

Journées Graphes et Algorithmes  
I3S et INRIA, Spohia Antipolis (en distanciel)  
16–18 novembre 2020



Les JGA 2020 sont dédiées à la mémoire de Dieter Kratsch qui nous a quitté prématurément le 18 octobre dernier.



Dieter Kratsch (1959 -2020)

## Comité de programme

Dominique Barth (DAVID, Versailles),  
Cédric Bentz (CEDRIC, CNAM, Paris),  
Marthe Bonamy (LaBRI, Bordeaux),  
Jérémie Chalopin (LIF, Marseille),  
Denis Cornaz (LAMSADE, Paris Dauphine),  
Louis Esperet (G-SCOP, Grenoble),  
Éric Gourdin (OrangeLabs, Issy),  
Frédéric Havet (I3S, Sophia Antipolis),  
Gwenael Joret (ULB, Bruxelles),  
Mamadou Kanté (LIMOS, Clermond-Ferrand),  
Michael Lampis (LAMSADE, Paris Dauphine),  
Hao Li (LRI, Orsay),  
Mathieu Liedloff (LIFO, Orléans),  
Mickaël Montassier (LIRMM, Montpellier),  
Aline Parreau (LIRIS, Lyon),  
Irena Rusu (LS2N, Nantes),  
Olivier Togni (Le2i, Dijon),  
Nicolas Trotignon (LIP, ENS Lyon).

## Comité d'organisation

Foivos Fioravantes (INRIA Sophia Antipolis)  
Frédéric Havet (I3S, Sophia Antipolis)  
Luc Hogie (I3S, Sophia Antipolis)  
Thi-Viet-Ha N'Guyen (INRIA Sophia Antipolis)  
Michel Syska (I3S, Sophia Antipolis)

# Programme

## Lundi 16/11

- 9h - 10h : Exposé invité
  - Irena Penev : Sur la coloration de certains graphes sans trou pair.
- 10h20 -10h35 : Hommage à Dieter Kratsch
- 10h35 -12h15 :
  - Thimothée Martinod : Sur la complexité de l'indépendant dominant avec obligation dans les graphes.
  - Oscar Defrain : Enumérer les dominants minimaux dans les graphes d'incomparabilités d'ordres partiels de dimension bornée.
  - Louis Dublois : New Algorithms for Mixed Dominating Set.
  - Carole Muller : Packing et couverture de boules dans des graphes excluant un mineur.
- 13h30 - 14h45 :
  - Antoine Dailly : Equilibrabilité et nombre d'équilibrage des cycles.
  - Laurent Feuilloley : Classes de graphes et motifs interdits sur 3 et 4 sommets.
  - Laurine Bénéteau : ABC(T)-graphs.
- 15h - 16h : Lauréat Prix Delorme
  - Francois Pirot : Coloration de graphes épars : la suprématie de la méthode probabiliste.
- 16h20 - 18h :
  - Dimitri Lajou : Quelques pas supplémentaires vers la 1-2-3 Conjecture multiplicative.
  - Foivos Fioravantes : Sur des variations de la 1-2-3 Conjecture.
  - Fabien Jacques : Homomorphismes de graphes (m,n)-mixtes-coloriés planaires vers graphes planaires.
  - Alexandre Blanché : Conjecture de Gallai de décomposition en chemins, le cas des graphes planaires.

## Mardi 17/11

- 9h - 10h : Exposé invité
  - Matej Stehlik : Quadrangulations de surfaces.
- 10h20 - 12h :
  - Nacim Oijid : INFLUENCE, un jeu à score sur les graphes.
  - Florian Galliot : Résultats structuraux pour le jeu Maker- Breaker sur les hypergraphes 3-uniformes.
  - Quentin Deschamps : Comparaison entre la dimension métrique et le zéro-forcing number dans les graphes.
  - Ali Al Zoobi : On the k shortest simple paths : A faster algorithm with low memory consumption.
- 13h30 - 14h45 :
  - Manon Philibert : Extension des matroïdes orientées et des complexes de matroïdes orientées uniformes à des amples.
  - François Pitois : Compression par partitionnement structurel.
  - Fionn McInerney : Distinguer les boules d'un graphe.
- 15h - 16h : Tutoriel
  - Celine Scornavacca : Graphs in phylogenomics, a few (?) applications.
- 16h20 - 18h :
  - Emmanuel Curis : Analyse de données compositionnelles par recherche de composantes connexes dans un graphe aléatoire.
  - Thimotée Picavet : Couplage temporel et géométrique.
  - Mathilde Vernet : Complexité du problème de Steiner dynamique.
  - Thomas Bellitto : Complexité paramétrée dans les graphes à transitions interdites.

## Mercredi 18/11

- 9h - 10h : Exposé invité
  - Guillaume Ducoffe : Requêtes d'appartenance et autres méthodes "géométriques" pour trouver le diamètre d'un graphe.
- 10h20 - 12h :
  - Florian Hörsch : Accessibilité dans les packings d'arborescences.
  - Nikolaos Melissinos : Digraph coloring and distance to acyclicity.
  - Guillaume Aubian : Brooks' theorem on digraphs.
  - Hoang La : Déchargement assisté par ordinateur : application à la coloration à distance 2.
- 13h30 - 14h45 :
  - Jonathan Narboni : De la question de Vizing sur la coloration d'arêtes.
  - Valentin Bartier : Influence de la maille sur la complexité paramétrée du problème de reconfiguration d'ensembles indépendants.
  - Alice Joffard : Transformations linéaires d'ensembles dominants sous la règle TAR.
- 15h - 16h : Accessits Prix Delorme
  - Marc Heinrich : Dynamique de Glauber sur les graphes de tree-width bornées et les graphes cordaux.
  - Theo Pierron : Quand Hadwiger rencontre Cayley.
- 16h20 - 18h :
  - Giannos Stamoulis : Block elimination distance.
  - Ni Lui Dewi Sintiarri : On the tree-width of even-hole-free graphs.
  - Guillaume Mescoff : A polynomial time algorithm to compute the connected tree-width of a series-parallel graph.
  - Claire Hilaire : Dessin et mineur de graphe.

## Table des matières

<b>Sur la coloration de certains graphes sans trou pair</b> <u>I. Penev</u>	8
<b>Sur la complexité de l'indépendant dominant avec obligation</b> C. Laforest et <u>T. Martinod</u>	9
<b>Dom-Enum dans les graphes d'incomparabilités de dimension bornée</b> M. Bonamy, <u>O. Defrain</u> , P. Micek, L. Nourine	10
<b>New Algorithms for Mixed Dominating Set</b> <u>L. Dublois</u> , M. Lampis et V. Th. Paschos	11
<b>Couplages et couvertures par des boules des graphes excluant un mineur</b> N. Bousquet, W. Cames van Batenburg, L. Esperet, G. Joret, W. Lochet, <u>C. Muller</u> , F. Pirot	12
<b>Équilibrabilité et nombre d'équilibrage des cycles</b> <u>A. Dailly</u> , L. Eslava, A. Hansberg et D. Ventura	13
<b>Classes de graphes et motifs interdits sur 3 et 4 sommets</b> <u>L. Feuilloley</u> et M. Habib	14
<b>ABC(T)-graphs</b> <u>L. Bénéteau</u> , J. Chalopin, V. Chepoi and Y. Vaxès	15
<b>Coloration de graphes épars : la suprématie de la méthode probabiliste</b> <u>F. Pirot</u>	16
<b>Quelques pas supplémentaires vers la 1-2-3 Conjecture multiplicative</b> J. Bensmail, H. Hocquard, <u>D. Lajou</u> et É. Sopena	17
<b>Sur des variations de la 1-2-3 Conjecture</b> J. Bensmail, <u>F. Fioravantes</u> , F. Mc Inerney et N. Nisse	18
<b>Homomorphismes de graphes (m, n)-mixtes-coloriés planaires vers des graphes planaires</b> <u>F. Jacques</u> et P. Ochem	19
<b>Conjecture de Gallai de décomposition en chemins, le cas des graphes planaires</b> <u>A. Blanché</u> , M. Bonamy et N. Bonichon	20
<b>Quadrangulations de surfaces</b> <u>M. Stehlik</u>	21

<b>INFLUENCE, un jeu à score sur les graphes</b> E. Duchêne, <u>N. Oijid</u> , A. Parreau	<b>22</b>
<b>Résultats structuraux pour le jeu Maker-Breaker sur les hypergraphes 3-uniformes</b> <u>F. Galliot</u>	<b>23</b>
<b>Comparaison entre la dimension métrique et le zéro-forcing number dans les graphes</b> N. Bousquet, <u>Q. Deschamps</u> et A. Parreau	<b>24</b>
<b>On the <math>k</math> shortest path : A faster algorithm with tiny memory consumption</b> <u>A. Al Zoobi</u> , D. Coudert et N. Nisse	<b>25</b>
<b>Extension des matroïdes orientées et des complexes de matroïdes orientées uniformes à des amples</b> V. Chepoi, K. Knauer et <u>M. Philibert</u>	<b>26</b>
<b>Compression par partitionnement structurel</b> M. Haddad, <u>F. Pitois</u> , H. Seba	<b>27</b>
<b>Les representations maps et sample compression schemes pour les familles de boules dans les graphes</b> J. Chalopin, V. Chepoi, <u>F. Mc Inerney</u> , S. Ratel et Y. Vaxès	<b>28</b>
<b>Tutoriel : Graphs in phylogenomics, a few (?) applications</b> <u>C. Scornavacca</u>	<b>29</b>
<b>Analyse de données compositionnelles par recherche de composantes connexes dans un graphe aléatoire</b> <u>E. Curis</u>	<b>30</b>
<b>Couplage temporel et géométrie</b> <u>T. Picavet</u> , N. Nguyen et B. Bui-Xuan	<b>31</b>
<b>Complexité du problème de Steiner dynamique</b> S. Balev, Y. Pigné, É. Sanlaville et <u>M. Vernet</u>	<b>32</b>
<b>Complexité paramétrée dans les graphes à transitions interdites</b> <u>T. Bellitto</u> , S. Li, K. Okrasa, Ma. Pilipczuk, M. Sorge	<b>33</b>
<b>Requêtes d'appartenance et autres méthodes "géométriques" pour trouver le diamètre d'un graphe.</b> <u>G. Ducoffe</u>	<b>34</b>



<b>Atteignabilité dans les packages d'arborescences</b> F. Hörsch et Z. Szigeti	35
<b>Digraph coloring and distance to acyclicity</b> A. Harutyunyan, M. Lampis and <u>N. Melissinos</u>	36
<b>Brooks' theorem on digraphs</b> <u>G. Aubian</u> et P. Aboulker	37
<b>La coloration à distance 2 de graphes planaires par déchargement assisté par ordinateur</b> H. La et P. Valicov	38
<b>De la question de Vizing sur la coloration d'arête.</b> M. Bonamy, O. Defrain, T. Klimošová, A. Lagoutte et <u>J. Narboni</u>	39
<b>Influence de la maille sur la complexité paramétrée du problème de reconfiguration d'ensembles indépendants.</b> <u>V. Bartier</u> , N. Bousquet, C. Dallard, K. Lomer et A. Mouawad	40
<b>Transformations linéaires d'ensembles dominants sous la règle TAR</b> N. Bousquet, <u>A. Joffard</u> et P. Ouvrard	41
<b>Dynamique de Glauber sur les graphes de treewidth bornées et les graphes cordaux</b> <u>M. Heinrich</u>	42
<b>Quand Hadwiger rencontre Cayley</b> J. W. Cooper, A. Kabela, D. Král' et <u>T. Pierron</u>	43
<b>Block elimination distance</b> A. C. Giannopoulou, <u>G. Stamoulis</u> , D. M. Thilikos et Ö. Yaşar	44
<b>On the tree-width of even-hole-free graphs</b> I. Adler, E. J. Kim, <u>N. L. D. Sintiari</u> et N. Trotignon	45
<b>A polynomial time algorithm to compute the connected tree-width of a series-parallel graph</b> C. Paul, <u>G. Mescoff</u> , et D. M. Thilikos	46
<b>Dessin et mineur de graphe</b> C. Gavaille et <u>C. Hilaire</u>	47

## Sur la coloration de certains graphes sans trou pair

Irena Penev, Université Charles, Prague, ipenev@iuuk.mff.cuni.cz

Pour une famille  $\mathcal{F}$  de graphes, un graphe  $G$  est dit *sans  $\mathcal{F}$*  si aucun sous-graphe induit de  $G$  n'est isomorphe à un graphe dans  $\mathcal{F}$ . Un *trou* est un cycle induit de longueur au plus quatre; un trou est *pair* ou *impair* selon la parité de sa longueur. Il est ouvert si les graphes sans trou pair peuvent être colorés en temps polynomial. Ceci est également ouvert pour les graphes sans  $(4K_1, C_4)$ . Dans cet exposé, nous présentons un algorithme en temps polynomial pour colorer les graphes dans l'intersection de ces deux classes, c'est-à-dire les graphes sans trou pair et dont le nombre de stabilité est au plus trois, ou ce qui est équivalent, les graphes sans  $(4K_1, C_4, C_6)$ .

# Sur la complexité de l'indépendant dominant avec obligation dans les graphes

Christian Laforest, LIMOS, Aubière, [christian.laforest@isima.fr](mailto:christian.laforest@isima.fr)  
Timothée Martinod, LIMOS, Aubière, [timothee.martinod@uca.fr](mailto:timothee.martinod@uca.fr)

Notre travail [1] s'inscrit dans l'étude du problème de domination (voir [2]). Dans un graphe  $G = (V, E)$ ,  $V' \subseteq V$  est un *indépendant dominant* si  $V'$  est un indépendant de  $G$  et si chaque sommet de  $V/V'$  est voisin d'au moins un sommet de  $V'$ . Nous étudions ici une variante de ce problème classique. Pour l'exprimer, nous ajoutons au graphe  $G = (V, E)$  d'entrée une partition  $\pi = V_1, \dots, V_k$  de l'ensemble  $V$  de ses sommets. Chaque partie  $V_i$  de  $\pi$  est appelée une *obligation*. Nous dirons qu'un indépendant dominant  $V'$  de  $G$  *respecte* les obligations  $\pi$  si, pour tout  $i = 1, \dots, k$ , soit  $V_i \subseteq V'$  ( $V_i$  est entièrement dans  $V'$ ) soit  $V_i \cap V' = \emptyset$  (aucun sommet de  $V_i$  n'est dans  $V'$ ). Si un tel  $V'$  existe il s'agit d'un *Indépendant Dominant avec Obligation (IDO)* de  $(G, \pi)$ . Dans [3], il est montré que décider si  $(G, \pi)$  possède un *IDO* est NP-complet. Nos principaux résultats ici sont les suivants. Nous montrons que déterminer si l'instance  $(G, \pi)$  contient un *IDO* est NP-complet, même si les obligations sont toutes des indépendants de  $G$  et contiennent toutes  $\lambda \geq 2$  sommets, même si le graphe est un chemin ou s'il est de diamètre trois. Devant la difficulté de décider qu'une instance contient ou pas un *IDO*, nous avons relâché la contrainte de dominer tous les sommets ce qui conduit à étudier le problème suivant. Nous cherchons  $V' \subseteq V$ , un indépendant de  $G$ , respectant les obligations et dominant le nombre maximum de sommets de  $G$ . Dans ce contexte, nous avons montré que déterminer s'il existe une solution dominant au moins  $3\sqrt{n} - 2$  sommets est NP-complet même si le graphe (de  $n$  sommets) est une collection de chemins. Par ailleurs nous avons montré comment construire une solution dominant au moins  $2\sqrt{n} - 1$  sommets dans un graphe quelconque, si les obligations sont stables.

## Références

- [1] C. Laforest and T. Martinod, *On the complexity of Independent Dominant with Obligations in graphs*, hal-02946979, soumis (2020).
- [2] T. W. Haynes, S. Hedetniemi and P. Slater, *Domination in Graphs : Advanced Topic*, CRC press (1998).
- [3] A. Cornet and C. Laforest, *Graph Problems with Obligations*, conférence COCOA, LNCS 11346 (2018), 183–197.

# Énumérer les dominants minimaux dans les graphes d'incomparabilités d'ordres partiels de dimension bornée

Marthe Bonamy, LaBRI, Bordeaux, marthe.bonamy@u-bordeaux.fr

Oscar Defrain, MIMUW, Varsovie, odefrain@mimuw.edu.pl

Piotr Micek, Jagiellonian Univ., Cracovie, piotr.micek@tcs.uj.edu.pl

Lhouari Nourine, LIMOS, Clermont-Ferrand, nourine@uca.fr

L'énumération des dominants minimaux dans les graphes constitue l'un des problèmes les plus importants en théorie de l'énumération. On appelle dominant d'un graphe  $G$  un ensemble de sommet  $D$  tel que  $V(G) \subseteq N[D]$ . On dit d'un tel ensemble qu'il est minimal s'il est minimal par inclusion, i.e., si  $V(G) \not\subseteq N[D \setminus \{x\}]$  pour tout  $x \in D$ . Le problème consiste alors, étant donné  $G$ , à énumérer l'ensemble  $\mathcal{D}(G)$  de tous les dominants minimaux de  $G$ . Pour le graphe étoile de sommet interne  $u$ , et périphériques  $v_1, \dots, v_p$ , il s'agit alors d'afficher  $\{u\}$  et  $\{v_1, \dots, v_p\}$ . Notons ainsi que deux dominant minimaux peuvent être de tailles arbitrairement différentes; aussi, que le nombre de dominants minimaux peut-être exponentiel en la taille du graphe : c'est par exemple le cas pour une union disjointe d'arêtes.

L'existence d'un algorithme qui produit  $\mathcal{D}(G)$  en temps  $\text{poly}(|G| + |\mathcal{D}(G)|)$  est ouverte pour un certain nombre de classes de graphes : graphes unit-disk, sans  $C_4$  induit, de comparabilité, d'incomparabilité, etc. Le problème dans ce dernier cas est aussi difficile qu'en général. Dans cet exposé, on montre qu'il se résout efficacement lorsque les incomparabilités sont celles d'un ordre partiel de dimension bornée, dont les extensions linéaires qui témoignent de la dimension sont données. La preuve se base sur la représentation géométrique de ces graphes, données par Golubic et al. en 1983. Ces résultats généralisent des résultats précédents de Kanté et al. dans les graphes d'intervalles, et dans les graphes de comparabilités.

## Références

- [1] M. Bonamy, O. Defrain, P. Micek, and L. Nourine, *Enumerating minimal dominating sets in the (in)comparability graphs of bounded dimension posets*, arXiv preprint **2004.07214**.

## New Algorithms for Mixed Dominating Set

Louis Dublois, LAMSADE, Paris, [louis.dublois@lamsade.dauphine.fr](mailto:louis.dublois@lamsade.dauphine.fr)  
Michael Lampis, LAMSADE, Paris, [michail.lampis@lamsade.dauphine.fr](mailto:michail.lampis@lamsade.dauphine.fr)  
Vangelis Th. Paschos, LAMSADE, Paris, [paschos@lamsade.dauphine.fr](mailto:paschos@lamsade.dauphine.fr)

Un mixed dominating set est un ensemble de sommets et d'arêtes qui domine tous les sommets et toutes les arêtes d'un graphe. On étudie la complexité d'algorithmes exacts et paramétrés pour MIXED DOMINATING SET, répondant à certaines questions ouvertes. En particulier, nous donnons un algorithme paramétré par la treewidth  $tw$  s'exécutant en  $O^*(5^{tw})$  (améliorant un algorithme précédent s'exécutant en  $O^*(6^{tw})$  [1]), et une borne inférieure montrant que notre algorithme ne peut pas être amélioré sous l'hypothèse SETH, même paramétré par la pathwidth  $pw$  (améliorant une borne inférieure de  $O^*((2 - \varepsilon)^{pw})$  [1]). De plus, en utilisant une observation sur la structure des solutions minimales, on obtient des algorithmes de branchement qui améliorent le meilleur algorithme FPT paramétré par la taille de la solution  $k$ , de  $O^*(4.172^k)$  [2] à  $O^*(3.510^k)$ , et le meilleur algorithme exact, de  $O^*(2^n)$  [3] et espace exponentiel à  $O^*(1.912^n)$  et espace polynomiale.

## Références

- [1] P. Jain, M. Jayakrishnan, F. Panolan, and A. Sahu. *Mixed dominating set : A parameterized perspective*. In WG, volume 10520 of LNCS, pages 330–343. Springer, 2017
- [2] M. Xiao and Z. Sheng. *Improved parameterized algorithms for mixed domination*. In AAIM, volume 11640 of LNCS, pages 304–315. Springer, 2019
- [3] J. Madathil, F. Panolan, A. Sahu, and S. Saurabh. *On the complexity of mixed dominating set*. In CSR, volume 11532 of LNCS, pages 262–274. Springer, 2019

## Packing et couverture de boules dans des graphes excluant un mineur

Nicolas Bousquet, G-SCOP, Grenoble, [nicolas.bousquet@grenoble-inp.fr](mailto:nicolas.bousquet@grenoble-inp.fr)

Wouter Cames van Batenburg, ULB, Bruxelles, [wcomesva@ulb.ac.be](mailto:wcomesva@ulb.ac.be)

Louis Esperet, G-SCOP, Grenoble, [louis.esperet@grenoble-inp.fr](mailto:louis.esperet@grenoble-inp.fr)

Gwenaël Joret, ULB, Bruxelles, [gjoret@ulb.ac.be](mailto:gjoret@ulb.ac.be)

William Lochet, University of Bergen, Bergen, [william.lochet@gmail.com](mailto:william.lochet@gmail.com)

Carole Muller, ULB, Bruxelles, [Carole.Muller@ulb.be](mailto:Carole.Muller@ulb.be)

François Pirot, G-SCOP, Grenoble, [francois.pirot@grenoble-inp.fr](mailto:francois.pirot@grenoble-inp.fr)

Une boule de rayon  $r$  et de centre  $v$  dans un graphe  $G$  est l'ensemble de tous les sommets qui sont à distance au plus  $r$  de  $v$  dans  $G$ . Chepoi, Estellon et Vaxès [1] ont conjecturé en 2007 qu'il existe une constante universelle  $c$  telle que pour tout  $r \geq 0$  et pour tout graphe planaire  $G$ , la taille minimale d'un ensemble de sommets de  $G$  intersectant toutes les boules de rayon  $r$  est au plus  $c$  fois le nombre maximum de boules de rayon  $r$  sommet-disjointes. Nous démontrons cette conjecture. De plus, nous montrons que cette conjecture reste vraie plus généralement pour des graphes excluant un mineur fixé, et pour des boules de rayons qui varient : Pour tout entier  $t \geq 1$  il existe une constante  $c_t$  telle que pour tout graphe  $G$  sans  $K_t$ -mineur et pour tout ensemble  $\mathcal{B}$  de boules dans  $G$ , la taille minimale d'un ensemble de sommets de  $G$  intersectant toutes les boules de  $\mathcal{B}$  est au plus  $c_t$  fois le nombre maximum de boules sommet-disjointes de  $\mathcal{B}$ .

## Références

- [1] Chepoi, B. Estellon, and Y. Vaxès, *Covering planar graphs with a fixed number of balls*, Discrete Comput. Geom. **37** (2007), 237–244.
- [2] Nicolas Bousquet and Wouter Cames van Batenburg and Louis Esperet and Gwenaël Joret and William Lochet and Carole Muller and François Pirot, *Packing and covering balls in graphs excluding a minor*, Combinatorica, accepted, arXiv 2001.04517.

## Équilibrabilité et nombre d'équilibrage des cycles

Antoine Dailly, Instituto de Matemáticas, UNAM Juriquilla, Mexique,  
[antoine.dailly@im.unam.mx](mailto:antoine.dailly@im.unam.mx)

Laura Eslava, IIMAS, UNAM Ciudad Universitaria, Mexique

Adriana Hansberg, Instituto de Matemáticas, UNAM Juriquilla, Mexique

Denae Ventura, Instituto de Matemáticas, UNAM Juriquilla, Mexique

Dans une 2-coloration  $R \sqcup B$  des arêtes de  $K_n$ , une *copie équilibrée* d'un graphe  $G(V, E)$  est une copie de  $G$  telle que  $\{|E \cap R|, |E \cap B|\} = \{\lfloor \frac{|E|}{2} \rfloor, \lceil \frac{|E|}{2} \rceil\}$ , *i.e.* la moitié des arêtes sont dans  $R$  et l'autre dans  $B$ . La question de l'existence garantie d'une copie équilibrée d'un graphe donné se situe à l'intersection entre la théorie de Ramsey et la théorie des graphes extrémaux :

**Définition** ([1]). *Soient  $G$  un graphe simple et fini et  $n$  un entier. Soit  $\text{bal}(n, G)$  le plus petit entier, s'il existe, tel que toute 2-coloration  $R \sqcup B$  des arêtes de  $K_n$  vérifiant  $|R|, |B| > \text{bal}(n, G)$  contient une copie équilibrée de  $G$ .*

*S'il existe un  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\text{bal}(n, G)$  existe, alors  $G$  est dit équilibrable et  $\text{bal}(n, G)$  est appelé son nombre d'équilibrage.*

Dans leur article introductif, Caro, Hansberg et Montejano [1] ont caractérisé les graphes équilibrables : il s'agit des graphes ayant une coupe et un sous-graphe induit contenant chacun la moitié des arêtes du graphe.

Nous étudions l'équilibrabilité et, le cas échéant, le nombre d'équilibrage des cycles. Nous démontrons le résultat suivant :

**Théorème.** *Soient  $k$  un entier strictement positif,  $n$  un entier tel que  $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$ , et  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ .*

- $C_{4k+\epsilon}$  est équilibrable, et  $\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)$  ;
- $C_{4k}$  est équilibrable, et  $(k-1)n - (k-1)^2 \leq \text{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k$  ;
- $C_{4k+2}$  n'est pas équilibrable.

Notre preuve utilise la caractérisation des graphes équilibrables, puis nous partons du nombre d'équilibrage des chemins [1] pour trouver celui des cycles.

## Références

- [1] Caro, Y., Hansberg, A., & Montejano, A. (2018). Unavoidable chromatic patterns in 2-colorings of the complete graph. *arXiv preprint arXiv :1810.12375*.

## Classes de graphes et motifs interdits sur 3 et 4 sommets

Laurent Feuilloley, Universidad de Chile, [feuilloley@dii.uchile.cl](mailto:feuilloley@dii.uchile.cl)

Michel Habib, IRIF, Université de Paris, [habib@irif.fr](mailto:habib@irif.fr)

Ce travail porte sur les caractérisations et la reconnaissance des classes de graphes. Une méthode populaire de caractériser une classe consiste à lister un ensemble minimal de sous-graphes induits interdits. Malheureusement cette méthode mène pas toujours à un algorithme de reconnaissance efficace. D'un autre coté, beaucoup de classes de graphes peuvent être reconnues de manière efficace en utilisant des ordres sur les sommets, comme par exemple l'ordre donné par un certain parcours.

Nous étudions alors les graphes ayant un ordre évitant certaines structures ordonnées. Plus précisément, nous considérons des structures que nous appelons « motifs sur trois sommets » et la complexité de la reconnaissance des classes associées à ces motifs. Dans ce domaine, nous comptons trois travaux importants. D'abord, Skrien en 1982, et indépendamment Damashke en 1990, remarquent que plusieurs classes de graphes tels que les graphes cordaux, bipartis, d'intervalles et de comparabilité peuvent être caractérisées par ce que nous appelons des motifs interdits. Ensuite, du point de vue algorithmique, Hell, Mohar et Rafiey montrent en 2014 que toute classe définie par un ensemble de motifs sur trois nœuds interdits peut être reconnue en temps  $O(n^3)$ , en utilisant un algorithme basé sur une extension de 2-SAT. Nous poursuivons ces deux pistes de recherche, en caractérisant systématiquement toutes les classes définies par des ensemble de motifs sur trois sommets, et en prouvant que parmi les 22 classes que nous distinguons (à quelques opérations simples près), 20 sont en fait reconnaissables en temps linéaire.

Pour les motifs sur 4 sommets le panorama change beaucoup. En particulier il existe des classes de graphes caractérisées par des motifs interdits à 4 sommets dont la reconnaissance est NP-complète. Nous présenterons nos premiers résultats sur les motifs à 4 sommets et laisserons de nombreuses questions ouvertes.

## Références

- [1] Laurent Feuilloley and Michel Habib, *Graph classes and forbidden patterns on three vertices*, arxiv : 1812.05913. To appear in SIDMA.



## ABC(T)-graphs

Laurine Bénéteau, LIS, Marseille, [laurine.beneteau@lis-lab.fr](mailto:laurine.beneteau@lis-lab.fr)

Jérémie Chalopin, LIS, Marseille, [jeremie.chalopin@lis-lab.fr](mailto:jeremie.chalopin@lis-lab.fr)

Victor Chepoi, LIS, Marseille, [victor.chepoi@lis-lab.fr](mailto:victor.chepoi@lis-lab.fr)

Yann Vaxès, LIS, Marseille, [yann.vaxes@lis-lab.fr](mailto:yann.vaxes@lis-lab.fr)

A *profile*  $\pi = (x_1, \dots, x_k)$  is a finite sequence (with repetitions) of vertices of a graph  $G$ . A *consensus function*  $L$  maps any profile  $\pi$  to a subset of  $V(G)$ . The *median function* (mapping any profile  $\pi$  to the set of all vertices minimizing the distance-sum  $\sum_{i=1}^k d(v, x_i)$ ) is an example of a consensus function. It was shown in [2] that the median functions satisfy the following axioms :

(A) for any profile  $\pi$  and any of its permutation  $\pi^\sigma$ ,  $L(\pi) = L(\pi^\sigma)$ ,

(B)  $L(u, v) = \{z : d(u, z) + d(z, u) = d(u, v)\}$ ,

(C) if  $L(\pi) \cap L(\rho) \neq \emptyset$ , then  $L(\pi\rho) = L(\pi) \cap L(\rho)$ ,

(T) for any triangle  $uvw$  of  $G$ ,  $L(u, v, w) = \{u, v, w\}$ .

An *ABC(T)-graph* is a graph in which the median functions are the consensus functions satisfying the axioms (A),(B),(C) (and (T)). The *ABC(T)-problem* [2] asks to characterize the ABC(T)-graphs. It was previously shown that median graphs are ABC.

We significantly extend the classes of ABC- and ABCT-graphs.  $G$  is a *graph with  $G^p$ -connected medians* if all median sets of  $G$  are connected in the  $p$ th power  $G^p$  of  $G$ . The graphs with ( $G^1$ -)connected medians were characterized in [1], where it was also shown that Helly graphs, basis graphs of matroids, and weakly median graphs (including median graphs) have connected medians. Additionally, we establish that bridged graphs (in particular, chordal graphs) and absolute retracts of bipartite graphs are graphs with  $G^2$ -connected medians. We prove the following theorem :

**Theorem :** *Graphs with connected medians are ABCT. Modular graphs with  $G^2$ -connected medians (including bipartite absolute retracts) are ABC.*

## Références

- [1] H.-J. Bandelt and V. Chepoi, *Graphs with connected medians*, SIAM J. Discr. Math., 15 (2002), 268–282.
- [2] F. R. McMorris, H. M. Mulder, B. Novick and R. C. Powers, *An ABC-Problem for location and consensus functions on graphs*, Discrete Appl. Math., 207 (2016), 15–28.

## Coloration de graphes épars : la suprématie de la méthode probabiliste

François Pirot, G-SCOP, Grenoble, [francois.piroto@grenoble-inp.fr](mailto:francois.piroto@grenoble-inp.fr)

Le théorème de Ramsey [1] nous dit que tout graphe suffisamment grand contient soit une grande clique, soit un grand ensemble indépendant. Ainsi, les graphes sans triangle contiennent tous un grand ensemble indépendant, et en caractériser la taille extrême est un problème encore ouvert, d'une grande difficulté. Cependant, il est possible de renforcer ce résultat en de nombreux aspects, en demandant une coloration du graphe plutôt qu'un seul ensemble indépendant, ou bien en autorisant une certaine densité de triangles ou en interdisant d'autres cycles.

Dans le cadre de la théorie de Ramsey, les graphes aléatoires nous fournissent de façon systématique les constructions les plus extrêmes connues, et c'est la méthode probabiliste qui nous permet de garantir les résultats les plus forts du domaine. Cet exposé sera l'occasion de présenter les évolutions de la méthode probabiliste appliquée à la coloration de graphes de faible densité, qui surpasse de loin tous les autres outils dans ce cadre particulier.

## Références

- [1] F. P. Ramsey. *On a problem of formal logic*. Proceedings of the London Mathematical Society, s2-30(1) :264–286, 1930.

## Quelques pas supplémentaires vers la 1-2-3 Conjecture multiplicative

Julien Bensmail, Université Côte d'Azur, Nice, [jbensmail@unice.fr](mailto:jbensmail@unice.fr)  
Hervé Hocquard, LaBRI, Bordeaux, [herve.hocquard@u-bordeaux.fr](mailto:herve.hocquard@u-bordeaux.fr)  
Dimitri Lajou, LaBRI, Bordeaux, [dimitri.lajou@u-bordeaux.fr](mailto:dimitri.lajou@u-bordeaux.fr)  
Éric Sopena, LaBRI, Bordeaux, [eric.sopena@u-bordeaux.fr](mailto:eric.sopena@u-bordeaux.fr)

La version multiplicative de la 1-2-3 Conjecture, introduite par Skowronek-Kaziów en 2012, prétend que tous les graphes n'ayant pas de composantes connexes composées exactement d'une seule arête, admettent un étiquetage de leurs arêtes à valeurs dans l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ , tel que la fonction qui associe, à tout sommet  $u$ , le produit des étiquettes des arêtes incidentes à  $u$ , est une coloration propre des sommets du graphe.

À ce jour, cette conjecture est vérifiée pour les graphes complets et les graphes de nombre chromatique au plus 3. Remarquons aussi que l'énoncé de la conjecture est vérifié quand on autorise les étiquettes à prendre leur valeur dans l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

En 2018, Vučković a démontré la version multi-ensemble de la 1-2-3 Conjecture, c'est-à-dire la version où l'on remplace le produit des étiquettes par le multi-ensemble de leurs valeurs. Nous nous sommes intéressés à l'adaptation de cette preuve dans le cadre de la version multiplicative de la 1-2-3 Conjecture.

Nous prouvons que cette conjecture est vraie pour les graphes 4-chromatiques. Nous construisons aussi, pour tout graphe, un étiquetage ayant "presque" la bonne propriété. En effet, dans cet étiquetage, deux sommets voisins peuvent avoir le même produit, mais seuls les sommets dont le produit vaut 1 peuvent se trouver dans ce cas, et toutes les composantes connexes induites par ces sommets ont au plus deux sommets. Cela conduit à un nouveau problème que nous résolvons pour certaines classes de graphes.

## Sur des variations de la 1-2-3 Conjecture.

Julien Bensmail, UCA, CNRS, Inria, I3S, [jbensmail@unice.fr](mailto:jbensmail@unice.fr)

Foivos Fioravantes, UCA, CNRS, Inria, I3S, [foivos.fioravantes@inria.fr](mailto:foivos.fioravantes@inria.fr)

Fionn Mc Inerney, LIS, AMU, CNRS, Marseille, France, [fmcinern@gmail.com](mailto:fmcinern@gmail.com)

Nicolas Nisse, UCA, CNRS, Inria, I3S, [nicolas.nisse@inria.fr](mailto:nicolas.nisse@inria.fr)

Un  $k$ -étiquetage d'un graphe  $G = (V, E)$  est une fonction  $\ell : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ . À chaque  $k$ -étiquetage  $\ell$ , correspond une coloration  $c_\ell$  des sommets de  $G$  telle que  $c_\ell(v) = \sum_{u \in N(v)} \ell(uv)$  pour tout sommet  $v \in V$ . Nous disons que  $\ell$  est un  $k$ -étiquetage *propre* si  $c_\ell$  est une coloration propre de  $G$ . Le paramètre  $\chi_\Sigma(G)$  est l'entier minimum  $k$  tel que  $G$  admet un  $k$ -étiquetage propre. Selon la fameuse 1-2-3 Conjecture [1], tous les graphes dont aucune composante connexe n'est isomorphe à  $K_2$ , admettent un 3-étiquetage propre, i.e., la question est de savoir si  $\chi_\Sigma(G) \leq 3$  pour tout graphe de ce type. Afin de mieux comprendre cette conjecture, une série de travaux récents s'intéresse à l'optimisation d'autres paramètres, résultant en des variantes intéressantes en soi. Nous présentons ici une partie de notre contribution dans ce domaine

Soit  $mE(G)$  la somme minimum des étiquettes d'un étiquetage propre de  $G$ . Nous prouvons des résultats de complexité et donnons des bornes pour ce paramètre dans différentes classes de graphes (voir [2]). Nous conjecturons que, en général,  $mE(G) \leq 2|E|$ , et que  $mE(G) \leq \frac{3}{2}|E|$  si  $G$  est biparti.

Ces deux conjectures sont basées sur nos résultats et l'intuition que, en général, "peu" de 3 sont nécessaires pour construire un 3-étiquetage propre. Afin d'étudier cette intuition, nous introduisons le paramètre  $mT(G)$ , désignant le nombre minimum d'arêtes recevant l'étiquette 3 par un 3-étiquetage propre de  $G$ . Nous construisons des familles infinies de graphes exigeant un nombre non borné de 3. Pour ces familles, nous montrons des bornes sur  $mT(G)$  qui dépendent de  $|E|$ . Nous conjecturons que  $mE(G) \leq \frac{|E|}{3}$ , et montrons cette conjecture pour certaines familles de graphes 3-chromatiques.

## Références

- [1] M. Karoński, T. Łuczak, A. Thomason. Edge weights and vertex colours. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 91 :151–157, 2004.
- [2] J. Bensmail, F. Fioravantes, N. Nisse. On Proper Labellings of Graphs with Minimum Label Sum. In IWOCA 2020. *LNCS*, vol 12126. Springer, 2020.

## Homomorphismes de graphes $(m, n)$ -mixtes-coloriés planaires vers graphes planaires

Fabien Jacques, LIRMM, Montpellier, [fabien.jacques@lirmm.fr](mailto:fabien.jacques@lirmm.fr)

Pascal Ochem, LIRMM, Montpellier, [pascal.ochem@lirmm.fr](mailto:pascal.ochem@lirmm.fr)

Un graphe  $(m, n)$ -mixte-colorié  $G = (V, A_1, A_2, \dots, A_m, E_1, E_2, \dots, E_n)$  est un graphe possédant  $m$  types (ou couleurs) d'arcs et  $n$  types d'arêtes. Deux arcs et/ou arêtes ne peuvent pas être incidents à la même paire de sommets. Un homomorphisme depuis un graphe  $(m, n)$ -mixte-colorié  $G$  vers un autre graphe  $(m, n)$ -mixte-colorié  $H$  est un morphisme  $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$  tel que chaque arête (resp. arc) de  $G$  a pour image une arête (resp. un arc) de  $H$  de même couleur (et orientation). Un graphe  $(m, n)$ -mixte-colorié  $T$  est dit  $P_g^{(m,n)}$ -universel si tout graphe appartenant à  $P_g^{(m,n)}$  (la classe des graphes  $(m, n)$ -mixtes-coloriés planaires de maille au moins  $g$ ) admet un homomorphisme vers  $T$ .

Nous cherchons à trouver pour chaque couple  $(m, n)$  un graphe  $P_g^{(m,n)}$ -universel **planaire** minimal en nombre de sommets (sans contrainte sur  $g$ ). Dans le cas des graphes simples, le théorème des quatre couleurs est équivalent à dire que  $K_4$  est un graphe  $P_3^{(0,1)}$ -universel. Ceci est amélioré (dans ce contexte) par le théorème de Grötzsch qui dit que  $K_3$  est un graphe  $P_4^{(0,1)}$ -universel (rappel : nous n'imposons pas de contrainte sur  $g$ ). Tout d'abord, nous montrons que nous pouvons nous restreindre aux cas des graphes simples, orientés et 2-arête-coloriés :  $(m, n) \in \{(0, 1), (1, 0), (0, 2)\}$ . Nous trouvons des graphes universels planaires optimaux en nombre de sommets dans les deux cas restants et présentons des résultats de complexité.

**Théorème.** *Pour tout  $g \geq 3$ , il n'existe pas de graphe  $P_g^{(m,n)}$ -universel planaire si  $2m + n \geq 3$ .*

**Théorème.**

1. *Il existe un graphe  $P_{28}^{(1,0)}$ -universel planaire à 5 sommets  $(\vec{T}_5)$ .*
2. *Il existe un graphe  $P_{22}^{(0,2)}$ -universel planaire à 6 sommets  $(T_6)$ .*

**Théorème.**

1. *Pour tout  $g \geq 3$ , soit tous les graphes (bipartis) dans  $P_g^{(1,0)}$  admettent un homomorphisme vers  $\vec{T}_5$ ; soit il est NP-complet de savoir si un graphe (biparti) dans  $P_g^{(1,0)}$  admet un homomorphisme vers  $\vec{T}_5$ .*
2. *Pour tout  $g \geq 3$ , soit tous les graphes (bipartis) dans  $P_g^{(0,2)}$  admettent un homomorphisme vers  $T_6$ ; soit il est NP-complet de savoir si un graphe (biparti) dans  $P_g^{(0,2)}$  admet un homomorphisme vers  $T_6$ .*

## Conjecture de Gallai de décomposition en chemins : le cas des graphes planaires

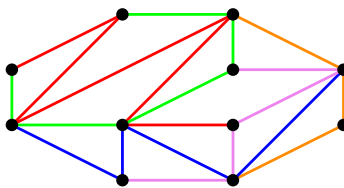
Alexandre Blanché, LaBRI, Bordeaux, alexandre.blanche@labri.fr

Marthe Bonamy, LaBRI, Bordeaux, marthe.bonamy@labri.fr

Nicolas Bonichon, LaBRI, Bordeaux, bonichon@labri.fr

En 1968, Gallai a conjecturé [1] que les arêtes de tout graphe connexe à  $n$  sommets pouvaient être partitionnées en au plus  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  chemins arête-disjoints. Cette conjecture est encore ouverte aujourd'hui, mais fut prouvée sur certaines classes de graphes telles que les graphes ayant au plus un sommet de degré pair [1], les graphes de degré maximum 5 [2], ou encore les graphes planaires sans triangle [3].

Nous avons prouvé la conjecture sur la classe des graphes planaires, c'est-à-dire les graphes pouvant être dessinés dans le plan sans croisement d'arêtes. Le graphe suivant est un exemple de planaire décomposé en 5 chemins :



On observe qu'une borne plus fine de  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  est prouvable sur certaines classes. Il est facile de voir que c'est impossible sur les *semi-cliques impaires*, i.e. les graphes ayant  $2k+1$  sommets et au moins  $2k^2+1$  arêtes, mais peut-on obtenir cette borne sur tout autre graphe ?

Il y a exactement deux semi-cliques impaires planaires :  $K_3$  et  $K_5^-$  ( $K_5$  moins une arête). Nous prouvons ce résultat sur les planaires : hormis  $K_3$  et  $K_5^-$ , tout graphe planaire connexe peut être décomposé en au plus  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  chemins.

## Références

- [1] L. Lovász, *On Covering of Graphs*, Theory of Graphs (ed. P. Erdős, G. Katona), Akad. Kiadó, Budapest (1968) 231-236.
- [2] M. Bonamy, T. J. Perrett, *Gallai's path decomposition conjecture for graphs of small maximum degree*, Discrete Math. **342** (2019), no. 5.
- [3] F. Botler, A. Jiménez, M. Sambinelli, *Gallai's path decomposition conjecture for triangle-free planar graphs*, arXiv :1803.06768 (2018).

## Quadrangulations de surfaces

Matej Stehlik, G-SCOP, Grenoble, [matej.stehlik@grenoble-inp.fr](mailto:matej.stehlik@grenoble-inp.fr)

Les graphes plongés dans des surfaces sont un sujet classique qui forme un lien naturel entre les mathématiques discrètes et continues. Dans cet exposé, je me concentrerai sur les plongements où toutes les faces sont bordées par un nombre pair d'arêtes, et en particulier sur les quadrangulations. Je montrerai que certains problèmes de la théorie des graphes ont des liens surprenants avec la topologie.

# INFLUENCE, un jeu à score sur les graphes

Éric Duchêne, LIRIS, U. Lyon 1, [eric.duchene@univ-lyon1.fr](mailto:eric.duchene@univ-lyon1.fr)

Nacim Oijid, ENS de Lyon, [nacim.oijid@ens-lyon.fr](mailto:nacim.oijid@ens-lyon.fr)

Aline Parreau, LIRIS, U. Lyon 1, CNRS, [aline.parreau@univ-lyon1.fr](mailto:aline.parreau@univ-lyon1.fr)

INFLUENCE est un jeu à score introduit par Duchêne et al. [1]. Ce jeu s'inscrit dans la théorie des jeux combinatoires à score de John Milnor [2] en 1953. Bien que cette théorie ait été introduite dans les années 60, ce n'est que très récemment que la théorie des jeux à score a suscité un regain d'intérêt de la part de la communauté.

Nous nous intéresserons ici aux instances biparties de ce jeu. Les joueurs Left (noir) et Right (blanc) jouent à tour de rôle sur un graphe 2-coloré en noir et blanc, en retirant un sommet de leur couleur et ses voisins du graphe, marquant ainsi un nombre de point égal au nombre de sommets retirés. Le score final de la partie, noté  $LS(G)$  (resp.  $RS(G)$ ) si le joueur Left (resp. Right) commence, est la différence entre le nombre de sommets pris par Left et celui pris par Right, lorsque les deux joueurs jouent de façon optimale.

Sur ce problème, nous avons obtenu plusieurs résultats :

**Théorème 1.** "Étant donné un graphe biparti  $G$  et un entier  $k \in \mathbb{Z}$ , a-t-on  $LS(G) \geq k$ " est un problème PSPACE-complet.

**Théorème 2.** Soit  $G = ((B, W), E)$  un graphe biparti et  $\phi$  un automorphisme involutif de  $G$  tel que  $\phi(B) = W$  et pour tout  $v \in B$ ,  $d(v, \phi(v)) \geq 3$ . Alors  $LS(G) = RS(G) = 0$ .

**Théorème 3.** Soit  $G = ((B, W), E)$  un graphe biparti. On a  $|LS(G) - RS(G)| = O(\Delta(G)^3)$ .

Nous avons alors étudié certaines familles particulières de graphes bipartis (chemins, grilles, hypercubes, ...) sur lesquelles les scores peuvent être calculés ou au moins encadrés par des bornes non triviales.

## Références

- [1] Duchêne, Gonzalez, Parreau, Rémila and Solal, *INFLUENCE : a partisan scoring game on graphs*, [arXiv2005.12818](https://arxiv.org/abs/2005.12818) (2020).
- [2] Milnor, *Sums of Positional Games*, Contributions to the Theory of Games, **vol.2**, (1953)



# Résultats structuraux pour le jeu Maker-Breaker sur les hypergraphes 3-uniformes

Florian Galliot, Institut Fourier, Grenoble, galliotf@univ-grenoble-alpes.fr

Le jeu Maker-Breaker est un jeu combinatoire qui se joue sur un hypergraphe  $H$ . Deux joueurs s'affrontent, Maker et Breaker, qui jouent à tour de rôle. A chaque tour, Maker choisit un sommet non coloré et le colore en bleu, puis Breaker choisit un sommet non coloré et le colore en rouge. L'objectif de Maker est d'obtenir une arête monochrome bleue, et l'objectif de Breaker est de l'en empêcher i.e. d'obtenir un transversal monochrome rouge. Si la plupart des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour une victoire de l'un ou l'autre joueur dans la littérature porte sur la taille et le nombre des arêtes de  $H$ , on cherche ici des critères portant sur la structure de  $H$ .

On étudie le cas 3-uniforme, où le principe clé est celui de forçage : sur un chemin *linéaire* (deux arêtes distinctes s'intersectent en 0 ou 1 sommet) avec une extrémité bleue, Maker peut consumer le chemin à partir de cette extrémité en forçant tous les coups de Breaker. On en déduit, si Maker joue en  $x$ , une famille de *dangers* élémentaires en  $x$  i.e. de sous-hypergraphes contenant  $x$  dans lesquels Breaker doit répondre immédiatement (voir Figure 1). Notre résultat principal est grossièrement la réciproque de ceci : à un élargissement près de cette famille de dangers qui se fait sans aggravation algorithmique, Breaker gagne dès lors qu'il peut répondre au premier coup  $x$  de Maker par un sommet  $y$  qui soit contenu dans tous les dangers en  $x$ .

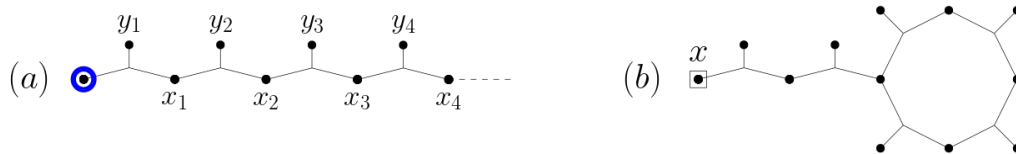


FIGURE 1 – (a) Un chemin de forçage : Maker joue  $x_1$ , Breaker joue  $y_1$  (forcé), Maker joue  $x_2$ , Breaker joue  $y_2$  (forcé) etc. (b) Un exemple de danger en  $x$ .

Ce théorème a une conséquence algorithmique intéressante : le problème consistant à décider du vainqueur du jeu Maker-Breaker sur un hypergraphe 3-uniforme se réduit polynomialement au problème d'existence d'un chemin linéaire entre deux sommets donnés d'un hypergraphe 3-uniforme, dont la complexité est pour l'instant inconnue. Dans le cas où  $H$  est linéaire, on en déduit cependant que notre problème est dans P, une nouvelle preuve d'un résultat déjà établi par Martin Kutz (2005).

## Comparaison entre la dimension métrique et le zéro-forcing number dans les graphes

Nicolas Bousquet, LIRIS, Lyon, nicolas.bousquet@liris.cnrs.fr

Quentin Deschamps, LIRIS, Lyon, quentin.deschamps@liris.cnrs.fr

Aline Parreau, LIRIS, Lyon, aline.parreau@liris.cnrs.fr

Soit  $G$  un graphe non-orienté. La *dimension métrique*  $\dim(G)$  de  $G$  est la taille minimale d'un *ensemble résolvant* : un ensemble de sommets  $S$  tel que chaque sommet de  $G$  est uniquement déterminé par ses distances aux éléments de  $S$ . Le *zéro-forcing number*  $Z(G)$  de  $G$  est la taille minimale d'un *ensemble zéro-forçant* : un ensemble  $Z$  de sommets noirs (les autres sommets sont blancs) tel que tous les sommets de  $G$  peuvent être colorés en noir en appliquant itérativement la règle : *Un sommet blanc est coloré en noir si c'est le seul voisin blanc d'un sommet noir.*

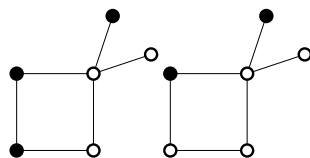


FIGURE 2 – Les sommets noirs forment à gauche un ensemble résolvant et à droite un ensemble zéro-forçant, tout deux de taille minimale.

Eroh, Kang et Yi [1] comparent ces deux paramètres et proposent la conjecture suivante.

**Conjecture.** *Pour tout graphe  $G$ ,  $\dim(G) \leq Z(G) + c(G)$  où  $c(G)$  est le nombre minimum d'arêtes à retirer de  $G$  pour obtenir une forêt.*

Nous prouvons une version affaiblie de cette conjecture :

**Théorème.** *Pour tout graphe  $G$ ,  $\dim(G) \leq Z(G) + 6c(G)$ .*

Nous prouvons aussi que la conjecture est vraie pour les graphes dont les cycles ont leurs arêtes disjointes et que dans le cas d'un graphe  $G$  possédant un unique cycle de longueur impaire,  $\dim(G) \leq Z(G)$ .

## Références

- [1] L. Eroh, C. X.Kang et E. Yi, *A Comparison between the Metric Dimension and Zero Forcing Number of Trees and Unicyclic Graphs* Acta Mathematica Sinica, English Series **33**(-) (2017), 731–747.

# On the $k$ shortest simple paths : A faster algorithm with low memory consumption

Ali Al Zoobi, David Coudert and Nicolas Nisse

Université Côte d'Azur, Inria, CNRS, I3S, France

{ali.al-zoobi,david.coudert,nicolas.nisse}@inria.fr

The classical  $k$  shortest simple paths problem ( $kSSP$ ) returns top- $k$  shortest simple paths between a pair of source and destination nodes in a graph. This problem has numerous applications in various kinds of networks (road, transportation and social networks, etc.) and is also used as a building block for solving optimization problems.

Let  $D = (V, A)$  be a digraph with  $n$  vertices and  $m$  arcs, we define an  $s, t$  directed simple path as a sequence of vertices  $s = v_1, v_2, \dots, v_l = t$  s.t.  $v_i \in V$ ,  $(v_i, v_{i+1}) \in A$  for all  $1 \leq i < l$  and  $v_i \neq v_j$  for all  $0 \leq i < j \leq l$ . Yen's algorithm [1] is the algorithm with the best known time complexity for solving the  $kSSP$  problem, that is  $O(kn(m + n \log n))$ . Since then, the problem has been widely studied from an algorithm engineering perspective, and impressive improvements have been achieved.

The current fastest algorithm solving the  $kSSP$  is the *Sidetracks-Based* (SB) algorithm proposed in [2] followed by an improvement in [4]. The major issue of the SB algorithm is its big memory consumption. Considering low working memory, the fastest algorithm solving the  $kSSP$  problem is the *Node-Classification* (NC) algorithm [3]. Here, we propose a new algorithm called *Postponed Node-Classification* (PNC) to solve the  $kSSP$  with a small working memory. We did experiments on some road networks of the 9th DIMAC's challenge and our computational results show an average speed up by a factor of 2 to 6 with a similar working memory consumption as NC.

## Références

- [1] Yen, J. Y. "An algorithm for finding shortest routes from all source nodes to a given destination in general networks." *Quarterly of Applied Mathematics* 27.4 (1970).
- [2] Kurz, Denis, and Petra Mutzel. "A Sidetrack-Based Algorithm for Finding the  $k$  Shortest Simple Paths in a Directed Graph." (ISAAC 2016).
- [3] Feng, Gang. "Finding  $k$  shortest simple paths in directed graphs : A node classification algorithm." *Networks* 64.1 (2014) : 6-17.
- [4] Al Zoobi, Ali, David Coudert, and Nicolas Nisse. "Space and time trade-off for the  $k$  shortest simple paths problem." (SEA 2020).

## Extension des matroïdes orientées et des complexes de matroïdes orientées uniformes à des amples.

Victor Chepoi, LIS, Marseille, [victor.chepoi@lis-lab.fr](mailto:victor.chepoi@lis-lab.fr)

Kolja Knauer, LIS, Marseille et UB, Barcelona, [kolja.knauer@lis-lab.fr](mailto:kolja.knauer@lis-lab.fr)

Manon Philibert, LIS, Marseille, [manon.philibert@lis-lab.fr](mailto:manon.philibert@lis-lab.fr)

L'une des plus vieilles conjectures en théorie de l'apprentissage, posée par Floyd et Warmuth, consiste à déterminer si une famille d'ensembles quelconque de VC-dimension  $d$  admet un schéma de compression de taille  $O(d)$ . Moran et Warmuth [3] ont montré qu'il existe un schéma de compression de taille  $d$  pour les familles amples de VC-dimension  $d$ . La conjecture de Floyd et Warmuth serait résolue si nous montrions que toute famille d'ensembles de VC-dimension  $d$  peut être étendue à un ensemble ample de VC-dimension  $O(d)$ . Dans un précédent article [1], nous avons montré que nous pouvons compléter tout cube partiel de VC-dimension 2 en ample de même VC-dimension. Compléter sans augmenter la VC-dimension n'est plus possible en VC-dimension supérieure. En particulier, il existe un cube partiel de VC-dimension 3 dont chaque complétion en ample est de VC-dimension au moins 4. Notons que cet exemple ne remet pas en cause la conjecture qui autorise une augmentation linéaire de la VC-dimension. Pour étendre les cubes partiels de VC-dimension 2, nous les complétons d'abord en complexes de matroïdes orientées (COMs) avant de les compléter en amples de VC-dimension 2. Pour poursuivre nous nous sommes naturellement intéressés à la complétion en ample de cette classe intermédiaire que sont les COMs. La question de cette complétion constitue déjà un problème ouvert intéressant et difficile. Nous présentons ici notre article [2] dans lequel nous montrons qu'il existe une telle complétion en amples pour les matroïdes orientées et les complexes de matroïdes orientées uniformes, deux sous-familles des COMs.

## Références

- [1] V. Chepoi, K. Knauer and M. Philibert, *Two-dimensional partial cubes*, Electron. J. Comb. **27(3)** (2020), p3.29, 40.
- [2] V. Chepoi, K. Knauer and M. Philibert, *Ample completions of OMs and CUOMs*, arXiv :2007.12527 (2020).
- [3] S. Moran and M. K. Warmuth, *Labeled compression schemes for extremal classes*, ALT 2016, 34–49.

## Compression par partitionnement structurel

Mohammed Haddad, LIRIS, Lyon, [mohammed.haddad@univ-lyon1.fr](mailto:mohammed.haddad@univ-lyon1.fr)

François Pitois, LIRIS, Lyon, [francois.pitois@univ-lyon1.fr](mailto:francois.pitois@univ-lyon1.fr)

Hamida Seba, LIRIS, Lyon, [hamida.seba@univ-lyon1.fr](mailto:hamida.seba@univ-lyon1.fr)

Les graphes sont un outil utilisé pour représenter de nombreux types de données. Cependant, ces graphes sont souvent très grands, et leur stockage peut s'avérer coûteux en espace mémoire. Une solution serait alors de compresser ces graphes. La compression de graphes peut être avec ou sans perte. Dans le cas sans perte, le principal but est celui de minimiser l'espace consommé et de faire de l'archivage. Lorsque la compression tolère un certain degré de perte, le but est de ne garder que les informations utiles à l'application étudiée. Dans ce travail, nous nous intéressons principalement à la compression sans perte.

Notre approche de compression se base sur le partitionnement structurel. Cela consiste à repérer des structures simples dans le graphe (*ex.* cliques), et à résumer le graphe suivant ces structures. Concrètement, notre algorithme fonctionne en deux étapes. D'abord, sélectionner un petit nombre de structures parmi des structures repérées via sept algorithmes de recherche structurelle. Ces sept algorithmes sont les mêmes que ceux choisis et utilisés par ConDeNSe [1]. Ensuite, découper ces structures de façon à gérer les éventuels chevauchements. La compression s'opère alors sur la matrice d'adjacence du graphe, ordonnée suivant les structures, et découpée en blocs de taille variable.

## Références

- [1] Y. Liu, T. Safavi, N. Shah, and D. Koutra, *Reducing large graphs to small supergraphs: a unified approach*, *Social Network Analysis and Mining* **8** (2018), 1–18.

## Distinguer les boules d'un graphe

Jérémie Chalopin, LIS, Marseille, [jeremie.chalopin@lis-lab.fr](mailto:jeremie.chalopin@lis-lab.fr)

Victor Chepoi, LIS, Marseille, [victor.chepoi@lis-lab.fr](mailto:victor.chepoi@lis-lab.fr)

Fionn Mc Inerney, LIS, Marseille, [fmcinern@gmail.com](mailto:fmcinern@gmail.com)

Sébastien Ratel, LIS, Marseille, [sebastien.ratel@lis-lab.fr](mailto:sebastien.ratel@lis-lab.fr)

Yann Vaxès, LIS, Marseille, [yann.vaxes@lis-lab.fr](mailto:yann.vaxes@lis-lab.fr)

Les *schémas de compression d'échantillons* ont été définis pour leurs applications dans les algorithmes d'apprentissage [3]. Étant donné un domaine  $U$ , un *concept*  $C$  est un sous-ensemble de  $U$ . Un *échantillon* est un ensemble d'éléments de  $U$  où chaque élément est associé à une étiquette dans  $\{-1, +1\}$ . Étant donné une classe de concepts  $\mathcal{C} \subseteq 2^U$  et un concept  $C \in \mathcal{C}$ , un échantillon  $X$  est *réalisable* par  $C$  si, pour tout élément  $x \in X$  étiqueté  $-1$  et tout élément  $y \in X$  étiqueté  $+1$ , nous avons que  $x \notin C$  et  $y \in C$ . Pour une classe de concepts  $\mathcal{C}$  donnée, un schéma de compression d'échantillons de taille  $k$  est une fonction de compression  $\alpha$  et une fonction de reconstruction  $\beta$  telles que  $\alpha$  compresse un échantillon réalisable  $X$  en un sous-échantillon  $\alpha(X) \subseteq X$  de taille au plus  $k$  permettant à  $\beta$  de reconstruire un ensemble  $C \in \mathcal{C}$  (depuis  $\alpha(X)$ ) tel que  $X$  est réalisable par  $C$  [3]. Une fonction qui affecte un échantillon réalisable de taille au plus  $k$  à chaque  $C \in \mathcal{C}$  tel que chaque  $C$  est uniquement identifié par cet échantillon est un *schéma de représentation* de taille  $k$  [2].

Une des plus anciennes questions ouvertes en machine learning demande si chaque famille d'ensembles de VC-dimension  $d$  admet un schéma de compression d'échantillons de taille  $O(d)$  [1]. Dans un travail en cours, nous étudions les schémas de représentation et les schémas de compression d'échantillons (de taille  $O(d)$ ) pour les familles de boules dans les graphes. Dans l'exposé, je présenterai nos résultats pour les arbres et les graphes d'intervalles.

## Références

- [1] S. Floyd and M.K. Warmuth, *Sample compression, learnability, and the Vapnik-Chervonenkis dimension*, Machine Learning **21** (1995), 269–304.
- [2] D. Kuzmin and M.K. Warmuth, *Unlabelled compression schemes for maximum classes*, J. Mach. Learn. Res. **8** (2007), 2047–2081.
- [3] N. Littlestone and M. Warmuth, *Relating data compression and learnability*, Unpublished, 1986.

## **Tutoriel : Graphs in phylogenomics, a few (?) applications**

Céline SCORNAVACCA, CNRS, Institut des Sciences de l'Evolution, Université de Montpellier, `celine.scornavacca@umontpellier.fr`

In this talk, I will introduce the field of phylogenomics and I will describe several connections of this field with graph theory, ranging from scaffolding for next generation sequencing, to clustering of homologous genomic sequences and comparing/modifying/combining phylogenetic trees and networks.

## Analyse de données compositionnelles par recherche de composantes connexes dans un graphe aléatoire

Emmanuel CURIS, UR 7537 BioSTM, faculté de Pharmacie de Paris, université de Paris, [emmanuel.curis@parisdescartes.fr](mailto:emmanuel.curis@parisdescartes.fr)

Les données compositionnelles décrivent les quantités relatives de chacun des constituants d'un système complexe, par exemple les proportions des différents types de tissus dans une coupe vue au microscope. De nombreuses problématiques biologiques se ramènent à déterminer, dans de telles données, quels constituants ont été modifiés entre deux conditions. Toutefois, les compositions étant relatives, toute modification de la quantité  $q_i$  d'un constituant  $i$  se traduit par une modification des proportions de tous les constituants : il est donc illusoire de vouloir analyser composant par composant pour déterminer ceux qui sont modifiés. Néanmoins, les rapports des proportions  $r_{i,j} = \frac{q_i}{q_j}$  ne sont inchangés que si les deux constituants  $i$  et  $j$  impliqués ont subi les mêmes modifications.

Partant de cette idée, nous proposons une méthode de recherche de groupes de constituants se comportant de façon homogène fondée sur la détection de composantes connexes dans le graphe dont les sommets sont les constituants et l'arête entre les sommets  $i$  et  $j$  n'existe que si le rapport  $r_{i,j}$  est inchangé entre les deux conditions [1].

En pratique, l'existence des arêtes dans le graphe est déterminée par l'utilisation d'un test statistique et d'un seuil de coupure sur le degré de signification de ce test (l'arête est ôtée si le test associé a un degré de signification inférieur au seuil). Chaque composante connexe du graphe, aléatoire, ainsi obtenu correspond à un groupe homogène de constituants.

Des études par simulation permettent de trouver ce seuil optimal qui permet de contrôler le risque de première espèce (risque d'obtenir un graphe avec plus d'une composante connexe, alors que la composition n'est globalement pas modifiée) et d'estimer la puissance du test.

Des exemples d'application de cette méthode à différentes situations seront montrées.

## Références

- [1] E. Curis et coll., *Determination of sets of covarying gene expression using graph analysis on pairwise expression ratios*, *Bioinformatics* **35**(2) (2019), 258–265.



## Couplage temporel et géométrique

Timothé Picavet, ENS de Lyon, [timothe.picavet@ens-lyon.fr](mailto:timothe.picavet@ens-lyon.fr)  
Ngoc-Trung Nguyen, HCMUE, [trungnn@hcmue.edu.vn](mailto:trungnn@hcmue.edu.vn)  
Binh-Minh Bui-Xuan, LIP6 Paris, [buixuan@lip6.fr](mailto:buixuan@lip6.fr)

Un graphe temporel est une suite finie de graphes sur les mêmes sommets :  $\mathcal{G} = (G_i)_{i \in T}$  où  $T \subseteq \mathbb{N}$  est un intervalle fini et  $G_i = (V, E_i)$  est un graphe pour tout  $i \in T$ . Nous considérons le problème de trouver un ensemble maximum d'arêtes disjointes existant pendant  $\Delta$  instants consécutifs, appelé  $\Delta$ -couplage temporel : trouver  $\mathcal{M} = \{(t, uv) \mid uv \in \bigcap_{t \leq i < t+\Delta} E_i\}$  tel que  $|\mathcal{M}|$  est maximum et  $(t, uv) \in \mathcal{M} \wedge (t', uv) \in \mathcal{M} \wedge |t - t'| < \Delta \Rightarrow v = w$ . Le problème est  $NP$ -difficile pour  $\Delta > 1$ , où tout ensemble maximal est une 2-approximation [1]. Il reste  $NP$ -difficile sur des cas très particuliers [3].

Nous décrivons deux solutions au problème. L'algorithme exact est une programmation dynamique en temps  $O^*((\Delta + 1)^n)$ , où  $n = |V|$  et  $O^*$  retient uniquement les facteurs non-polynomiaux. Si par ailleurs  $G_i$  est un graphe d'intersection de boules unitaires d'un espace vectoriel, pour tout  $i \in T$ , alors  $\mathcal{G}$  est appelé un graphe temporel géométrique. Nous définissons une notion de dérivée spatiale (vitesse) pour tout sommet de  $V$ . Nous généralisons alors l'algorithme Leeuwen-Leeuwen [4] afin d'obtenir un schéma PTAS résolvant  $\Delta$ -couplage temporel dans un graphe temporel géométrique de densité et de vitesse bornée. La densité de  $\mathcal{G}$  est le nombre maximum de sommets dans une boule unitaire dans l'espace vectoriel où  $G_i$  est plongé, pour  $i \in T$ . Tous nos algorithmes sont implémentés et confrontés aux implémentations connues [2], dont le code source est disponible sur <https://github.com/Talesseed/Temporal-matching-of-historical-and-geometric-graphs>

## Références

- [1] J. Baste and B.M. Bui-Xuan, *Temporal matching in link stream : kernel and approximation*, CTW 2018.
- [2] J. Baste and B.M. Bui-Xuan and A. Roux, *Temporal matching*, Theoretical Computer Science, 806 :184–196, 2020.
- [3] G.B. Mertzios and H. Molter and R. Niedermeier and V. Zamaraev and P. Zschoche, *Computing Maximum Matchings in Temporal Graphs*, STACS 2020, LIPIcs 154, 27 :1–27 :14, 2020.
- [4] E.J. van Leeuwen and J. van Leeuwen, *Structure of polynomial-time approximation*, Theory of Computing Systems, 50(4) :641–672, 2012.

## Complexité du problème de Steiner dynamique

Stefan Balev, LITIS, Le Havre, [stefan.balev@univ-lehavre.fr](mailto:stefan.balev@univ-lehavre.fr)

Yoann Pigné, LITIS, Le Havre, [yoann.pigne@univ-lehavre.fr](mailto:yoann.pigne@univ-lehavre.fr)

Éric Sanlaville, LITIS, Le Havre, [eric.sanlaville@univ-lehavre.fr](mailto:eric.sanlaville@univ-lehavre.fr)

Mathilde Vernet, LITIS, Le Havre, [mathilde.vernet@univ-lehavre.fr](mailto:mathilde.vernet@univ-lehavre.fr)

Les graphes dynamiques sont pertinents à étudier. En effet, dans de nombreux domaines d'applications, le graphe associé peut évoluer au cours du temps, en considérant par exemple une variation des arêtes ou de leurs poids associés.

Le problème de l'arbre de Steiner consiste à trouver, dans un graphe, un arbre de poids minimum couvrant un ensemble de sommets appelés *terminaux*. Nous nous intéressons dans ce travail à l'extension du problème de Steiner aux graphes dynamiques.

Nous considérons plusieurs définitions possibles permettant d'étendre ce problème à un contexte dynamique et choisissons de nous concentrer sur une version où l'ensemble des sommets terminaux ainsi que l'ensemble des sommets intermédiaires assurant la connexité des terminaux restent fixe au cours du temps. Nous cherchons un arbre de poids minimum permettant de connecter les sommets terminaux. Nous montrons que ce problème est NP-complet, même avec deux terminaux et des poids unitaires alors que le problème correspondant dans un graphe statique est l'une des rares versions polynomiales de l'arbre de Steiner. La figure 3 montre un exemple de graphe dynamique.

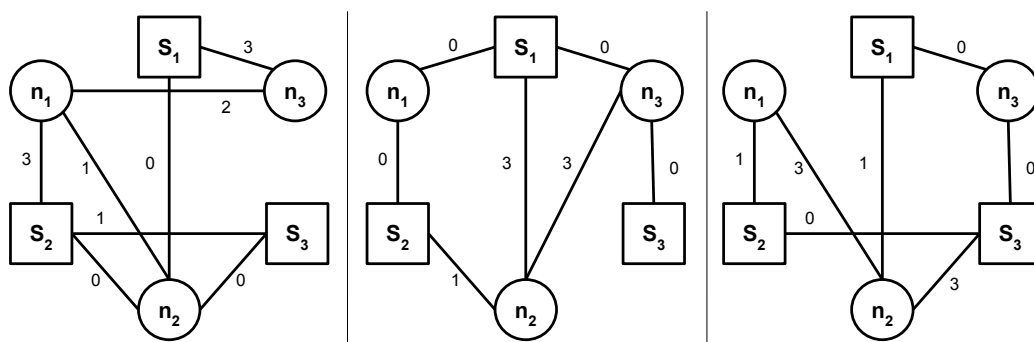


FIGURE 3 – Évolution d'un graphe dynamique trois pas de temps. Les poids sont indiqués sur les arêtes. Les sommets carrés sont les sommets terminaux.

## Complexité paramétrée dans les graphes à transitions interdites

Thomas Bellitto, Univ. de Varsovie, Pologne, [tbellitto@mimuw.edu.pl](mailto:tbellitto@mimuw.edu.pl)  
Shaohua Li, Univ. de Varsovie, Pologne, [S.Li@mimuw.edu.pl](mailto:S.Li@mimuw.edu.pl)  
Karolina Okrasa, Univ. de Varsovie, Pologne, [k.okrasa@mini.pw.edu.pl](mailto:k.okrasa@mini.pw.edu.pl)  
Marcin Pilipczuk, Univ. de Varsovie, Pologne, [malcin@mimuw.edu.pl](mailto:malcin@mimuw.edu.pl)  
Manuel Sorge, TU Vienne, Autriche, [manuel.sorge@mimuw.edu.pl](mailto:manuel.sorge@mimuw.edu.pl)

Dans certains domaines d'application de la théorie des graphes, les déplacements possibles dans les réseaux que l'on modélise doivent respecter des contraintes que le modèle classique de graphes ne permet pas d'exprimer. C'est par exemple le cas dans un réseau routier où un conducteur n'aurait pas le droit de tourner à droite à une intersection donnée. Pour surmonter ces limitations, Kotzig a introduit en 1968 le modèle plus puissant de *graphes à transitions interdites*. Une transition est une paire d'arêtes adjacentes, et un graphe à transitions interdites est donc un graphe défini avec un ensemble de paires d'arêtes qu'un marcheur n'a pas le droit d'utiliser à la suite. Un cas particulier intéressant est celui des graphes arête-colorés, utilisés notamment en bio-informatique, où une marche proprement colorée n'a pas le droit d'utiliser deux arêtes de la même couleur à la suite.

Au fil des années, les graphes à transitions interdites ont trouvé de nombreuses applications dans des domaines variés. Mieux comprendre ces graphes et y développer des algorithmes est donc devenu un enjeu important. Malheureusement, il s'est avéré que l'ajout de transitions interdites complique beaucoup certains problèmes. Par exemple, déterminer s'il existe un chemin élémentaire entre une paire de sommets donnés est algorithmiquement très simple dans les graphes classiques, mais NP-complet dans les graphes à transitions interdites.

Dans ce projet, nous étudions plusieurs problèmes NP-complets fondamentaux du point de vue de la théorie de la complexité paramétrée. Notamment, nous déterminons la complexité des problèmes de chemins élémentaires et hamiltoniens en fonction de paramètres importants de largeur de graphes (*vertex cover number*, *treedepth*, *pathwidth*, *treecutwidth*, *treewidth*...), dans le cas général des graphes à transitions interdites, ainsi que dans le cas particulier des graphes arête-colorés pour le problème de chemin hamiltonien.

## Requêtes d'appartenance et autres méthodes “géométriques” pour trouver le diamètre d'un graphe.

Guillaume Ducoffe, Université de Bucarest, Roumanie  
guillaume.ducoffe@ici.ro

Le calcul exact du diamètre dans un graphe s'avère difficile, voire impossible, à réaliser en en temps sous-quadratique. Des bornes inférieures (conditionnelles) peuvent être obtenues avec des constructions très simples, qui se basent sur des problèmes de détection d'ensemble disjoints. Il devient alors intéressant de regarder ce qui se passe quand ces problèmes d'ensemble disjoints deviennent “faciles”, ce qui est le cas pour de nombreuses classes de graphes dont les propriétés structurelles et/ou géométriques sont bien comprises. Dans cet exposé nous discutons des applications, de plus en plus nombreuses, des arbres de portée à des problèmes de distance dans les graphes. Nous abordons aussi le rôle d'autres propriétés, telles que la propriété de Helly et la VC-dimension.

Ce travail a été réalisé en collaboration avec David Coudert, Feodor Dragan, Michel Habib, Alexandru Popa et Laurent Viennot.

## Accessibilité dans les packings d'arborescences

Florian Hörsch, G-SCOP, Grenoble, [florian.hoersch@grenoble-inp.fr](mailto:florian.hoersch@grenoble-inp.fr)  
Zoltán Szigeti, G-SCOP, Grenoble, [zoltan.szigeti@grenoble-inp.fr](mailto:zoltan.szigeti@grenoble-inp.fr)

Une  $r$ -arborescence  $B$  est une orientation d'un arbre de telle sorte que chaque sommet de  $B$  soit accessible depuis une racine  $r$  par un chemin. On dit que cette arborescence *couvre*  $V(B)$ . Étant donné un graphe orienté  $D$ , une  $r$ -arborescence  $B$  qui est un sous-graphe de  $D$  est appelé *couvrante* si elle couvre  $V(D)$ . En 1973, Edmonds a caractérisé les graphes orientés qui admettent un packing de taille  $k$  de  $r$ -arborescences couvrantes pour une racine  $r$  fixe et un entier  $k$ . On peut facilement généraliser ce théorème pour un multi-ensemble fixé de racines distinctes.

Dans le cas où un sommet ne peut pas être atteint depuis une racine, la seule information qu'on obtient du théorème d'Edmonds est que le packing cherché n'existe pas. Pour cette raison Kamiyama, Katoh et Takizawa ont introduit en 2009 le concept d'arborescences d'accessibilité. Une  $r$ -arborescence est appelée une  $r$ -arborescence d'*accessibilité* si elle couvre tous les sommets qui sont atteignable depuis  $r$  dans  $D$ . Ils caractérisent les graphes orientés qui, étant donné un multi-ensemble de racines  $R$ , contiennent un packing d'arborescences  $\{B_r : r \in R\}$  tel que  $B_r$  est une  $r$ -arborescence d'accessibilité pour tout  $r \in R$ .

Une nouvelle démonstration plus courte du théorème de Kamiyama, Katoh et Takizawa sera présentée.

## Digraph coloring and distance to acyclicity

Ararat Harutyunyan, Université Paris-Dauphine, PSL Research University, CNRS, UMR 7243, LAMSADE, Paris, [ararat.harutyunyan@dauphine.fr](mailto:ararat.harutyunyan@dauphine.fr)

Michael Lampis, Université Paris-Dauphine, PSL Research University, CNRS, UMR 7243, LAMSADE, Paris, [michail.lampis@dauphine.fr](mailto:michail.lampis@dauphine.fr)

Nikolaos Melissinos, Université Paris-Dauphine, PSL Research University, CNRS, UMR 7243, LAMSADE, Paris, [nikolaos.melissinos@dauphine.eu](mailto:nikolaos.melissinos@dauphine.eu)

In  $k$ -DIGRAPH COLORING we are given a digraph and are asked to partition its vertices into at most  $k$  sets, so that each set induces a DAG [2]. This well-known problem is NP-hard, as it generalizes (undirected)  $k$ -COLORING, but becomes trivial when the input digraph is acyclic. This poses the natural parameterized complexity question what happens when the input is “almost” acyclic.

It is already known that, for all  $k \geq 2$ ,  $k$ -DIGRAPH COLORING is NP-hard on digraphs of directed feedback vertex set (DFVS) at most  $k + 4$  [1]. We strengthen this result to show that, for all  $k \geq 2$ ,  $k$ -DIGRAPH COLORING is already NP-hard for DFVS exactly  $k$ . Refining our reduction we obtain two further consequences : (i) for all  $k \geq 2$ ,  $k$ -DIGRAPH COLORING is NP-hard for graphs of feedback arc set (FAS) at most  $k^2$  and (ii)  $k$ -DIGRAPH COLORING is NP-hard for graphs of DFVS  $k$ , even if the maximum degree  $\Delta$  is at most  $4k - 1$ .

Then, we show that  $k$ -DIGRAPH COLORING admits an FPT algorithm parameterized by treewidth, whose parameter dependence is  $(\text{tw}!)k^{\text{tw}}$  and we pose the question of whether the  $\text{tw}!$  factor can be eliminated. Our main contribution in this part is to show that our algorithm is essentially optimal, even for the much more restricted parameter treedepth and for  $k = 2$ , i.e., an FPT algorithm solving 2-DIGRAPH COLORING with dependence  $\text{td}^{o(\text{td})}$  would contradict the ETH.

## Références

- [1] M. G. Millani and R. Steiner and S. Wiederrecht, *Colouring Non-Even Digraphs*, CoRR abs/1903.02872 (2019).
- [2] V. Neumann-Lara, *The dichromatic number of a digraph*, J. Comb. Theory, Ser. B **33(3)** (1982), 265–270.

## Brooks' theorem on digraphs

Guillaume Aubian, IRIF-Talgo, Paris [aubian@ens.fr](mailto:aubian@ens.fr)

Pierre Aboulker, Talgo, Paris, [pierreaboulker@gmail.com](mailto:pierreaboulker@gmail.com)

Si le nombre chromatique est l'un des invariants les plus étudiés en théorie des graphes, un équivalent n'est apparu pour les graphes dirigés qu'en 1982 dans [1] : là où le nombre chromatique d'un graphe correspond à la taille minimale d'une partition de ses sommets en ensembles stables, le nombre dichromatique d'un digraphe correspond au cardinal minimal d'une partition en sous-graphes dirigés acycliques. Depuis une dizaine d'année, plusieurs articles sont apparus, traduisant pour le nombre dichromatique des résultats déjà connus pour le nombre chromatique.

Dans [2], Brooks démontre un théorème fondamental de la théorie des graphes : tout graphe connexe est coloriable avec un nombre de couleurs au plus égal à son degré maximum, sauf les cliques et les cycles impairs qui demandent une couleur supplémentaire. Ce résultat désormais classique a été généralisé à de nombreuses reprises.

C'est donc naturellement que nous avons cherché au cours de mon stage de M2 avec Pierre Aboulker à étendre le théorème de Brooks aux graphes dirigés. Discuter de l'invariant à choisir pour remplacer le degré maximum a été nécessaire. En considérant le maximum des degrés entrants et sortants, on obtient un résultat qui découle d'un théorème de A. Harutyunyan et B. Mohar dans [3], mais dont nous proposons trois nouvelles preuves faisant intervenir des outils variés. Nous avons aussi trouvé un résultat de NP-complétude si on considère comme invariant le maximum du minimum pour chaque sommet entre degré entrant et sortant.

## Références

- [1] V. Neumann-Lara, The dichromatic number of a digraph, *J. Combin.Theory Ser. B* 33 (1982) 265–270.
- [2] Brooks, R. L., "On colouring the nodes of a network", *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 37 (2) (1941) : 194–197,
- [3] A. Harutyunyan, and B. Mohar. Gallai's Theorem for List Coloring of Digraphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 25(1) :170-180, 2011.

## Déchargement assisté par ordinateur : application à la coloration à distance 2

Hoang La, LIRMM, Université de Montpellier, CNRS, Montpellier, France, [xuan-hoang.la@lirmm.fr](mailto:xuan-hoang.la@lirmm.fr)

Petru Valicov, LIRMM, Université de Montpellier, CNRS, Montpellier, France, [petru.valicov@lirmm.fr](mailto:petru.valicov@lirmm.fr)

On ne considère ici que des graphes simples sans boucles. Une *k-coloration propre* de  $G = (V, E)$  est une coloration des sommets de  $G$  avec des couleurs de 1 à  $k$  telle que deux sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes. Une *k-coloration des sommets à distance 2*, est une *k-coloration propre* telle que toute paire de sommets à distance au plus 2 reçoivent des couleurs différentes. Le *nombre chromatique à distance 2* de  $G$ , noté  $\chi^2(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une *k-coloration à distance 2*. Dans le cas général,  $\chi^2(G) \leq \Delta^2(G)$  où  $\Delta(G)$  est le degré maximum du graphe. Un exemple atteignant la borne est le graphe de Petersen. L'étude des graphes épars est devenu un sujet de recherche actif, motivé par le passage de la borne quadratique à  $\chi^2(G) \leq \Delta(G) + c$  pour une petite constante  $c$ .

On s'intéresse à la coloration à distance 2 des graphes planaires subcubiques. Plus précisément, on montre le résultat suivant : *si  $G$  est un graphe planaire subcubique de maille au moins 8, alors  $\chi^2(G) \leq 6$* . Ce résultat améliore celui de Cranston et Kim pour les graphes planaires subcubiques de maille 9 [1].

La preuve est faite par déchargement. L'assistance par ordinateur joue un rôle crucial dans la vérification des charges et l'identification des configurations réductibles. L'intérêt de cette méthode est la possibilité d'améliorer la borne sur la maille des résultats existants de la forme : *si  $G$  est un graphe planaire de degré maximum  $\Delta$  et de maille au moins  $g$  alors  $\chi^2(G) \leq \Delta + c$  pour une petite constante  $c$* . L'encodage utilisé pour représenter les sous-graphes et l'algorithme de déchargement sont généralisables à d'autres colorations avec procédure de déchargement locale sur les graphes planaires.

## Références

- [1] D. Cranston and S.-J. Kim, *List-coloring the square of subcubic graph*, J. Graph Theory **57(1)** (2008), 65–87.



## De la question de Vizing sur la coloration d'arêtes.

Marthe Bonamy, LaBRI, Bordeaux, [marthe.bonamy@u-bordeaux.fr](mailto:marthe.bonamy@u-bordeaux.fr)

Oscar Defrain, LIMOS, Clermont, [oscar.defrain@uca.fr](mailto:oscar.defrain@uca.fr)

Tereza Klimošová, KAM, Prague, [tereza@kam.mff.cuni.cz](mailto:tereza@kam.mff.cuni.cz)

Aurélie Lagoutte, LIMOS, Clermont, [aurelie.lagoutte@uca.fr](mailto:aurelie.lagoutte@uca.fr)

Jonathan Narboni, LaBRI, Bordeaux, [jonathan.narboni@labri.fr](mailto:jonathan.narboni@labri.fr)

D'après le célèbre théorème de Vizing [1], il suffit de  $\Delta + 1$  couleurs pour colorer proprement les arêtes d'un graphe, où  $\Delta$  est le degré maximum du graphe. Un outil clef de la preuve est la notion de changement de Kempe, qui consiste à échanger les deux couleurs dans une composante bichromatique maximale. L'énoncé obtenu est en réalité plus fort : de toute coloration propre d'arêtes, on peut atteindre via une succession de changements de Kempe une coloration n'utilisant que  $\Delta + 1$  couleurs.

Est-il toujours possible d'obtenir ainsi une coloration n'utilisant que  $\chi'$  couleurs (où  $\chi'$  est le nombre minimum de couleurs possible) ? Peu de choses sont connues sur cette question de Vizing [2] : la réponse est positive pour les graphes bipartis [3] et les graphes avec  $\Delta \leq 4$  [4, 5]. Il y a même alors le choix de la coloration cible si la coloration initiale n'utilise pas déjà le nombre minimum de couleurs. Nous étendons ceci au cas des graphes sans triangles.

## Références

- [1] V. Vizing, *On an estimate of the chromatic class of a  $p$ -graph*, *Discret Analiz* **3** (1964), 25–30.
- [2] V. Vizing, *The chromatic class of a multigraph*, *Cybernetics* **3** (1965), 32–41.
- [3] A. Asratian, *A note on transformations of edge colorings of bipartite graphs*, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **99** (2009), 814–818.
- [4] J. McDonald, B. Mohar, D. Scheide, *Kempe Equivalence of Edge-Colorings in Subcubic and Subquartic Graphs*, *Journal of Graph theory* **70** (2012), 226–239.
- [5] A. Asratian, C. Casselgren, *Solution of Vizing's Problem on Interchanges for the case of Graphs with Maximum Degree 4 and Related Results*, *Journal of Graph Theory* **82** (2016), 350–373.

## Influence de la maille sur la complexité paramétrée du problème de reconfiguration d'ensembles indépendants.

V. Bartier, G-SCOP, Grenoble, France, [valentin.bartier@grenoble-inp.fr](mailto:valentin.bartier@grenoble-inp.fr)

N. Bousquet, LIRIS, Lyon, France, [nicolas.bousquet@univ-lyon1.fr](mailto:nicolas.bousquet@univ-lyon1.fr)

C. Dallard, University of Primorska, Koper, Slovénie, [clement.dallard@famnit.upr.si](mailto:clement.dallard@famnit.upr.si)

K. Lomer, American University of Beirut, Beyrouth, Liban, [kjl100@mail.aub.edu](mailto:kjl100@mail.aub.edu)

A. Mouawad, American University of Beirut, Beyrouth, Liban [aa368@aub.edu.lb](mailto:aa368@aub.edu.lb)

Un problème de reconfiguration consiste en la recherche d'une transformation étape par étape entre deux solutions réalisables d'un problème, de telle sorte que les états intermédiaires soient aussi des solutions réalisables. Ces problèmes modélisent par exemple des situations dynamiques où une solution déjà en place doit être modifiée

Nous nous intéressons ici au problème de reconfiguration d'ensembles indépendants : les indépendants sont vus comme un ensemble de jetons posés sur les sommets du graphe et une règle fixe la manière dont un jeton peut bouger à chaque étape. Nous considérons le problème dit d'accessibilité : étant donné un graphe  $G$  et deux ensembles indépendants  $I$  et  $J$  de  $G$ , existe-t-il une séquence d'opérations transformant  $I$  en  $J$ ? Les règles considérées pour le déplacement des jetons sont le Token Sliding (TS-ACC) : un jeton ne peut être déplacé que le long d'une arête, et le Token Jumping (TJ-ACC) : un jeton peut être déplacé sur n'importe quel autre sommet du graphe.

Il a été montré que ces problèmes sont PSPACE-complet dans des cas très restreints tels que les graphes planaires de degré maximum 3. Nous étudions ici la complexité du problème paramétrée par la taille  $k$  des indépendants. Ces problèmes étant connus pour être  $W[1]$ -difficiles en général [1], nous cherchons à déterminer l'effet de l'exclusion de cycles induits sur cette complexité et montrons les résultats suivants :

- TJ-ACC admet un noyau de taille  $O(k^3)$  pour les graphes sans  $\{C_3, C_4\}$  et reste  $W[1]$ -difficile pour les graphes sans  $\{C_4, \dots, C_p\}$  pour  $p$  fixé.
- TS-ACC est FPT sur les graphes bipartis sans  $C_4$ , mais devient  $W[1]$ -difficile sur les graphes bipartis.

## Références

- [1] T. Ito, et al.. On the parameterized complexity for token jumping on graphs. *LNCS* 8402, (04) 2014.

# Transformations linéaires d'ensembles dominants sous la règle TAR

Nicolas Bousquet, LIRIS, Lyon, [nicolas.bousquet@liris.cnrs.fr](mailto:nicolas.bousquet@liris.cnrs.fr)

Alice Joffard, G-SCOP, Grenoble, [alice.joffard@grenoble-inp.fr](mailto:alice.joffard@grenoble-inp.fr)

Paul Ouvrard, LaBRI, Bordeaux, [paul.ouvrard@u-bordeaux.fr](mailto:paul.ouvrard@u-bordeaux.fr)

Les problèmes de reconfiguration s'intéressent, étant donnée une instance  $\mathcal{I}$  d'un problème, aux séquences de transformations entre deux solutions de  $\mathcal{I}$ . Ces séquences doivent uniquement contenir des solutions de  $\mathcal{I}$ , et chacune doit pouvoir être obtenue depuis la précédente selon une *règle de reconfiguration*. Nous étudions ici la reconfiguration d'ensembles dominants d'un graphe  $G$ , où la règle consiste à ajouter ou supprimer un sommet.

Une séquence de transformation peut être représentée à l'aide du *graphe de reconfiguration*. Ses sommets sont les solutions de  $\mathcal{I}$ , et deux solutions sont adjacentes si l'une s'obtient depuis l'autre selon la règle de reconfiguration. Nous étudions ici la connexité et le diamètre du graphe de reconfiguration. Autrement dit, nous cherchons s'il existe une séquence de reconfiguration entre toute paire de dominants, et nous bornons leurs longueurs.

Si tous les ensembles dominants sont considérés, alors le graphe de reconfiguration est trivialement connexe. Nous nous restreignons donc aux dominants de taille au plus un  $k$  donné. Le graphe de reconfiguration est alors noté  $\mathcal{R}_k$ . De nombreuses études s'intéressent à la valeur du seuil  $d_0$  telle que pour tout  $k \geq d_0$ ,  $\mathcal{R}_k$  est connexe. Haas et Seyffarth [1] ont montré que si  $k \geq \Gamma + \alpha - 1$ , alors  $\mathcal{R}_k$  est connexe, où  $\alpha$  est le nombre d'indépendance et  $\Gamma$  la taille maximum d'un dominant minimal par inclusion.

Nous améliorons ce résultat en montrant que  $\mathcal{R}_k$  a de plus un diamètre linéaire. Nous montrons que c'est également le cas lorsque  $k \geq \Gamma + tw + 1$ , où  $tw$  dénote la largeur arborescente, et nous donnons deux autres bornes inférieures : dans le cas où  $G$  n'admet pas  $K_\ell$  comme mineur, et dans le cas où  $G$  est planaire. Nous montrons que la borne dépendant de la largeur arborescente ainsi que la borne pour les graphes planaires sont serrées à une constante près.

## Références

- [1] R. Haas and K. Seyffarth, *Reconfiguring dominating sets in some well-covered and other classes of graphs*, Discrete Mathematics **50** (2017), 1802 - 1817.

# Dynamique de Glauber sur les graphes de treewidth bornées et les graphes cordaux

Marc Heinrich, University of Leeds, [m.heinrich@leeds.ac.uk](mailto:m.heinrich@leeds.ac.uk)

La dynamique de Glauber est une chaîne de Markov dont les états sont l'ensemble des  $k$ -colorations d'un graphe  $G$  fixé. Elle consiste à appliquer la transformation suivante à chaque étape du processus : choisir un sommet  $v$  et une couleur  $c$  uniformément, et si la couleur  $c$  n'apparaît pas dans le voisinage de  $v$ , recolorer  $v$  avec la couleur  $c$ .

L'étude de ce processus aléatoire est motivée, entre autres, par des questions de génération aléatoire. Il est possible, sous certaines conditions, d'obtenir un algorithme permettant de générer une coloration avec une distribution pratiquement uniforme simplement en simulant la dynamique de Glauber : après un nombre suffisant d'étapes, toutes les colorations du graphes sont pratiquement équiprobables. Pour que cet algorithme soit efficace, il faut que le nombre d'étape nécessaire pour obtenir une distribution suffisamment proche d'une distribution uniforme (appelé temps de mélange) soit suffisamment faible (i.e., polynomial en la taille du graphe  $G$ ).

Une partie importante des recherches sur la dynamique de Glauber est motivée par la conjecture suivante : la dynamique de Glauber a un temps de mélange polynomial (en fonction de la taille de  $G$ ) si le nombre de couleur est au moins  $\Delta + 2$ , où  $\Delta$  est le degré maximum du graphe. Cette conjecture est encore largement ouverte, mais certains cas particuliers ont été prouvés, notamment dans le cas où l'on dispose de plus de couleurs [1], ou encore lorsque le graphe est restreint à certaines classes comme les graphes de planaires, les graphes de aléatoires ou les arbres. Le cas des arbres notamment est entièrement résolu pour n'importe quel nombre de couleur : le temps de mélange est de l'ordre de  $n^{\Theta(\frac{\Delta}{k \log \Delta})}$  [2]. Il est donc naturel comme étape suivante de s'intéresser au cas des graphes dont la structure ressemble à un arbre. Nous montrons que la dynamique de Glauber a un temps de mélange polynomial pour : (1) les graphes de treewidth bornée avec au moins  $\Delta + 2$  couleurs, (2) les graphes cordaux avec au moins  $(1 + \varepsilon)(\Delta + 1)$  couleurs.

## Références

- [1] E. Vigoda, *Improved bounds for sampling colorings*, Random Structures & Algorithms **7(2)** (1995), 157–165.
- [2] B. Lucier, M. Molloy, Y. Peres, *The Glauber dynamics for colourings of bounded degree trees*, Algorithms and Techniques (2009), 631–645.

## Quand Hadwiger rencontre Cayley

Jacob W. Cooper, Masaryk University, Brno, [jcooper@mail.muni.cz](mailto:jcooper@mail.muni.cz)

Adam Kabela, Masaryk University, Brno, [kabela@fi.muni.cz](mailto:kabela@fi.muni.cz)

Daniel Král', Masaryk University, Brno, [dkral@fi.muni.cz](mailto:dkral@fi.muni.cz)

Théo Pierron, LIRIS, Lyon, [theo.pierron@univ-lyon1.fr](mailto:theo.pierron@univ-lyon1.fr)

Un graphe est  $k$ -chromatique si on peut trouver une coloration propre de ses sommets avec  $k$  couleurs, mais pas avec  $k - 1$ . Selon la célèbre conjecture d'Hadwiger, tout graphe  $k$ -chromatique contient le graphe complet  $K_k$  comme mineur. À partir de cette conjecture, on montre facilement que tout graphe  $k$ -chromatique a au moins  $k^{k-2}$  arbres couvrants (en vertu de la formule de Cayley dénombrant les arbres couvrants d'une clique). Dans cet exposé, on fournit une preuve directe de ce dernier résultat, ce qui résout un problème posé par Sivaraman dans son exposé au workshop « New Perspectives in Colouring and Structure » (Banff, 2020).

## Block elimination distance

Archontia C. Giannopoulou, Department of Informatics and Telecommunications, National and Kapodistrian University of Athens, Athens, Greece, [archontia.giannopoulou@gmail.com](mailto:archontia.giannopoulou@gmail.com)

Giannos Stamoulis, Department of Informatics and Telecommunications, National and Kapodistrian University of Athens, Athens, Greece, [giannosstam@di.uoa.gr](mailto:giannosstam@di.uoa.gr)

Dimitrios M. Thilikos, LIRMM, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France [sedthilk@thilikos.info](mailto:sedthilk@thilikos.info)

Öznur Yaşar Diner, Computer Engineering Department, Kadir Has University, Istanbul, Turkey, [oznur.yasar@khas.edu.tr](mailto:oznur.yasar@khas.edu.tr)

Given a graph  $G$  we denote by  $\mathcal{B}(G)$  the set of all the blocks of  $G$ . Let  $\mathcal{G}$  be a graph class. We define the *block elimination distance of  $G$  to  $\mathcal{G}$*  as

$$\text{btd}_{\mathcal{G}}(G) = \begin{cases} \max\{\text{btd}_{\mathcal{G}}(B) \mid B \in \mathcal{B}(G)\} & \text{if } G \text{ is not biconnected and } G \notin \mathcal{G} \\ \min\{\text{btd}_{\mathcal{G}}(G \setminus v) \mid v \in V(G)\} + 1 & \text{if } G \text{ is biconnected and } G \notin \mathcal{G} \\ 1 & \text{if } G \in \mathcal{G} \end{cases}$$

The *minor-obstruction set* of a graph class  $\mathcal{G}$ , denoted by  $\text{obs}(\mathcal{G})$ , is the set of all minor-minimal graphs not in  $\mathcal{G}$ . Our first result is that, for every minor-closed graph class  $\mathcal{G}$ , the problem of checking whether  $\text{btd}_{\mathcal{G}}(G) \leq k$  can be solved in  $f(k) \cdot n^2$  steps for some *constructive* function  $f$ . For this, we prove the existence of an algorithm that, given a  $k \geq 2$  and the set  $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}}^{(1)} = \text{obs}(\mathcal{G})$ , outputs  $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}}^{(k)} = \text{obs}(\{G \mid \text{btd}_{\mathcal{G}}(G) \leq k\})$ . This gives an analogue of the results in [1] and [2] for *vertex deletion distance* and *elimination distance* respectively. Next we study the obstruction set  $\mathcal{Z}_{\mathcal{E}}^{(k)}$  where  $\mathcal{E}$  is the class of all edgeless graphs ( $\text{btd}_{\mathcal{E}}$  is the “block-analogue” of the *tree-depth* parameter). Our second result is an obstruction generation procedure that yields the exact identification of *all* outerplanar graphs in  $\mathcal{Z}_{\mathcal{E}}^{(k)}$ , for every  $k \geq 1$ .

## Références

- [1] I. Adler, M. Grohe, and S. Kreutzer. Computing excluded minors. In *nineteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms, SODA '08*, pages 641–650. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2008.
- [2] J. Bulian and A. Dawar. Fixed-parameter tractable distances to sparse graph classes. *Algorithmica*, 79(1) :139–158, 2017.

## On the tree-width of even-hole-free graphs

Pierre Aboulker, DIENS, ENS Paris  
Isolde Adler, University of Leeds  
Eun Jung Kim, LAMSADE, Université Paris-Dauphine  
Ni Luh Dewi Sintiari, LIP, ENS Lyon  
Nicolas Trotignon, LIP, ENS Lyon

Paper is available in <https://arxiv.org/abs/2008.05504>

Even-hole-free graphs attracted attention lately (see [1]). However, many questions about them remain unanswered : polytime algorithm to color them, or to find a maximum stable set, despite the existence of several decomposition theorems. In general, the class of all even-hole-free graphs has unbounded tree-width, as it contains all complete graphs. Nonetheless, bounding the size of the maximum clique does not turn the class into having bounded treewidth, because there exists a family of even-hole-free graphs with no 4-vertex clique which has unbounded tree-width [2]. We observe that the graph constructed in [2] has unbounded degree *and* contains arbitrarily large clique-minors. We ask whether this is necessary.

We prove that for every graph  $G$ , if  $G$  excludes a fixed graph  $H$  as a minor, then  $G$  either has small tree-width, or  $G$  contains a large wall or the line graph of a large wall as *induced* subgraph. This can be seen as a strengthening of Robertson and Seymour's excluded grid theorem for the case of minor-free graphs. Our theorem implies that every class of even-hole-free graphs excluding a fixed graph as a minor has bounded tree-width. In fact, our theorem applies to a more general class : ( $\theta$ , prism)-free graphs. Furthermore, we conjecture that even-hole-free graphs of bounded degree have bounded tree-width, and we prove it for subcubic graphs. This conjecture is now proved in [3].

## Références

- [1] K. Vušković. Even-hole-free graphs : a survey. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 2010.
- [2] N. L. D. Sintiari and N. Trotignon. ( $\theta$ , triangle)-free and (even hole,  $K_4$ )-free graphs. Part 1 : Layered wheels. *arXiv 1906.10998*, 2019.
- [3] T. Abrishami, M. Chudnovsky, K. Vušković. Even-hole-free graphs with bounded degree have bounded treewidth. *arXiv 2009.01297*, 2020.

# A polynomial time algorithm to compute the connected tree-width of a series-parallel graph

Christophe Paul, LIRMM, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier,  
paul@lirmm.fr

Guillaume Mescoff, Ecole normale supérieure de Rennes (ENS Rennes),  
guillaume.mescoff@ens-rennes.fr

Dimitrios M. Thilikos, LIRMM, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier  
sedthilk@thilikos.info

It is well known that the *treewidth* of a graph  $G$  corresponds to the *node search number* where a team of sesarchers is pursuing a fugitive that is *lazy* and *invisible* (or alternatively is *agile* and *visible*) and has the ability to move with infinite speed via unguarded paths. Recently, *monotone and connected node search strategies* have been considered. A search strategy is *monotone* if it prevents the fugitive from pervading again areas from where he had been expelled and is *connected* if, at each step, the set of vertices that is or *has been* occupied by the searchers induces a connected subgraph of  $G$ . It has been shown that the corresponding connected and monotone search number of a graph  $G$  can be expressed as the *connected treewidth*, denoted  $\mathbf{ctw}(G)$ , that is defined as the minimum width of a rooted tree-decomposition  $(\mathcal{X}, T, r)$ , where the union of the bags corresponding to the nodes of a path of  $T$  containing the root  $r$  is connected in  $G$  [1]. In this paper, we initiate the algorithmic study of connected treewidth. We design a  $O(n^2 \cdot \log n)$ -time dynamic programming algorithm to compute the connected treewidth of biconnected series-parallel graphs. At the price of an extra  $n$  factor in the running time, our algorithm generalizes to graphs of treewidth at most two.

## Références

- [1] I. Adler, C. Paul, and D. M. Thilikos. Connected search for a lazy robber. In A. Chattopadhyay and P. Gastin, editors, *39th IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science, FSTTCS 2019, December 11-13, 2019, Bombay, India*, volume 150 of *LIPICs*, pages 7 :1–7 :14. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2019.



## Dessin et mineur de graphe

Cyril Gavaille, LaBRI, Bordeaux, [gavaille@labri.fr](mailto:gavaille@labri.fr)

Claire Hilaire, LaBRI, Bordeaux, [claire.hilaire@u-bordeaux.fr](mailto:claire.hilaire@u-bordeaux.fr)

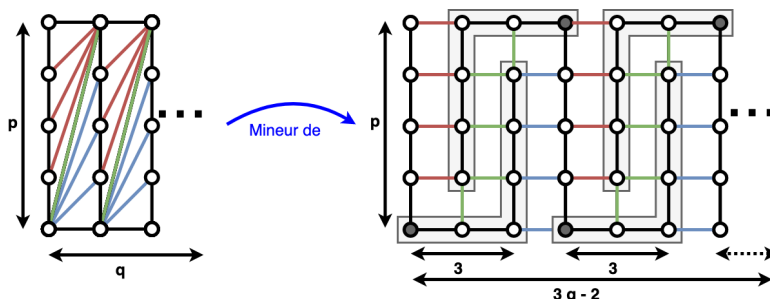
Nous considérons le problème suivant, motivé par le théorème d'exclusion de grille comme mineur de Robertson et Seymour :

« Étant donné un graphe  $H$  possédant un dessin planaire en lignes brisées sur une grille  $p \times q$ , quelle est la taille  $s = s(p, q)$  du côté de la plus petite grille carrée possédant  $H$  comme mineur ? »

En effet, il a été montré que tout graphe planaire  $G$  excluant une telle grille comme mineur, et donc le graphe planaire  $H$ , a une largeur arborescente au plus  $O(s)$ . Comme  $H$  est planaire et possède au plus  $pq$  sommets, il suit, par un autre résultat classique de la théorie des mineurs de graphes, qu'il est mineur d'une grille carrée de taille  $s \leq 2pq - 4$ . Et donc  $s(p, q) = O(pq)$ .

Récemment, [1] ont montré que  $s(p, q) = O(p\sqrt{q})$ , laissant ouverte la question de savoir si  $s(p, q) = O(\sqrt{pq})$ , ce qui serait optimal puisque, par exemple, une grille  $H$  de dimension  $p \times q$  ne peut être mineur d'une grille  $\lfloor \sqrt{pq} - 1 \rfloor \times \lfloor \sqrt{pq} - 1 \rfloor$  qui a moins de sommets que  $H$ .

Nous apportons des réponses positives mais partielles à cette question, en montrant par exemple que  $s(p, q) = O(\sqrt{pq})$  si  $H$  est un *apex-tree*, c'est-à-dire un graphe dont la suppression d'un sommet le rend acyclique, ou si le dessin de  $H$  possède une certaine propriété de monotonie sur chacune de ces colonnes.



## Références

- [1] Y. DIENG AND C. GAVAILLE, *On the treewidth of planar minor free graphs*, in 4th EAI Int'nl Conf. on Innov. and Interdisciplinary Sol. for Underserved Areas (InterSol), vol. 321 of Lecture Notes of the Inst. for Comp. Sci., Soc. Info. and Telecom. Eng., Springer, Cham, Mar. 2020, pp. 238–250. doi: 10.1007/978-3-030-51051-0\_17.