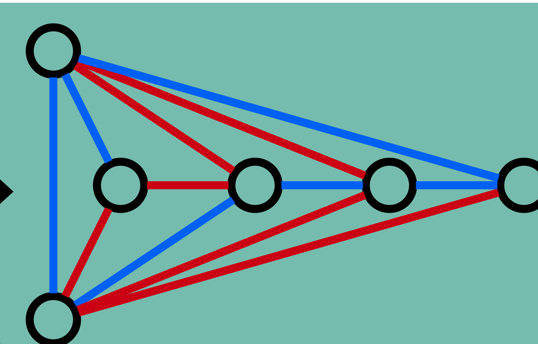
$P_k^{(1,0)} \overset{?}{\Rightarrow}$



Vrai pour tout graphe

NP-Complet

$P_k^{(0,2)} \overset{?}{\Rightarrow}$



Vrai pour tout graphe

NP-Complet