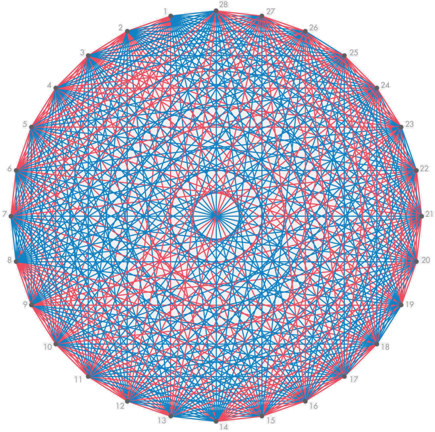
Coloration de graphes épars : la suprématie de la méthode probabiliste

François Pirot
Directeurs de thèse : Ross Kang & Jean-Sébastien Sereni

Prix de thèse Charles Delorme
JGA 2020

I. Motivation : Histoire de la théorie de Ramsey en lien avec la coloration de graphes

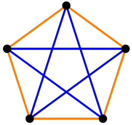


Théorie de Ramsey : Présentation

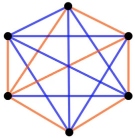
Théorème de Ramsey [1930]

Pour tous entiers $s, t \geq 1$, il existe un entier minimal $R(s,t)$ tel que tout graphe à $R(s,t)$ sommets contient soit une *clique de taille s* (K_s), soit un *ensemble indépendant de taille t* ($\overline{K_t}$).

- $R(s,t)$: *nombre de Ramsey* (de paramètres s et t) ;
- $R(s,s)$: nombre de Ramsey *diagonal* ;
- $R(3,t)$: nombre de Ramsey *anti-diagonal*.



(a) $n = 5$: Pas de triangle



(b) $n = 6$: Triangle rouge ou bleu forcé

$$R(3,3) = 6$$

Théorie de Ramsey : Estimations

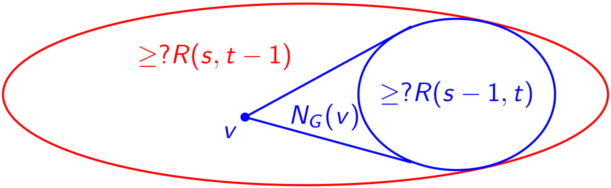
Estimation des nombres de Ramsey [Erdős, Szekeres, 1935]

Pour tous entiers $s, t \geq 2$,

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1),$$

et donc par récurrence on obtient

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}.$$



G : $R(s-1,t) + R(s,t-1)$ sommets $\implies$ contient K_s ou $\overline{K_t}$

Théorie de Ramsey : Graphes randoms

Modèle de Erdős-Renyi

Pour tout entier n, et réel $p \in [0,1]$, un graphe random suivant le *modèle de Erdős-Renyi* $G(n,p)$ a n sommets, et chacune des $\binom{n}{2}$ arêtes possibles est gardée indépendamment avec probabilité p.

Exemples extrémaux tirés de $G(n, \frac{1}{2})$ pour $R(s,s)$

Un graphe random G tiré de $G(n, \frac{1}{2})$ satisfait asymptotiquement presque sûrement (avec probabilité $\to 1$ quand $n \to \infty$)

$$\omega(G) \leq 2\log_2 n, \quad \text{et}$$
$$\alpha(G) \leq 2\log_2 n.$$

- Soit $X \subseteq V(G)$ de taille $s = 2\log_2 n$.
- Probabilité que X forme une clique : $2^{-\binom{s}{2}}$.
- Nombre de choix possibles pour X : $\binom{n}{s}$.
- Probabilité que G contienne K_s : $\leq \binom{n}{s} \cdot 2^{-\binom{s}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorie de Ramsey et coloration de graphes

Question

Si l'on a un graphe G à $n \geq R(s,t)$ sommets qui ne contient pas K_s, peut-on trouver mieux qu'un seul indépendant de taille t ?

- $\rightarrow$ Les indépendants de G ont *taille moyenne t*.
- $\rightarrow$ Trouver une *coloration propre de G* avec n/t couleurs.
- $\rightarrow$ Et si on autorise des copies de K_s, suffisamment éparses ? Que se passe-t-il si on interdit d'autres structures (*cycles*) ?

Pourquoi s'intéresser à la coloration dans ce cadre ?

- $\rightarrow$ Une clique de taille s dans G est un *certificat que $\chi(G) \geq s$*.
- $\rightarrow$ Pourtant, il existe des suites de graphes (G_k) telles que $\omega(G_k) = 2$ et $\chi(G_k) \underset{k\to\infty}{\rightarrow} \infty$. [Mycielski, Zykov, graphes random]
- $\rightarrow$ Analyse du nombre chromatique des graphes sans triangle : nécessité d'introduire un paramètre supplémentaire, le *degré maximum*.

Nombre chromatique des graphes random de degré borné

Théorème [Bollobás, 1981]

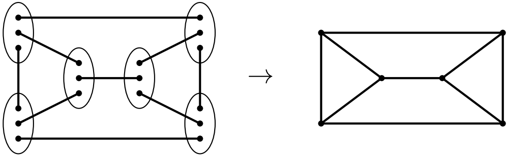
Pour tous entiers $d, g \geq 3$, il existe un graphe G de *degré maximum d* et de *maille g* (G ne contient aucun cycle de longueur $< g$) tel que

$$\chi(G) \geq \frac{d}{2 \ln d}.$$

$G \leftarrow$ graphe random d-régulier à n sommets. Avec forte probabilité :

- $\alpha(G) \geq \frac{2 \ln d}{d} n$;
- G contient *au plus $\ln n$ cycles* de longueur $< g$.

$\rightarrow$ Retirer un sommet par petit cycle de G pour obtenir un graphe de maille g et de grand nombre chromatique.



Tirage aléatoire d'un graphe régulier

Nombre chromatique des graphes random de degré borné

Théorème [Bollobás, 1981]

Pour tous entiers $d, g \geq 3$, il existe un graphe G de *degré maximum d* et de *maille g* (G ne contient aucun cycle de longueur $< g$) tel que

$$\chi(G) \geq \frac{d}{2 \ln d}.$$

$G \leftarrow$ graphe random d-régulier à n sommets. Avec forte probabilité :

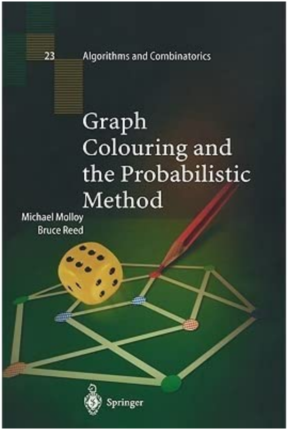
- $\alpha(G) \geq \frac{2 \ln d}{d} n$;
- G contient *au plus* $\ln n$ *cycles* de longueur $< g$.

$\rightarrow$ Retirer un sommet par petit cycle de G pour obtenir un graphe de maille g et de grand nombre chromatique.

Question

Est-ce que les graphes random sont *extrémaux* pour le nombre chromatique des graphes sans triangle ?

II. Historique : Évolution de la méthode probabiliste pour la coloration de graphes



Coloration random "pas à pas"

Théorème [Kim, 1995]

Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout graphe G de degré maximum Δ suffisamment grand et de maille 5 (pas de triangle ni de C_4),

$$\chi(G) \leq (1+\varepsilon)\frac{\Delta}{\ln \Delta}.$$

- Chaque sommet commence avec la liste des $(1+\varepsilon)\Delta/\ln \Delta$ couleurs.
- À chaque tour, une faible proportion des sommets s'active et choisit une couleur au hasard dans sa liste. On décolore les conflits.
- On met à jour les listes de couleurs autorisées pour chaque sommet. Les listes se vident moins vite que le degré ne décroît.
- Lorsque la taille des listes et le degré maximum sont du même ordre de grandeur, on peut finir la coloration en une étape.

Coloration random “pas à pas”

Théorème [Kim, 1995]

Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout graphe G de degré maximum Δ suffisamment grand et de maille 5 (pas de triangle ni de C_4),

$$\chi(G) \leq (1+\varepsilon)\frac{\Delta}{\ln \Delta}.$$

- Chaque sommet commence avec la liste des $(1+\varepsilon)\Delta/\ln\Delta$ couleurs.
- À chaque tour, une faible proportion des sommets s'active et choisit une couleur au hasard dans sa liste. On décolore les conflits.
- On met à jour les listes de couleurs autorisées pour chaque sommet. Les listes se vident moins vite que le degré ne décroît.
- Lorsque la taille des listes et le degré maximum sont du même ordre de grandeur, on peut finir la coloration en une étape.

Théorème [Johansson, 1996]

Pour tout graphe sans triangle G de degré maximum Δ,

$$\chi(G) \leq 9\frac{\Delta}{\ln \Delta}.$$

Coloration random en deux temps

Théorème [Molloy, 2019]

Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout graphe sans triangle G de degré maximum Δ suffisamment grand,

$$\chi(G) \leq (1+\varepsilon)\frac{\Delta}{\ln \Delta}.$$

Utilisation de la *compression d'entropie* : algorithme de coloration randomisé qui est garanti de terminer. Deux types de *conflits à éviter* (autrement décoloration locale)

- La liste d'un des sommets devient trop petite.
- Une couleur apparaît trop souvent dans la liste des voisins d'un sommet.

Quand il n'y a plus de conflit, on peut terminer la coloration en une étape random.

S'affranchir de la compression d'entropie

Théorème [Bernshteyn, 2018]

Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout graphe sans triangle G de degré maximum Δ suffisamment grand,

$$\chi_{\mathrm{DP}}(G) \leq (1+\varepsilon)\frac{\Delta}{\ln \Delta}.$$

- Tirer une coloration propre partielle de G *uniformément au hasard* (ajout de la couleur `Blank` qui peut être utilisée sur deux voisins).
- Avec probabilité non nulle (par le *Lemme Local de Lovász*), cette coloration n'induit aucun des conflits de la méthode de Molloy.
- Terminer la coloration en une étape.

Comment ça marche ?

Lemme Local de Lovász (version *lopsided*)

Soit $E_1, \ldots, E_n$ un ensemble fini de (mauvais) événements aléatoires, tous de probabilité p. En supposant que chaque E_i soit *négativement corrélé* avec l'ensemble des $(E_j)_{j \neq i}$ sauf au plus D d'entre eux, alors si

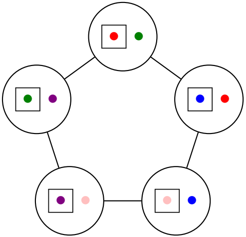
$$4pD \leq 1,$$

la probabilité qu'aucun des E_i ne se réalise est non nulle.

Comment ça marche ?

Étape finale de la coloration random

- `input:` Graphe G, assignation de listes de couleurs $L(x)$ telle que
  - pour tout sommet x, $|L(x)| = \ell$;
  - chaque couleur de $L(x)$ apparaît dans la liste d'au plus $\frac{\ell}{8}$ voisins de x.
- `procédure:` Sélectionner $c(x) \in L(x)$ aléatoirement pour tout sommet x.
- `output:` c est une coloration propre de G avec probabilité non nulle.



Exemple pour $G = C_5$ et $\ell = 2$

- Mauvais événements $E_{u,v,i}$: Les sommets u et v choisissent la même couleur i.
- $\mathbb{P}\left[E_{u,v,i}\right] = 1/\ell^2$
- $E_{u,v,i}$ ne dépend que des couleurs choisies par u et v ; il y a $D = \ell^2/4$ événements faisant intervenir ces couleurs.

Propriétés d'une coloration partielle random uniforme

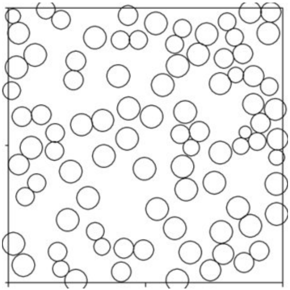
c : k-coloration (propre) partielle random uniforme ($k = (1+\varepsilon)\Delta/\ln\Delta$).
$\ell := \Delta^{\varepsilon/2}$.
On fixe un sommet u, et on conditionne sur la réalisation de c en dehors de $N[u]$. Pour tout sommet u, $L_c(u) = [k] \setminus c(N(u))$.

Propriétés

- $\mathbb{P}\left[|L_c(u)| < \ell\right] \leq \Delta^{-3}/8$;
- $\mathbb{P}\left[\exists x \in L_c(u), \#\{v \in N(u), x \in L_c(v)\} > \ell/8\right] \leq \Delta^{-3}/8$.

Comme on a conditionné sur n'importe quelle réalisation de c sur $\overline{N[u]}$, les mauvais événements des sommets à distance ≥ 4 de u n'importent pas $\implies$ on peut appliquer LLL.

III. Mes contributions : Utilisation de la distribution hard-core.



La distribution hard-core

Définition

Soit G un graphe, et $\mathscr{S}(G)$ ses ensembles indépendants. Un ensemble indépendant aléatoire $\mathbf{S}$ tiré selon la *distribution hard-core de fugacité λ* sur $\mathscr{S}(G)$ est tel que

$$\forall S \in \mathscr{S}(G), \quad \mathbb{P}\left[\mathbf{S} = S\right] = \frac{\lambda^{|S|}}{Z_G(\lambda)},$$

où $Z_G(\lambda)$ est le *polynôme d'indépendance* de G

$$Z_G(\lambda) = \sum_{S \in \mathscr{S}(G)} \lambda^{|S|}.$$

Propriété spatiale de Markov

Soit G un graphe, et $\mathbf{S}$ tiré selon la *distribution hard-core de fugacité λ* sur $\mathscr{S}(G)$. Pour tout $X \subseteq V(G)$, si on conditionne par $\mathbf{S} \setminus X = R$ (pour toute réalisation R possible), alors l'ensemble indépendant aléatoire $\mathbf{S} \cap X$ suit la distribution hard-core de fugacité λ sur $\mathscr{S}\big(G[X \setminus N_X(R)]\big)$.

Taille moyenne des indépendants

Théorème [Davies et al, 2018]

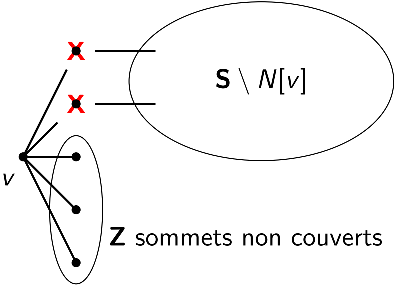
Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout graphe sans triangle G à n sommets et de degré maximum Δ suffisamment grand, la taille moyenne des ensembles indépendants est au moins

$$\overline{\alpha}(G) \geq (1-\varepsilon)\frac{\ln \Delta}{\Delta} n.$$

Analyse locale de la distribution hard-core de fugacité λ :

- $\mathbb{P}[v \in \mathbf{S}] = \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbb{E}\left[(1+\lambda)^{-\mathbf{Z}}\right]$
  $\geq \frac{\lambda}{1+\lambda}(1+\lambda)^{-\mathbb{E}[\mathbf{Z}]}$
- $\mathbb{E}[N(v) \cap \mathbf{S}] = \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbb{E}[\mathbf{Z}]$

$\Longrightarrow$ Prendre $\lambda = 1/\ln \Delta$.



Le nombre chromatique par la Programmation Linéaire

The Linear Program

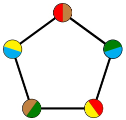
Soit G un graphe, et $\mathscr{S}(G)$ ses ensembles indépendants.

$$\chi(G) = \min \sum_{S \in \mathscr{S}(G)} w_S$$

$$\text{tel que} \quad \begin{cases} \forall v \in V(G), & \displaystyle\sum_{S \ni v} w_S \geq 1 \\ \forall S \in \mathscr{S}(G), & w_S \in \{0,1\} \end{cases}$$

Nombre chromatique fractionnaire

Le *nombre chromatique fractionnaire* $\chi_f(G)$ d'un graphe G est la solution à la relaxation fractionnaire du programme linéaire qui calcule $\chi(G)$.



Une coloration fractionnaire de C_5 de poids $\frac{5}{2}$: chaque indépendant a poids $\frac{1}{2}$.

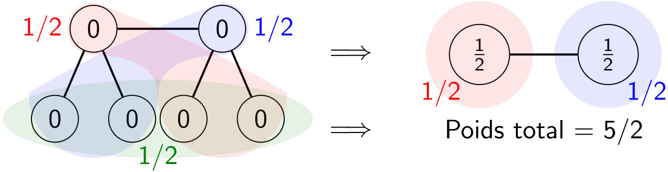
Des indépendants à la coloration fractionnaire

Étant donné un graphe G, on fixe pour tout sous-graphe induit H de G un ensemble indépendant aléatoire $\mathbf{S}_H$.

L'algorithme glouton de coloration fractionnaire [Molloy and Reed, 2002]

1. Soit $G_0 = G$.
2. À chaque étape i, augmenter le poids de chaque indépendant $S \in \mathscr{S}(G_i)$ par une valeur proportionnelle à $\mathbb{P}[\mathbf{S}_{G_i} = S]$, de sorte que le poids induit en au moins un sommet atteigne exactement 1 (et aucun poids induit ne doit dépasser 1).
3. G_{i+1} est obtenu depuis G_i en retirant les nouveaux sommets de poids induit 1. On arrête l'algorithme si G_{i+1} est vide.

Exemple : Distribution *uniforme* sur les *indépendants maximaux*.



Des indépendants à la coloration fractionnaire

L'algorithme glouton de coloration fractionnaire [Molloy and Reed, 2002]

1. Soit $G_0 = G$.
2. À chaque étape i, augmenter le poids de chaque indépendant $S \in \mathscr{S}(G_i)$ par une valeur proportionnelle à $\mathbb{P}\left[\mathbf{S}_{G_i} = S\right]$, de sorte que le poids induit en au moins un sommet atteigne exactement 1 (et aucun poids induit ne doit dépasser 1).
3. G_{i+1} est obtenu depuis G_i en retirant les nouveaux sommets de poids induit 1. On arrête l'algorithme si G_{i+1} est vide.

Lemme [Davies, de Joannis de Verclos, Kang, P., 2020]

Si pour tout sous-graphe induit H de G, et pour tout sommet $v \in V(H)$,

$$\alpha(v)\mathbb{P}\left[v \in \mathbf{S}_H\right] + \beta(v)\mathbb{E}\left[|N(v) \cap \mathbf{S}_H|\right] \geq 1,$$

on dit que G satisfait une *(α, β)-occupation locale*. Dans ce cas, la coloration fractionnaire construite par l'algorithme est de poids au plus

$$\max_{v \in V(G)} \alpha(v) + \beta(v) \deg(v).$$

Conséquences : le cas sans triangle

Occupation locale [Davies, de Joannis de Verclos, Kang, P., 2019+]

Pour tout $d \geq 0$, tout graphe sans triangle G satisfait la (α, β)-occupation locale avec la distribution hard-core de fugacité λ, où

$$\lambda = \frac{1}{\ln d}, \quad \alpha \approx \frac{d}{(\ln d)^2}, \quad \beta \approx \frac{1}{\ln d}.$$

Corollaire : Théorème de Johansson-Molloy-Bernsteyn

Il existe une constance C telle que, pour tout graphe sans triangle G de degré maximum Δ,

$$\chi_f(G) \leq \frac{\Delta}{\ln \Delta - 2 \ln \ln \Delta - C}.$$

Conséquences : plus grande maille

Occupation locale [P., Sereni, 2019+]

Pour tout entier $k \geq 4$, tout graphe G de maille ≥ 7 satisfait la (α, β)-occupation locale avec la distribution hard-core de fugacité λ sur les ensembles indépendants *maximaux*, où

$$\lambda = 4, \quad \alpha = 1 + \frac{2^{k-3}}{k}, \quad \beta = \frac{2}{k}.$$

Corollaire [P., Sereni, 2019+]

Pour tout graph G de degré maximum Δ et de maille au moins 7,

$$\chi_f(G) \leq 1 + \min_{k \geq 4} \frac{2\Delta + 2^{k-3}}{k}.$$

Conséquences : le cas avec peu de triangles

Théorème [Davies, Kang, P., Sereni 2019+]

Soit $\varepsilon > 0$ et G un graphe de degré maximum Δ suffisamment grand, tel que tout sous-graphe induit par un voisinage dans G est de degré moyen maximum $\leq d$. Alors

$$\chi_f(G) \leq (1+\varepsilon)\frac{\Delta}{\ln \frac{\Delta}{d+1}}.$$

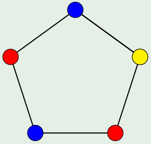
Corollaires

Soit $\varepsilon > 0$ et G de degré maximum Δ suffisamment grand, alors

1. $\chi_f(G) \leq (1+\varepsilon)\frac{\Delta}{\ln \frac{\Delta}{\sqrt{T}}}$ si chaque sommet apparaît dans au plus $T > 0$ triangles ;
2. $\chi_f(G) \leq (1+\varepsilon)\frac{\Delta}{\ln \Delta}$ si G est sans C_ℓ, pour n'importe quel $\ell \geq 3$ fixé.

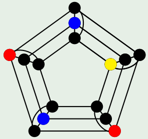
Des indépendants à la DP-coloration

Coloration (partielle) = Indépendant dans le cover graph.



(c) k-coloration partielle

$\Longleftrightarrow$



(d) Ensemble indépendant du *k-cover graph*

- *Coloration classique* : couplages parfaits dans le cover graph.
- *Coloration par listes* : couplages entre les mêmes couleurs dans le cover graph.
- *DP-coloration* : couplages quelconques dans le cover graph.

De l'occupation locale à la DP-coloration

Theorème [Davies, Kang, P., Sereni, 2020+]

Soit G un graphe de degré maximum Δ, et $\ell \geq 12 \ln(2\Delta)$. Si pour tout sommet $v \in V(G)$, et pour tout sous-graphe F fr $G[N(v)]$,

1. $\alpha(v) \dfrac{\lambda}{1+\lambda} \dfrac{1}{Z_F(\lambda)} + \beta(v) \dfrac{\lambda Z_F'(\lambda)}{Z_F(\lambda)} \geq 1$, et
2. $\ln Z_F(\lambda) \geq 4 \ln(2\Delta)$ si $|V(F)| \geq \ell/2$,

alors

$$\chi_{\mathrm{DP}}(G) \leq \max_{v \in V(G)} \alpha(v) \frac{2\lambda\ell}{1+\lambda} + \beta(v) \deg(v).$$

De l'occupation locale à la DP-coloration

Theorème [Davies, Kang, P., Sereni, 2020+]

Soit G un graphe de degré maximum Δ, et $\ell \geq 12\ln(2\Delta)$. Si pour tout sommet $v \in V(G)$, et pour tout sous-graphe F fr $G[N(v)]$,

1. $\alpha(v)\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\dfrac{1}{Z_F(\lambda)} + \beta(v)\dfrac{\lambda Z_F'(\lambda)}{Z_F(\lambda)} \geq 1$, et
2. $\ln Z_F(\lambda) \geq 4\ln(2\Delta)$ si $|V(F)| \geq \ell/2$,

alors

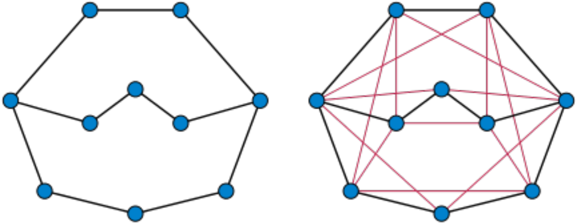
$$\chi_{\mathrm{DP}}(G) \leq \max_{v \in V(G)} \alpha(v)\frac{2\lambda\ell}{1+\lambda} + \beta(v)\deg(v).$$

Corollaires

Soit G un graphe de degré maximum Δ. Alors

- $\chi_{\mathrm{DP}}(G) \leq \frac{\Delta}{\ln\Delta - 3\ln\ln\Delta - O(1)}$ si G est *sans triangle* ;
- $\chi_{\mathrm{DP}}(G) \leq (1+o(1))\frac{\Delta}{\ln\frac{\Delta}{d+1}}$ si $\mathrm{mad}(G[v]) \leq d$ pour tout sommet v.
- Autres situations : *clique bornée*, *voisinages r-colorables*, ...

IV. Applications : Coloration à distance t



G $\qquad$ G^2

Nombre chromatique de la puissance d'un graphe

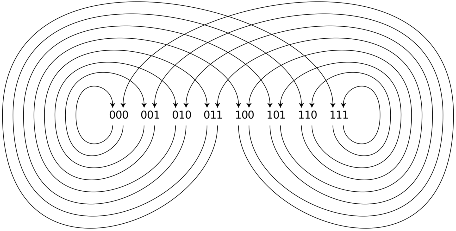
Définition

- *Puissance t d'un graphe* : G^t est obtenu depuis G en rajoutant une arête entre chaque paire de sommets à distance $\leq t$ dans G.
- *Nombre chromatique à distance t* : $\chi_t(G) = \chi(G^t)$.

Constructions

Il existe des graphes G pour lesquels $\chi_t(G) \geq (\Delta(G)/2)^t$.

- Graphes de DeBruijn.
- Graphes de maille 8 quand $t \geq 11$, et bipartis si t est pair.



Décroître le nombre chromatique à distance t

Rappel

Si tous les voisinages d'un graphe G sont de mad $\leq d$, alors

$$\chi(G) \leq (1+o(1))\frac{\Delta(G)}{\ln \frac{\Delta(G)}{d+1}}.$$

Observation

Soit G de degré maximum Δ et de maille $\geq 3t+1$. Alors les voisinages de G^t sont la puissance t *d'arbres de degré maximum Δ et de profondeur t*.

- Si t est pair : voisinages $\Delta^{\frac{t}{2}}$-dégénérés $\implies$ mad $\leq 2\Delta^{\frac{t}{2}}$.
- Si t est impair : voisinages $2\Delta^{\frac{t-1}{2}}$-dégénérés $\implies$ mad $\leq 4\Delta^{\frac{t-1}{2}}$.

Dans tous les cas, $\chi_t(G) \leq (1+o(1))\frac{\Delta}{\lceil t/2 \rceil \ln \Delta}$.

$\rightarrow$ Déterminer des obstructions minimales telles que $\chi_t(G) = o(\Delta^t)$.

Interdiction de cycles pairs

Théorème [Kang, P., 2018]

Soit $t \geq 2$, et G de degré maximum Δ. Pour n'importe quel entier $k > t$, si G ne contient pas C_{2k}, alors

$$\chi_t(G) \leq (2 + o(1)) \frac{\Delta}{\ln \Delta}.$$

Méthode de preuve

- Faire un parcours en profondeur de chaque voisinage à distance t $N_{G^t}[v]$. La densité moyenne est bornée entre les couches et à l'intérieur des couches de ce parcours.
- En déduire que le nombre de chemins de longueur t dont les extrémités sont dans $N_{G^t}[v]$ est $O(\Delta^{2t-1})$.
- Conclure par une application du Théorème sur le nombre chromatique des graphes avec peu de triangles.

Interdiction de cycles impairs

Théorème [Kang, P., 2018]

Soit $t \geq 3$ *impair*, et G de degré maximum Δ. Pour n'importe quel entier impair $\ell \geq 3t$, si G ne contient pas C_ℓ, alors

$$\chi_t(G) \leq (2 + o(1))\frac{\Delta}{\ln \Delta}.$$

Proposition [P., 2019]

Pour tout Δ, et pour tout $t \geq 3$ impair, il existe un graphe G de degré maximum Δ, sans cycle impair de longueur $< 3t$, tel que

$$\chi(G) \geq (\Delta/4)^t.$$

De plus, on peut remplacer $(\Delta/4)^t$ par $(\Delta/3)^t$ si $t \geq 5$.

Conclusion et problèmes ouverts

Méthode probabiliste = seul outil efficace connu pour étudier la coloration des graphes épars.

- Réduire l'écart entre la borne inférieure et supérieure sur $R(3,t)$:

$$\frac{t^2}{4\ln t} \lesssim R(3,t) \lesssim \frac{t^2}{\ln t}.$$

- Déterminer le bon ordre de grandeur du nombre chromatique de l'ensemble $\mathscr{G}_{\Delta,K_4}$ des graphes sans K_4 de degré maximum Δ :

$$\frac{\Delta}{2\ln\Delta} \leq \chi(\mathscr{G}_{\Delta,K_4}) \leq O\left(\frac{\Delta\ln\ln\Delta}{\ln\Delta}\right).$$

- Quel est le nombre chromatique fractionnaire de l'ensemble $\mathscr{G}_{4,K_3}$ des graphes sans triangle de degré maximum 4 ?

$$3.25 \leq \chi_f(\mathscr{G}_{4,K_3}) \leq 3.5$$

Conclusion et problèmes ouverts

Méthode probabiliste = seul outil efficace connu pour étudier la coloration des graphes épars.

- Réduire l'écart entre la borne inférieure et supérieure sur $R(3,t)$:

$$\frac{t^2}{4\ln t} \lesssim R(3,t) \lesssim \frac{t^2}{\ln t}.$$

- Déterminer le bon ordre de grandeur du nombre chromatique de l'ensemble $\mathscr{G}_{\Delta,K_4}$ des graphes sans K_4 de degré maximum Δ :

$$\frac{\Delta}{2\ln\Delta} \leq \chi(\mathscr{G}_{\Delta,K_4}) \leq O\left(\frac{\Delta\ln\ln\Delta}{\ln\Delta}\right).$$

- Quel est le nombre chromatique fractionnaire de l'ensemble $\mathscr{G}_{4,K_3}$ des graphes sans triangle de degré maximum 4 ?

$$3.25 \leq \chi_f(\mathscr{G}_{4,K_3}) \leq 3.5$$

Merci pour votre attention.