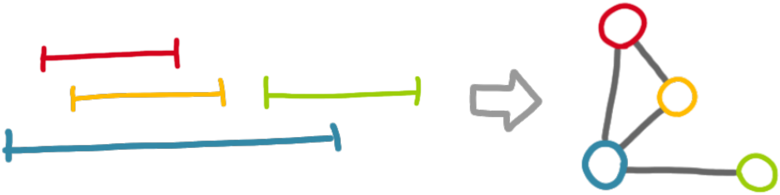
Classes de graphes et motifs interdits sur 3 et 4 sommets

Laurent Feuilloley and Michel Habib

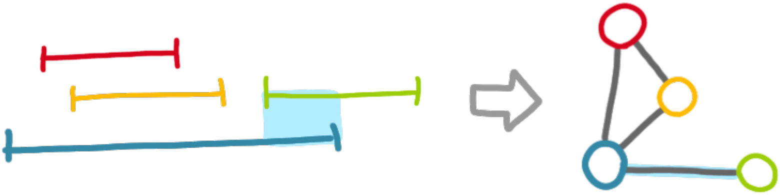
Basé sur
Graph classes and forbidden patterns on three vertices
(à paraître dans SIDMA)
et un projet en cours.

Journées Graphes et Algorithmes (JGA) · 16 Novembre 2020 · Distanciel

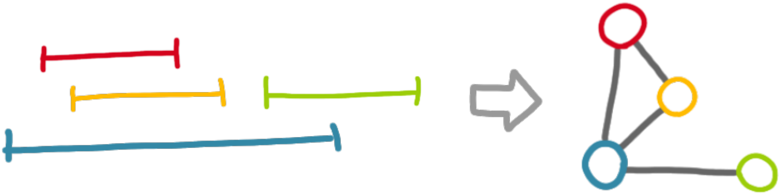
Graphes d'intervalles : géométrie



Graphes d'intervalles : géométrie



Graphes d'intervalles : géométrie



Définition : Un graphe est un graphe d'intervalles si il possède une représentation par intersections d'intervalles.

Graphes d'intervalles : géométrie

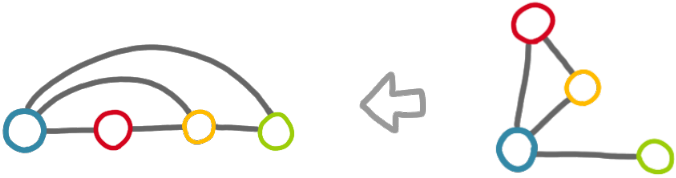
Définition : Un graphe est un graphe d'intervalles si il possède une représentation par intersections d'intervalles.

Graphes d'intervalles : avec un ordre

Caractérisation : Un graphe est un graphe d'intervalles si et seulement si : il existe un ordre de ses sommets, tel que pour tout $u < v < w$, si (u, w) est une arête alors (u, v) est aussi une arête.

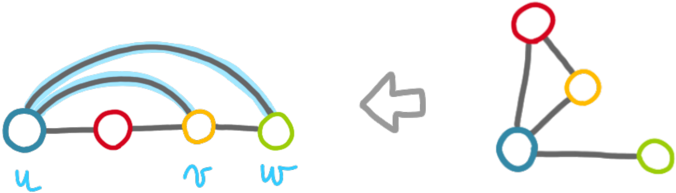
Graphes d'intervalles : avec un ordre

Caractérisation : Un graphe est un graphe d'intervalles si et seulement si : il existe un ordre de ses sommets, tel que pour tout $u < v < w$, si (u, w) est une arête alors (u, v) est aussi une arête.



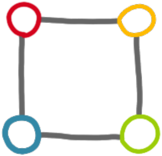
Graphes d'intervalles : avec un ordre

Caractérisation : Un graphe est un graphe d'intervalles si et seulement si : il existe un ordre de ses sommets, tel que pour tout $u < v < w$, si (u, w) est une arête alors (u, v) est aussi une arête.



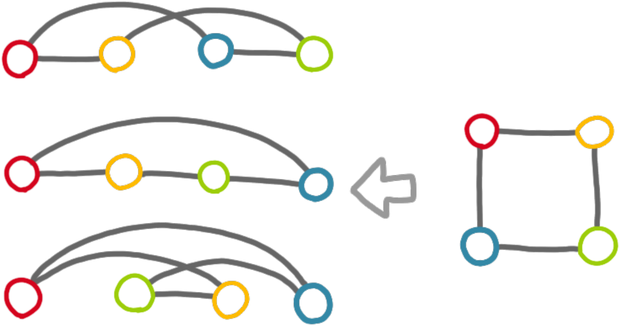
Graphes d'intervalles : avec un ordre

Caractérisation : Un graphe est un graphe d'intervalles si et seulement si : il existe un ordre de ses sommets, tel que pour tout $u < v < w$, si (u, w) est une arête alors (u, v) est aussi une arête.



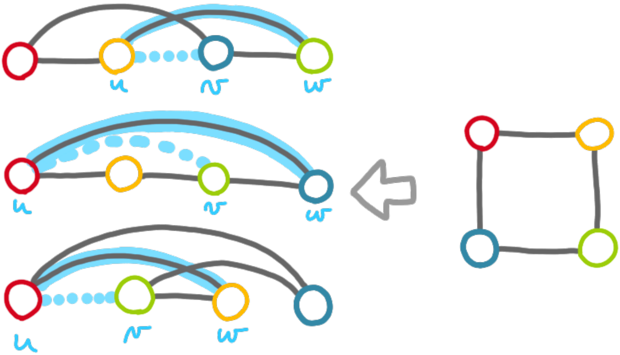
Graphes d'intervalles : avec un ordre

Caractérisation : Un graphe est un graphe d'intervalles si et seulement si : il existe un ordre de ses sommets, tel que pour tout $u < v < w$, si (u, w) est une arête alors (u, v) est aussi une arête.



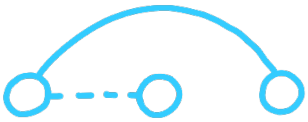
Graphes d'intervalles : avec un ordre

Caractérisation : Un graphe est un graphe d'intervalles si et seulement si : il existe un ordre de ses sommets, tel que pour tout $u < v < w$, si (u, w) est une arête alors (u, v) est aussi une arête.



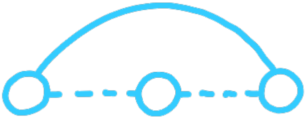
Caractérisation par motifs

Caractérisation : Un graphe est un XXXXX si et seulement si : il existe un ordre de ses sommets, tel que le motif suivant n'apparait pas :



Caractérisation par motifs

Caractérisation : Un graphe est un XXXXX si et seulement si : il existe un ordre de ses sommets, tel que le motif suivant n'apparait pas :



Caractérisation par motifs

Caractérisation : Un graphe est un XXXXX si et seulement si : il existe un ordre de ses sommets, tel que le motif suivant n'apparait pas :

Caractérisation par motifs

Caractérisation : Un graphe est un XXXXX si et seulement si : il existe un ordre de ses sommets, tel que le motif suivant n'apparait pas :

Caractérisation par motifs

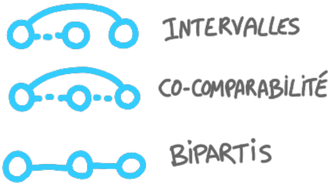
Caractérisation : Un graphe est un XXXXX si et seulement si : il existe un ordre de ses sommets, tel que le motif suivant n'apparait pas :

INTERVALLES

CO-COMPARABILITÉ

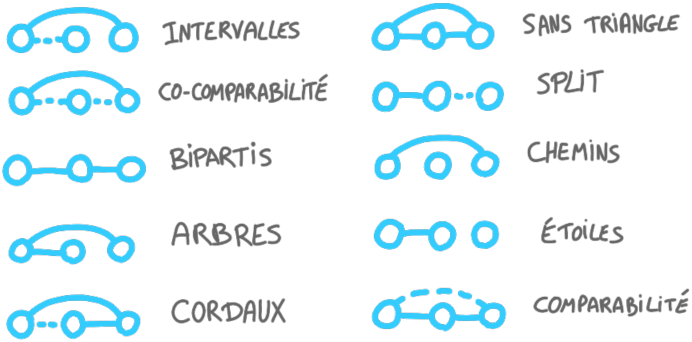
Caractérisation par motifs

Caractérisation : Un graphe est un XXXXX si et seulement si : il existe un ordre de ses sommets, tel que le motif suivant n'apparait pas :



Caractérisation par motifs

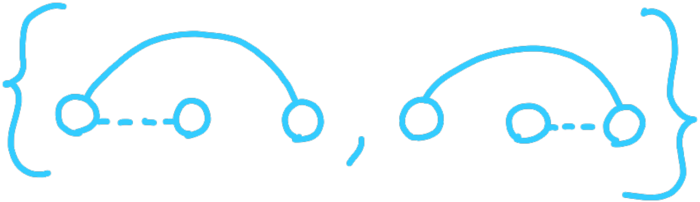
Caractérisation : Un graphe est un XXXXX si et seulement si : il existe un ordre de ses sommets, tel que le motif suivant n'apparait pas :



Déjà vu par Skrien en 82 et Damashke en 90.

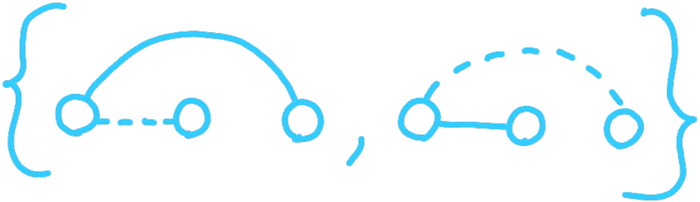
Caractérisation par motifs

Caractérisation : Un graphe est un XXXXX si et seulement si : il existe un ordre de ses sommets, tel que **les motifs** suivants n'apparaissent pas :



Caractérisation par motifs

Caractérisation : Un graphe est un XXXXX si et seulement si : il existe un ordre de ses sommets, tel que **les motifs** suivants n'apparaissent pas :



Théorème

Theorème : Quelques opérations simples près, les classes non-triviales définies par des ensemble de motifs sont (en anglais) :

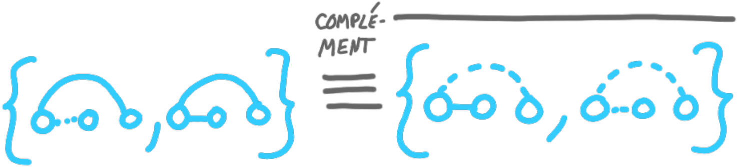
1. forests
2. linear forests
3. stars
4. interval
5. split
6. bipartite
7. chordal
8. comparability
9. triangle-free
10. permutation
11. threshold
12. proper interval
13. caterpillar
14. trivially perfect
15. bipartite chain
16. 2-star
17. 1-split
18. augmented clique
19. bipartite permutation
20. triangle-free $\cap$ co-chordal
21. clique
22. complete bipartite

Structure

- Motifs miroirs

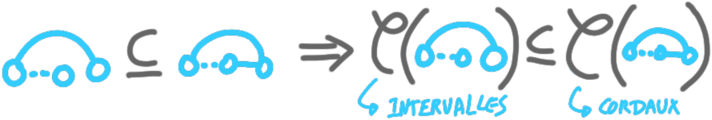
Structure

- Motifs miroirs
- Motifs complémentaires



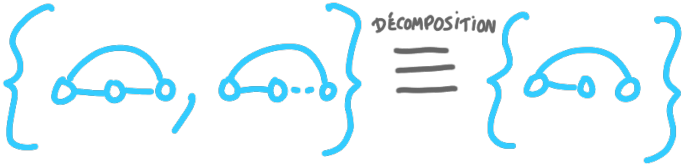
Structure

- Motifs miroirs
- Motifs complémentaires
- Inclusions de motifs, donc de classes



Structure

- Motifs miroirs
- Motifs complémentaires
- Inclusions de motifs, donc de classes
- Équivalences de motifs, et intersections



Algorithmique

Theorème (Hell, Mohar et Rafiey) : Toutes les classes définies par des motifs à trois nœuds sont reconnaissables en temps $O(n^3)$.

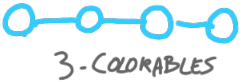
Nouveau theorème : Toutes les classes définies par des motifs à trois nœuds sont reconnaissables en temps **linéaire** sauf deux en temps $O(n^{2,37})$, principalement grâce à des **parcours de graphes**.

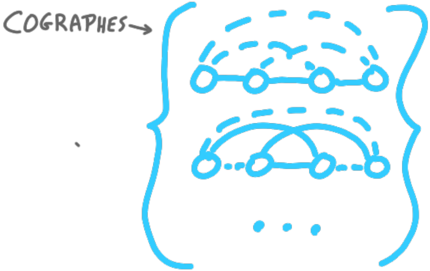
Et pour 4 sommets ?

- Énormément plus de cas, et beaucoup moins de choses connues.

Et pour 4 sommets ?

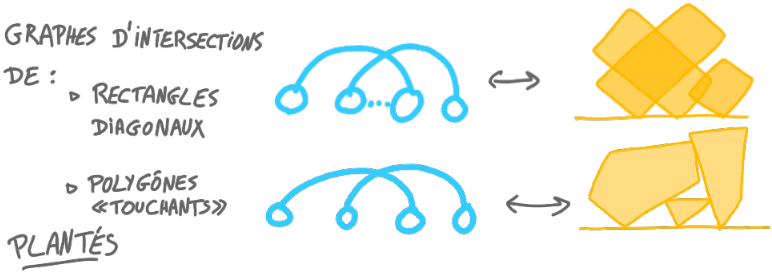
- Énormément plus de cas, et beaucoup moins de choses connues.
- Quelques exemples : 3-colorables, cographes, trivialement parfaits.





Et pour 4 sommets ?

- Énormément plus de cas, et beaucoup moins de choses connues.
- Quelques exemples : 3-colorables, cographes, trivialement parfaits.
- Piste : graphes d'intersections « plantés »



Et pour 4 sommets ?

Quelques problèmes ouverts concrets :

- Complexité de la reconnaissance des graphes d'intersections diagonaux plantés (P/NP ?)
- Lister les classes qui correspondent à des motifs et à des graphes d'intersections plantés.
- Trouver un critère pour la complexité de la reconnaissance P/NP en fonction du motif.