

Imagerie Médicale : Principes Physiques, traitement Numérique et Applications Avancées

Ecole Centrale Paris (Option Math. App) -
Mastère Recherche MVA - Mastère IDB – 2007/2008

X. Pennec

Recalage paramétrique

Méthodes géométriques



Asclepios team
2004, route des Lucioles B.P. 93
06902 Sophia Antipolis Cedex

<http://www-sop.inria.fr/asclepios>

1

Cours 2^e module

Lundi 14 janvier 2008: Delingette (Rappels 1^{er} module et classification)

Lundi 21 janvier 2008: Pennec (Recalage paramétrique géométrique)

Lundi 28 janvier 2008: Pennec (Recalage non rigide iconique)

Lundi 18 février 2008: Pennec (Tenseurs)

Lundi 25 février 2008: Delingette (Modèles biomécaniques)

Lundi 3 mars 2008: Pennec /Delingette (Quizz et présentation d'articles)

Lundi 10 mars 2008: Pennec/Delingette (Quizz et présentation d'articles)

2

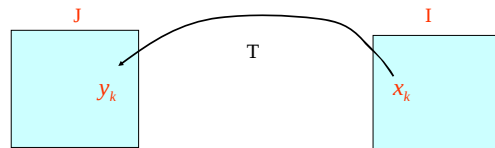
Plan du Cours

- Objectifs et définitions
- Les classes de transformations T
- Méthodes « géométriques »
- Estimations de T

3

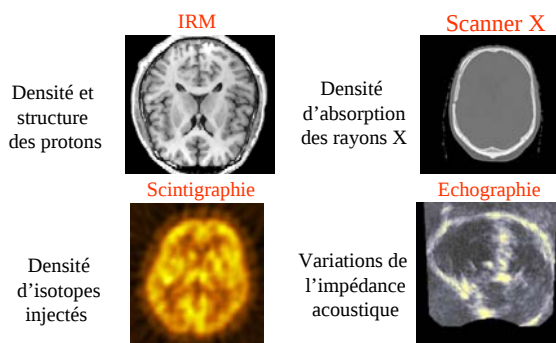
Objectif du Recalage

Déterminer la meilleure transformation T qui superpose
les points x de l'image I sur les points
homologues de l'image J



4

Modalités complémentaires d'imagerie



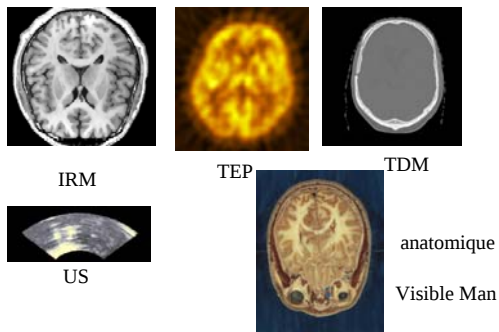
5

Principales Applications

- Fusion d'images multimodales
- Evolution temporelle d'une pathologie
- Comparaisons inter-patients
- Superposition d'un atlas
- Réalité augmentée

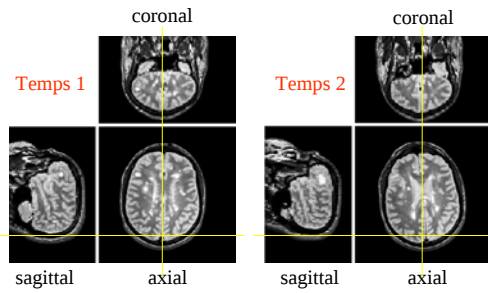
6

Fusion d'Images Multimodales



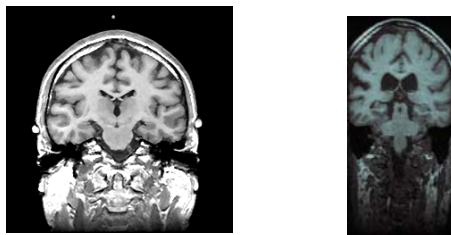
7

Evolution Temporelle



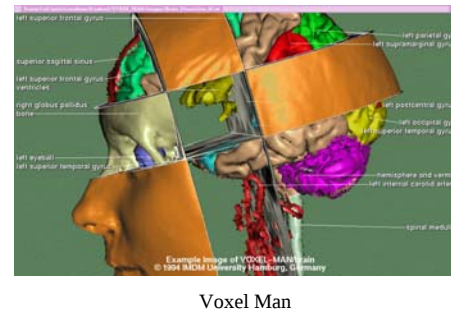
8

Comparaison Inter-Patients



9

Recalage avec un Atlas



Voxel Man

10

Réalité Augmentée

Brigham & Women's Hospital



E. Grimson

11

Classes de Problèmes

Images Mono- ou Multimodales

Recalage Intra- ou Inter-patients

Recalage Rigide ou Déformable

12

Classes de problèmes vs. applications

Evolution temporelle	Intra Patient - Monomodal
Fusion d'images multimodales	Intra Patient - Multimodal
Comparaison inter-patients	Inter Patients - Monomodal
Superposition d'un atlas	Inter Patients - Multimodal

Intra Patient : Rigide ou déformable

Inter Patients : déformable

13

2 Classes de Méthodes

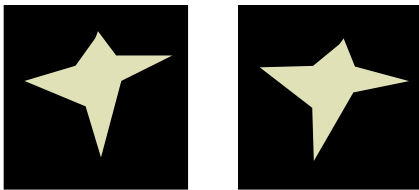
Géométriques : *feature-based*

Iconiques : *intensity-based*

14

Exemple intuitif

Comment recalrer ces deux images ?

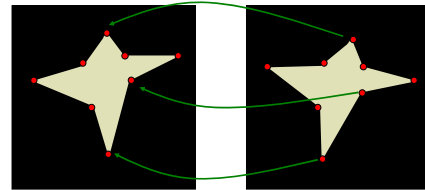


15

Approche géométrique/iconique

Détection des primitives (ici, points de forte courbure)

Mesure: par exemple, $S(T) = \sum_k \|T(\mathbf{x}_k) - \mathbf{y}_k\|^2$

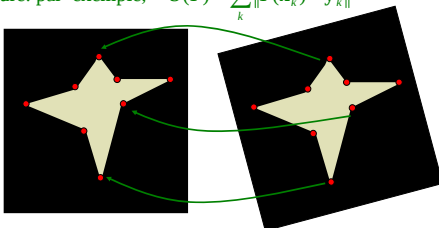


16

Approche géométrique/iconique

Détection des primitives (ici, points de forte courbure)

Mesure: par exemple, $S(T) = \sum_k \|T(\mathbf{x}_k) - \mathbf{y}_k\|^2$

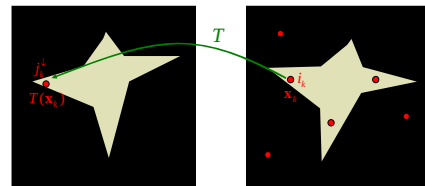


17

Approche géométrique/iconique

Pas de segmentation!

Mesure: par ex., $S(T) = \sum_k (i_k - j_k^\downarrow)^2$ Interpolation: $j_k^\downarrow = J(T(\mathbf{x}_k))$



18

Approche géométrique/iconique

Pas de segmentation!

Mesure: par ex., $S(T) = \sum_k (i_k - j_k^\downarrow)^2$



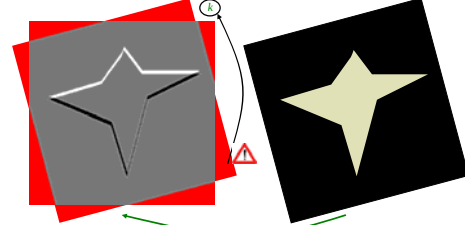
$T_1 = Id$

19

Approche géométrique/iconique

Pas de segmentation!

Mesure: par ex., $S(T) = \sum_k (i_k - j_k^\downarrow)^2$ Recouvrement partiel



T_2

20

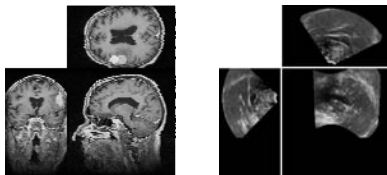
Difficultés du recalage multimodal (par exemple US/IRM)

Approche géométrique:

- segmentation de l'image ultrasonore

Approche iconique:

- comparaison des intensités IRM et ultrasonores



21

Classes de Transformations T

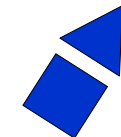
- Rigide (déplacement)
- Similitude
- Affine
- Polynomiale
- Spline
- Libre
- Projective

22

Classes de Transformations T

Rigide : $T(x) = Rx + t$

- Rotation et translation
- 6 paramètres : (R : 3; t : 3)
- invariants: distances (isométrie), orientation des repères, courbures, angles, droites



Similitude : $T(x) = s.Rx + t$

- ajouter une homothétie
- 7 paramètres
- invariants: rapports de distances, orientation, angles, droites

23

Classes de Transformations T

Affine : $T(x) = Bx + t$

- B matrice 3x3
- 12 paramètres : (B : 9; t : 3)
- invariants: droites, parallélisme



Quadratique : $T(x) = x^t Ax + Bx + t$

- ajouter A : matrice symétrique 3x3
- 18 paramètres (A: 6; B: 9; t: 3)
- invariants: ne préserve **plus** les droites

24

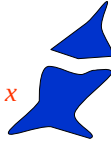
Classes de Transformations T

Splines :

- polynômes locaux de degré d , avec une continuité globale de degré $C(d-1)$.
- nombre de paramètres : dépend des points de contrôle et des nœuds
- localement affine: version simplifiée

Transformation libre : $T(x) = x + u(x)$

- un vecteur $u(x)$ est attaché à chaque point x
- paramètres : au plus 3 fois le nombre de voxels
- régularisation : on cherche des homéomorphismes

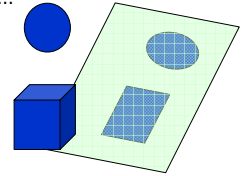


25

Classes de Transformations T

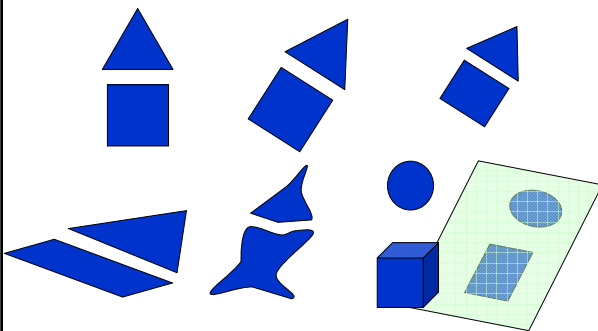
Projective : $T(x) = P(Rx + t)$

- Transformation perspective de l'espace 3-D vers le plan image 2-D, après une transformation rigide
- 11 paramètres (P: 5; R: 3; t: 3)
- Invariants: droites, cross-ratio, ...



26

Illustrations



27

Méthodes Géométriques

- . Principe
- . Extraction de primitives géométriques
- . Algorithmes de recalage géométrique

28

Principe des méthodes géométriques

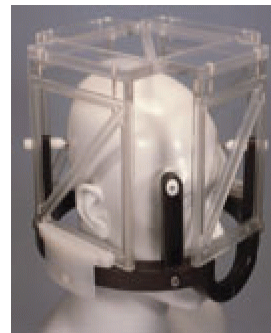
Extraire des primitives géométriques

Utiliser ces primitives pour guider le recalage

S'applique plutôt au recalage monomodal rigide

29

Marqueurs artificiels



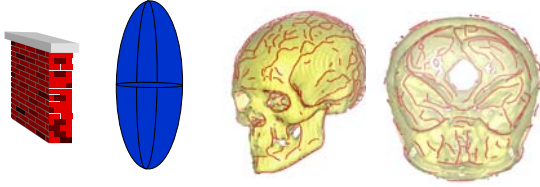
Cadre stéréotaxique

- Invasif
- Marqueurs Externes
- Mouvement
- Durée

30

Marqueurs Anatomiques

Chercher des invariants géométriques pour caractériser un petit nombre de points singuliers sur les surfaces anatomiques.



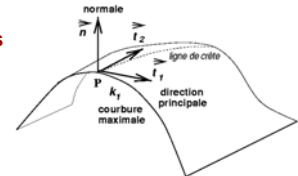
Generalisation des arêtes et des sommets sur des surfaces différentiables

31

Lignes de Crêtes et Points Extrémaux

Ils sont définis à partir des propriétés différentielles des surfaces anatomiques;

Correspondent à des valeurs extrémales d'une ou deux courbures principales.



J.-P. Thirion. New Feature Points based on Geometric Invariants for 3D Image Registration. International Journal of Computer Vision, 18(2):121–137, May 1996.

32

Courbure Normale

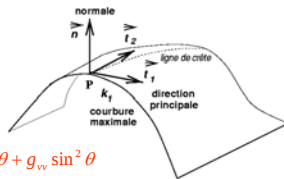
On définit un repère local autour de P avec le plan tangent et la normale. La surface orientée paramétrée localement par (Monge) : $x(u, v) = (u, v, g(u, v))$

vecteur unitaire du plan tangent : $t = \cos \theta u + \sin \theta v$

Courbure normale:

$$k_n(t) = \frac{\partial^2 g(u, v)}{\partial t^2} \bigg|_{u=0, v=0} = t^T \nabla^2 g(0,0) t$$

$$k_n(t) = g_{uu} \cos^2 \theta + 2g_{uv} \cos \theta \sin \theta + g_{vv} \sin^2 \theta$$



33

Courbures Principales

Valeurs extrémales de $k_n(t)$

Valeurs et vecteurs propres du Hessien de g

Données par les zéros de

$$\det(\nabla^2 g(0,0) - k_i I_2) = 0, \quad i = 1, 2$$

$$k_{1,2} = \frac{g_{uu} + g_{vv}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{uu} - g_{vv}}{2}\right)^2 + g_{uv}^2}$$

directions principales associées t_1 et t_2

□ sauf ombilics (discriminant nul)

34

Principales étapes

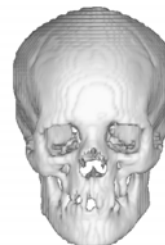
En pratique, un algorithme en trois étapes:

- 1. Sélection des iso-surfaces
- 2. Calcul des critères d'extrémalité
- 3. Extraction lignes de crêtes et/ou points extrémaux

X. Pennec, N. Ayache, and J.-P. Thirion. Chap. 31: Landmark-based registration using features identified through differential geometry. In I. Bankman, editor, Handbook of Medical Imaging, pages 499–513. Academic Press, September 2000.

35

Etape 1: Surfaces Anatomiques



$$f(x, y, z) = I$$

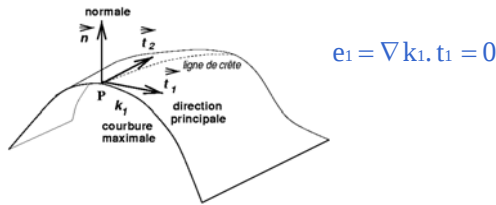
$$\nabla^2 f(x, y, z) = 0$$

Iso-surfaces définies par une équation implicite
Zéros du Laplacien de l'intensité (plus robuste)

36

Etape 2: Lignes de Crêtes

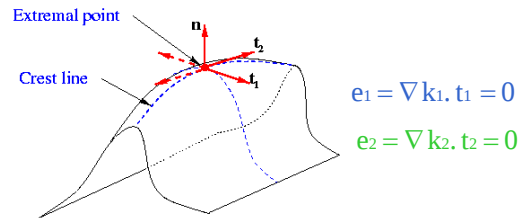
Le lieu des points où la plus grande courbure principale (en valeur absolue) est extrême dans la direction principale associée, lorsque ces directions existent (pas définie aux points ombilics)



37

Etape 3: points extrémaux

La seconde courbure principale est également extrême dans la direction principale associée.

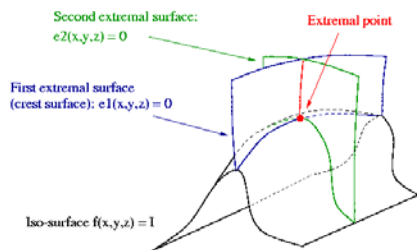


38

Lignes de crêtes et points extrémaux

Intersection de 2 ou 3 surfaces implicites

$$f(x,y,z) = I \quad e_1 = \nabla k_1 \cdot t_1 = 0 \quad e_2 = \nabla k_2 \cdot t_2 = 0$$



39

Mise en oeuvre

- Calcul en chaque voxel de la valeur des critères d'extrémalité à partir des dérivées de l'intensité $f(x,y,z)$; (Théorème des fonctions implicites)
- Les dérivées de $f(x,y,z)$ sont approximées par des produits de convolution discrets de l'image avec les dérivées de la fonction de Gauss
- Suivi de la ligne d'intersection des surfaces implicites par l'algorithme du *Marching Line*

40

Exemple: Courbure Gaussienne

- Produit des courbures principale
- Peut être calculée en chaque voxel par

$$h^2 K = f_x^2 (f_{yy} f_{zz} - f_{yz}^2) + 2 f_y f_z (f_{xz} f_{xy} - f_{xx} f_{yz}) + f_y^2 (f_{xx} f_{zz} - f_{xz}^2) + 2 f_x f_z (f_{yz} f_{xy} - f_{yy} f_{xz}) + f_z^2 (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) + 2 f_x f_y (f_{xz} f_{yz} - f_{zz} f_{xy})$$

avec

$$h = f_x^2 + f_y^2 + f_z^2$$

41

Courbure Moyenne

De même:

$$2h^{3/2} H = f_x^2 (f_{yy} + f_{zz}) - 2 f_y f_z f_{yz} + f_y^2 (f_{xx} + f_{zz}) - 2 f_x f_z f_{xz} + f_z^2 (f_{xx} + f_{yy}) - 2 f_x f_y f_{xy}$$

avec

$$h = f_x^2 + f_y^2 + f_z^2$$

$$k_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

42

Derivations par filtrage linéaire

$$f(x, y, z) = I(x, y, z) * G(x, y, z)$$

$$G(x, y, z) = g(x) \cdot g(y) \cdot g(z)$$

$$g'(x) = h(x)$$

$$f_x(x, y, z) = I(x, y, z) * G_x(x, y, z)$$

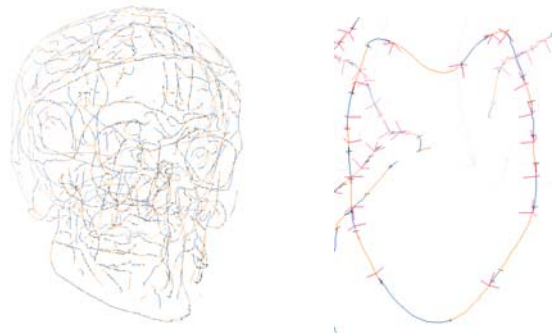
$$G_x(x, y, z) = h(x) \cdot g(y) \cdot g(z)$$

$$f_{yz}(x, y, z) = I(x, y, z) * G_{yz}(x, y, z)$$

$$G_{yz}(x, y, z) = g(x) \cdot h(y) \cdot h(z)$$

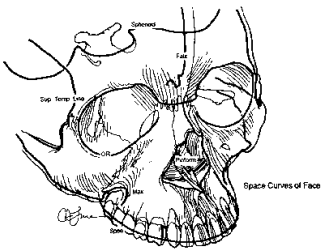
43

Crâne : Points Extrémaux (Scanner)



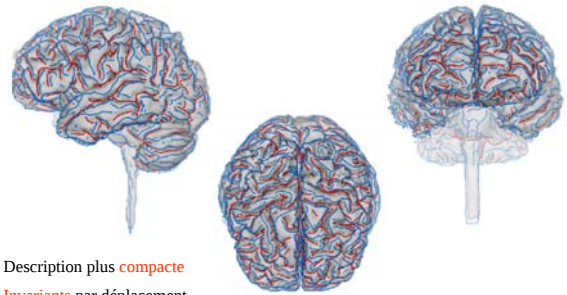
44

Atlas de Court Cutting et al.



45

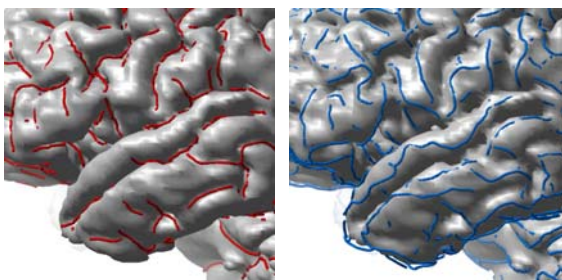
Cortex : Lignes de crêtes (IRM)



Description plus compacte
Invariants par déplacement

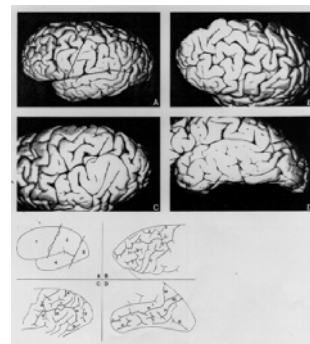
46

Cortex (détail)



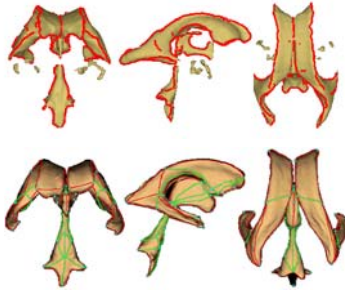
47

Atlas de Ono et al.



48

Ventricules Cérébraux



49

Méthodes Géométriques

. Principe

. Extraction de primitives géométriques

. Algorithmes de recalage géométrique

- Méthodes arborescentes
- Plus proche voisin itéré (PPVI)
- Hachage géométrique

50

Modélisation des images

Les deux images sont décrites par une liste de primitives géométriques

- points
- lignes
- points orientés
- repères
- plans
- ...

51

Recalage

Etant donnés

- un modèle $(a, b, \dots, n)$ et
- une scène $(1, 2, \dots, p)$,

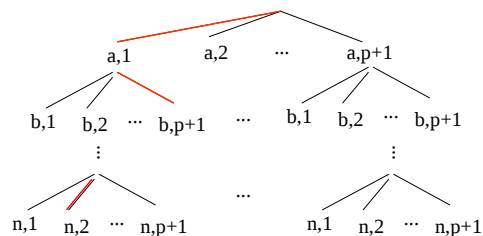
résoudre deux sous-problèmes:

- Identifier: appairer les primitives (modèle, scène)
- Localiser: estimer la transformation T

52

A) Arbre d'interprétation

Modèle: $(a, b, \dots, n)$; Scène: $(1, 2, \dots, p)$:



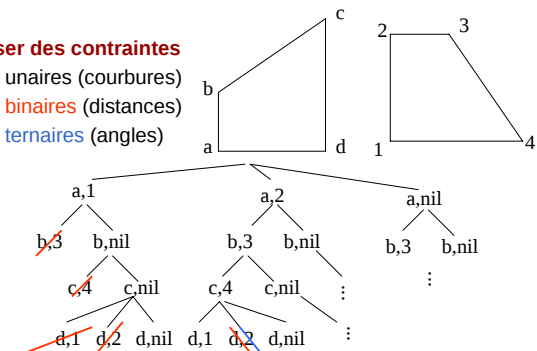
Solution: tout chemin de la racine aux feuilles
Explosion combinatoire: $(p+1)^n$ solutions

53

Réduire la complexité

Utiliser des contraintes

- unaires (courbures)
- binaires (distances)
- ternaires (angles)



54

Prédiction-Vérification

Prédiction: Calculer explicitement T après k appariements

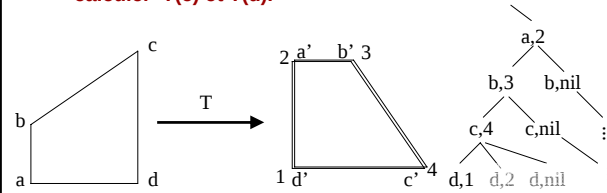
- déplacement 2D: $k = 2$ points ou 2 lignes
- similitude 2D: $k = 2$ points ou 3 lignes
- affine 2D: $k = 3$ points
- déplacement 3D: $k = 3$ points ou 2 lignes ou 3 plans
- affine 3D: $k = 4$ points

Vérification: Appliquer T (ou ICP), compter le nombre d'appariements

Solution: produit le maximum d'appariements

56

Après les hypothèses (a,2) et (b,3), il suffit de calculer T qui superpose a sur 2 et b sur 3, et de calculer $T(c)$ et $T(d)$.



On apparie alors $4 = PPV(T(c))$ et $1 = PPV(T(d))$

57

Estimation de T

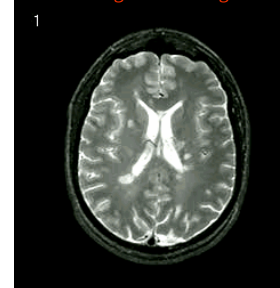
- On peut calculer T aux moindres carrés à partir de l'ensemble des appariements courants
- On peut également raffiner T progressivement à partir de son estimation précédente et d'un nouvel appariement
- Ceci peut se faire en utilisant le filtre de Kalman

58

Application of Rigid Registration to Multiple Sclerosis Evolution

24 3-D images before registration

Same patient followed during one year

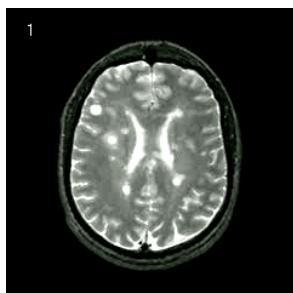


Brigham & Women's Hospital
Harvard Medical School

60

After Rigid Registration (24 times)

24 3-D images after rigid registration

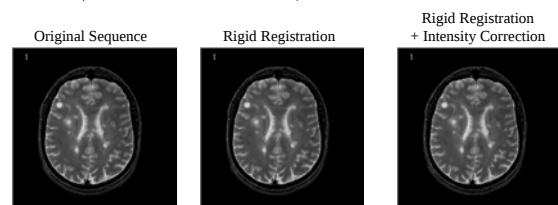


Thanks to rigid registration, one can follow the temporal evolution in any arbitrary 2-D plane

J.P. Thirion
IJCV'98

61

Spatial and Intensity Normalization



Patient Followed during 18 months (24 acquisitions)

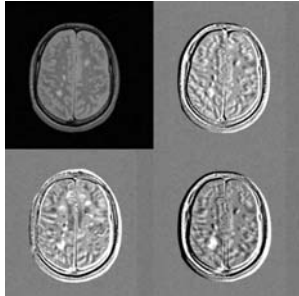
D. Rey, G. Subsol, H. Delingette, N.A. : Automatic Detection and Segmentation of Evolving Processes in 3D Medical Images: Application to Multiple Sclerosis. Medical Image Analysis, 6(2):163-179, June 2002.

Image acquisition: R. Kikinis

62

Sclérose en Plaques (IRM)

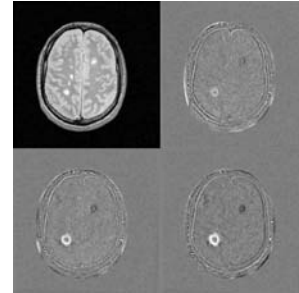
Soustraction avant recalage



63

Sclérose en Plaques

Soustraction après recalage



64

Augmented reality guided radio-frequency tumor ablation

Current operative setup at IRCAD (Strasbourg, France)

- Per-operative CT "guidance"
- Respiratory gating
 - Marker based 3D/2D rigid registration



S. Nicolau, X. Pennec, A. Garcia, L. Soler, N. Ayache

IRCAD

65

Registration for Augmented reality



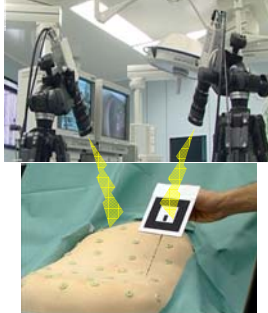
67

Whole loop accuracy evaluation

Left monitor with AR
& needle tracking



Stereoscopic HD video acquisition



Real scene: phantom + needle

Right monitor with AR
& needle tracking



68

Whole loop accuracy evaluation

Left monitor with AR
& needle tracking



Endoscopic control



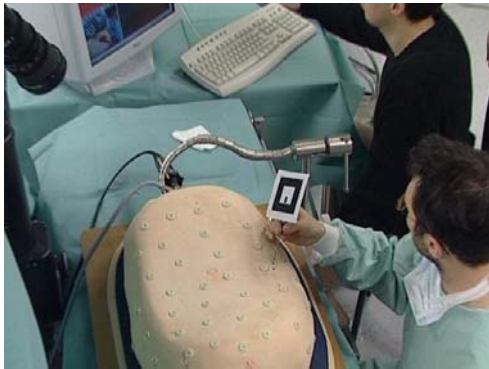
Real scene: phantom + needle

Right monitor with AR
& needle tracking



69

Whole loop accuracy evaluation



70

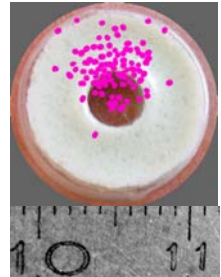
Whole loop accuracy evaluation

Experimental setup

- Two participants (comp. sci. + surgeon)
- 100 needle targetings

Measures

- Distribution of hits (endoscopic view, video recording)
- Average deviation from target: $2.8 \text{ mm} \pm 1.4$
- Average targeting time: $46.6 \text{ sec.} \pm 24.64$



[S. Nicolau, A. Garcia et al., Aug. & Virtual Reality Workshop, Geneva, 2003]

71

Liver puncture guidance using augmented reality

3D (CT) / 2D (Video) registration

- 2D-3D EM-ICP on fiducial markers
- Certified accuracy in real time

Validation

- Bronze standard (no gold-standard)
- Phantom in the operating room (2 mm)
- 10 Patient (passive mode): $< 5 \text{ mm}$ (apnea)



[S. Nicolau, PhD'04 MICCAI05, ECCV04,, IS4TM03, Comp. Anim. & Virtual World 2005]

72

B) Plus Proche Voisin Itéré (PPVI ou ICP)

On considère 2 ensembles de points $I_1=\{P_i\}$ et $I_2=\{Q_j\}$

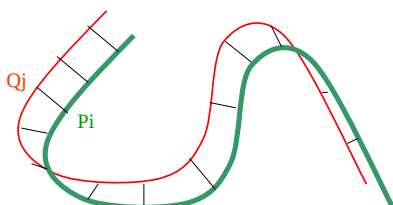
A partir d'une estimation initiale de T

- Chaque point P_i de I_1 est apparié avec le point Q_j de I_2 le plus proche de $T(P_i)$. $A(P_i) = PPV(T(P_i))$
- On cherche T qui minimise la somme des distances au carré entre les points appariés

On itère jusqu'à convergence

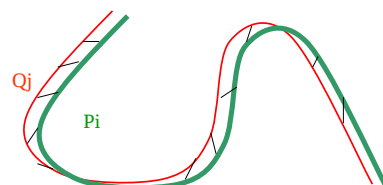
73

1. Optimisation des appariements



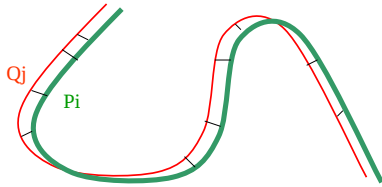
74

2. Optimisation de T



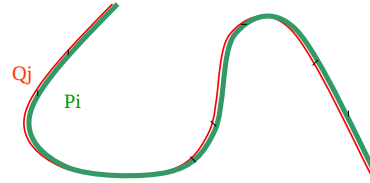
75

1-bis Optimisation des Appariements



76

2-bis Optimisation de T



77

Convergence de PPVI - ICP

A chaque étape, minimisation du même critère

$$C(A, T) = \sum_i \text{dist}(T(P_i), A(P_i))^2$$

□ Etape 1: $A^* = \underset{A}{\text{Argmin}} \sum_i \text{dist}(T(P_i), A(P_i))^2$

□ Etape 2: $T^* = \underset{T}{\text{Argmin}} \sum_i \text{dist}(T(P_i), A(P_i))^2$

Critère positif, décroissant: convergence

78

Occultations

On peut prendre en compte les occultations en fixant un seuil S

Si $\text{dist}(T(P_i), A(P_i))^2 \geq S$ alors $A(P_i) = \text{nil}$

et $\text{dist}(T(P_i), \text{nil})^2 \stackrel{\text{def}}{=} S^2$

79

Initialisation de T

Par prédiction d'hypothèses

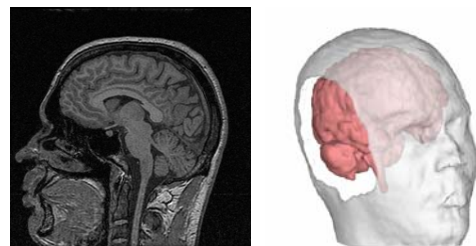
on apparie des primitives en utilisant des invariants géométriques

J. Feldmar, N. Ayache, and F. Betting. 3D-2D projective registration of free-form curves and surfaces. *Journal of Computer Vision and Image Understanding*, 65(3):403-424, 1997.

80

Images Pré-opératoires

IRM



81

Images Per-opératoires

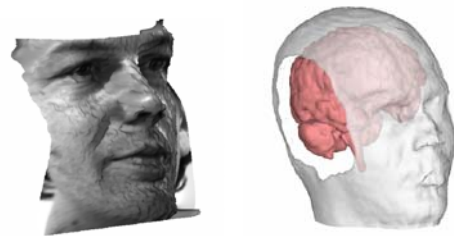
Images Vidéo Stéréoscopiques



82

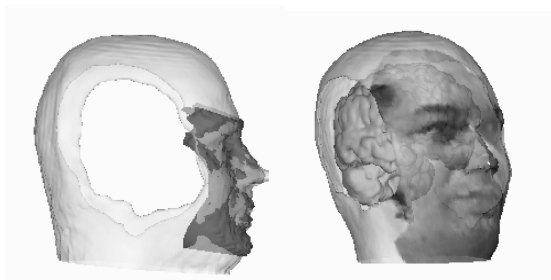
Recalage des surfaces externes

Visage stéréo et Visage IRM



83

Recalage des surfaces



86

Réalité Augmentée



87

Réalité Augmentée

Brigham & Women's Hospital



E. Grimson

88

Réalité Augmentée: Chirurgie Hépatique



Ircad: J. Marescaux, L. Soler

89

Hachage Géométrique



95

C) Algorithme de Hachage

Chaque primitive est caractérisée par un petit nombre d'invariants géométriques k

Phase de prétraitement :

- pour chaque image modèle, les invariants des primitives géométriques sont utilisés pour stocker celles-ci dans une table de hachage unique de dimension k

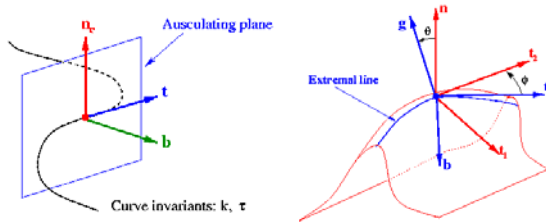
Phase de recalage :

- les invariants d'une nouvelle image sont comparées à ceux de la table de hachage. Chaque correspondance permet de voter pour un modèle et pour une transformation
- On reconnaît le couple modèle/transformation le plus populaire

96

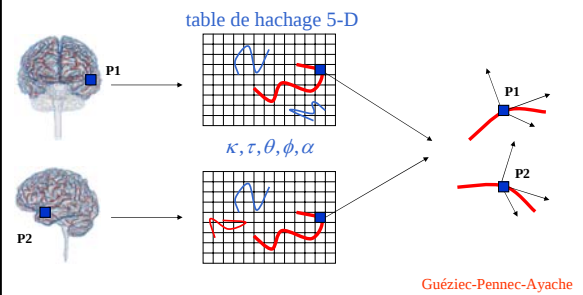
Invariants

Courbure, torsion, angles entre repères liés à la courbe (Frénét) et à la surface.



97

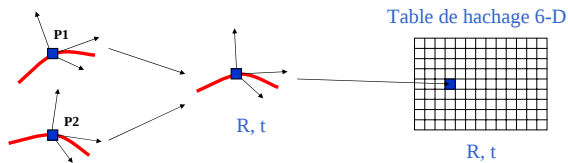
Hachage géométrique (1)



Guéziec-Pennec-Ayache

98

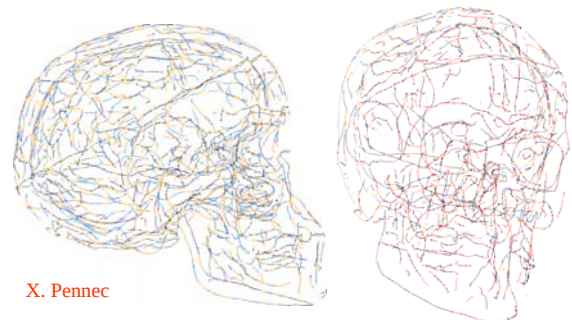
Hachage géométrique (2)



La transformation cherchée est la plus représentée
Robuste aux occultations et petites déformations
Entièrement automatique, faible complexité algorithmique, précision

99

2 crânes (avant recalage)



X. Pennec

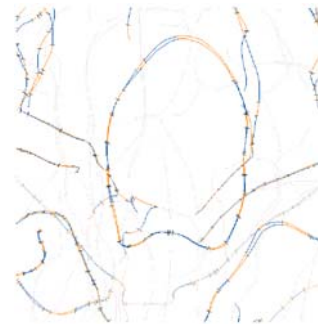
100

2 Crânes Recalés (Scanner)



101

Détail: Foramen Occipital



102

Hachage Géométrique

AVANTAGES :

- Faible complexité algorithmique de la phase de reconnaissance (grâce aux pré-calculs)
- Extension simple à la reconnaissance de plusieurs modèles, avec un accroissement fortement sous-linéaire du temps de calcul.

DIFFICULTÉS :

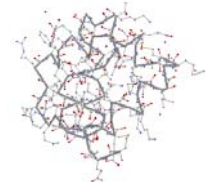
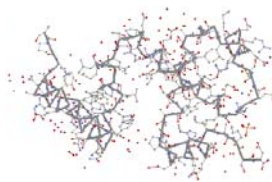
- Modélisation des zones d'incertitude
- Implémentation des accumulateurs

103

Reconnaissance d'un motif 3-D commun à deux protéines

Represseur TRP de la bactérie E. Coli

Protéine CRO du Phage 434



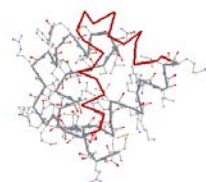
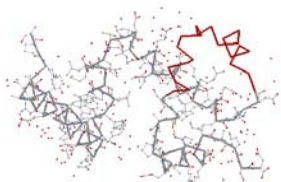
X. Pennec

106

Reconnaissance d'un motif 3-D commun à deux protéines

Represseur TRP de la bactérie E. Coli

Protéine CRO du Phage 434

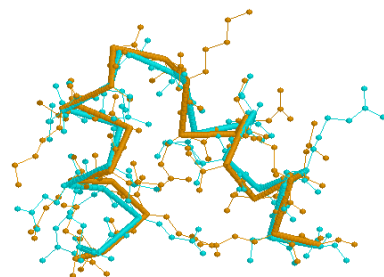


Motif Helix-Turn-Helix

X. Pennec

107

Superposition des motifs Helix-Turn-Helix



108

Conclusion Méthodes Géométriques

Avantages

- automatiques (pas d'initialisation)
- rapides (après la segmentation)
- robustes (traitement des points aberrants)

Inconvénients

- segmentation préalable des images
- requièrent des invariants stables (primitives homologues)
- typiquement : recalage rigide et/ou monomodal

Recalage déformable et/ou multimodal:

- méthodes iconiques...

109

Estimation de la transformation T

Cas Rigide

110

Les moindres carrés

Problème:

- On considère n points appariés (x_i, x'_i) et on cherche à minimiser :

$$C(R, t) = \sum_i \|x'_i - R x_i - t\|^2$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 2 \sum_i (x'_i - R x_i - t) = 0$$

$$t = \bar{x}' - R \bar{x}$$

- En passant en coordonnées barycentriques

$$y_i = x_i - \bar{x}$$

$$y'_i = x'_i - \bar{x}'$$

$$C(R, t) = C(R) = \sum_i \|y'_i - R y_i\|^2$$

111

Les quaternions

Généralisation des complexes en 3 dimensions (Hamilton 1843, Rodrigues)

Quaternion: $q = (s, w) \in \mathbb{H}^4$

□ partie réelle : $s \in \mathbb{R}$

□ partie pure : $w \in \mathbb{H}^3$

Opérations

□ Addition: $(s, w) + (s', w') = (s + s', w + w')$

□ Multiplication: $(s, w) * (s', w') = (ss' - ww', w \wedge w' + s w' + s' w)$

□ Conjugué: $\bar{q} = (s, -w)$

□ Norme et inverse: $|q|^2 = \bar{q} * q = |w|_{\mathbb{H}^3}^2 + s^2 = |q|_{\mathbb{H}^4}^2$; $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$

□ Compatibilité produit-norme: $|q * q'|^2 = |q|^2 |q'|^2$

112

Quaternions Unitaires et Rotations

- Les quaternions unitaires forment avec la loi $*$ un groupe non commutatif.

- On associe à chaque quaternion unitaire q une application $R(q)$:

$$Q \xrightarrow{R_q} Q$$

$$p \mapsto q * p * \bar{q}$$

- La restriction de $R(q)$ à $\mathbb{R}^3$ est une rotation de $\mathbb{R}^3$

$$(0, x) \mapsto (0, R_q(x))$$

- La rotation $R(\theta, n)$ est associée aux deux quaternions unitaires

$$q = (\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2})n); \text{ et } -q$$

113

Quaternions et moindres carrés

Le critère précédent peut s'écrire

$$C(R) = \sum_i \|y'_i - R y_i\|^2 = \sum_i |p'_i - q * p_i * \bar{q}|^2$$

- en identifiant $p_i = (0, y_i)$; $p'_i = (0, y'_i)$

On obtient :

$$C(R) = \sum_i |p'_i - q * p_i * \bar{q}|^2 |q|^2 = \sum_i |p'_i * q - q * p_i|^2$$

En posant $p'_i * q - q * p_i = A_i q$; **A : matrice 4x4**

$$C(R) = q^t [\sum_i A_i^t A_i] q = q^t B q$$

114

Résolution

On minimise la forme quadratique précédente sous la contrainte : q unitaire.

La solution est donnée par le vecteur propre unitaire de B associé à la valeur propre minimale.

Utilisation difficile d'une solution récursive approchée (Filtre de Kalman étendu):

- représentation non minimale des rotations
- contrainte quadratique (q unitaire)

115

116