Méthodes de reconstruction 2D

- **Méthodes algébriques**
- **Méthodes analytiques**

– Inversion de la transformation de Fourier
– Rétro-projection filtrée

- **Méthodes d'optimisation et d'estimation**

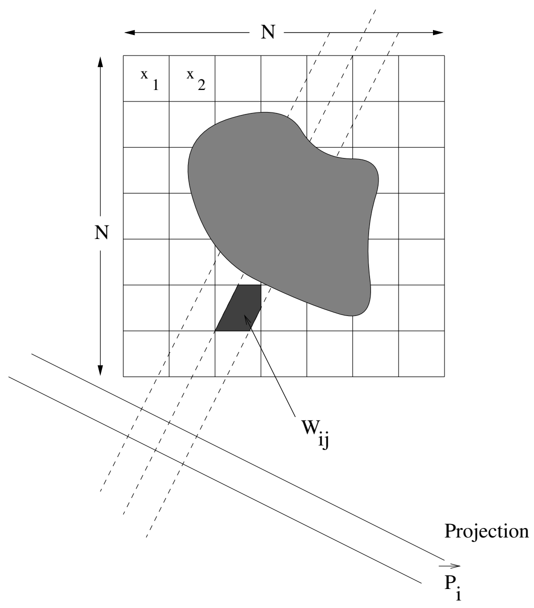
– Maximisation d'entropie
– Maximisation de vraisemblance

- **Autres méthodes**

– Méthode de Monte-Carlo
– . . .

Les méthodes les plus utilisées dans les imageurs sont les méthodes analytiques.

Méthodes algébriques



Le problème revient à résoudre les équations linéaires

$$\vec{\mathbf{P}}_i = \mathbf{W}_i \vec{\mathbf{X}} \quad \text{pour tout } i$$

où $\vec{\mathbf{X}}$ est un vecteur de dimension N^2.

On procède par itérations à partir d'une solution initiale.

Transformation de Fourier

- Transformation de Fourier 1D

$$f(x) \xrightarrow{TF_{1D}} F(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-i2\pi xX} \mathrm{d}x$$

- Transformation inverse de Fourier 1D

$$F(X) \xrightarrow{TF_{1D}^{-1}} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(X) \mathrm{e}^{i2\pi xX} \mathrm{d}X$$

- Transformation de Fourier 2D

$$f(x,y) \xrightarrow{TF_{2D}} F(X,Y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \mathrm{e}^{-i2\pi(xX+yY)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

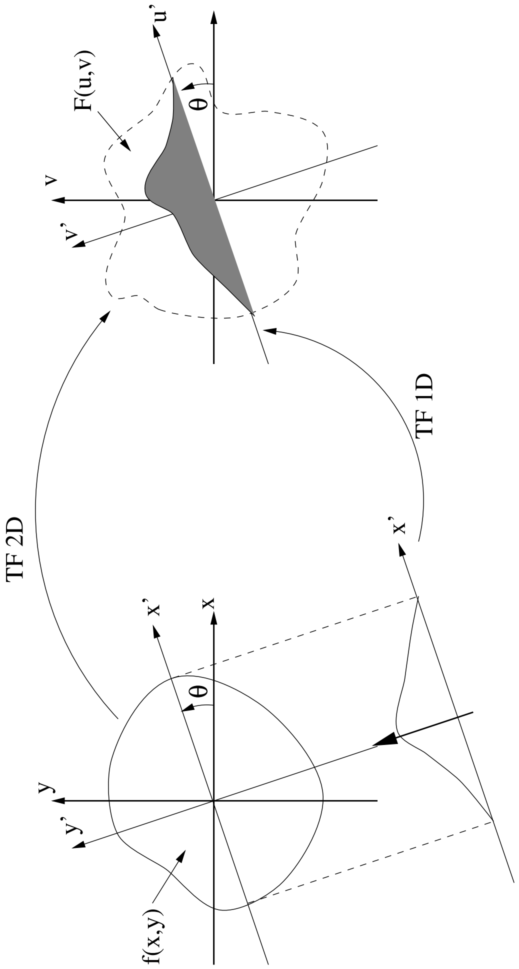
- Transformation inverse de Fourier 2D

$$F(X,Y) \xrightarrow{TF_{2D}^{-1}} f(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(X,Y) \mathrm{e}^{i2\pi(xX+yY)} \mathrm{d}X\mathrm{d}Y$$

Théorème du profil central de la transformée de Fourier

La transformée (1D) de Fourier d'une projection uni-dimensionnelle de l'image originale est égale à la coupe uni-dimensionnelle, dans la même direction, de l'image obtenue par la transformée (2D) de Fourier de l'image originale.

Théorème du profil central de la transformée de Fourier *(suite)*



Théorème du profil central de la transformée de Fourier

Reconstruction à l'aide de la transformée de Fourier

- $1^{\text{ère}}$ **méthode**

– Transformation de Fourier 1D des projections.

– Rééchantillonnage polaire → cartésien de l'espace 2D de Fourier.

– Transformation inverse de Fourier 2D.

- 2^{nde} **méthode** La rétro-projection filtrée dans l'espace réel.

Rétro-projection filtrée

- **Passage en coordonnées polaires** dans l'espace de Fourier $(X,Y) \to (R,\theta)$

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(R,\theta)|R|\mathrm{e}^{i2\pi Rt}\mathrm{d}R \right] \mathrm{d}\theta$$

avec $t = x\cos\theta + y\sin\theta$.

- **Soit** $q_\theta(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(R,\theta)|R|\mathrm{e}^{i2\pi Rt}\mathrm{d}R$

$$q_\theta(t) = TF_{1D}^{-1}\Big(F(R,\theta)|R|\Big)$$

où $F(R,\theta)$ est la coupe selon θ de la transformée de Fourier 2D de l'image originale.

- La transformée inverse d'un produit de 2 fonctions est le produit de convolution des transformées inverses de 2 fonctions :

$$TF^{-1}(fg) = TF^{-1}(f) * TF^{-1}(g)$$

Rétro-projection filtrée *(suite)*

- La transformée inverse de $F(R,\theta)$ est la projection de l'image originale selon θ (théorème de la tranche centrale) : $p_\theta(t)$.

- La transformée inverse de $|R|$ est

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |R|\mathrm{e}^{i2\pi Rt}\mathrm{d}R$$

- **D'où** $q_\theta(t) = (p_\theta * h)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(u)h(t-u)\mathrm{d}u$

C'est le filtrage de la projection p_θ par la fonction h

- **L'opération** $f(x,y) = \displaystyle\int_0^{\pi} q_\theta(x\cos\theta + y\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ s'appelle rétro-projection.