INTRODUCTION

- Définition d'une image :

  C'est la représentation d'un phénomène physique dans une partie de $\mathbb{R}^n$.

- Modèle d'une image :

  On dispose d'une fonction descriptive du phénomène physique a priori représentative de la réalité. Généralement, une image est donc une fonction définie sur un support compact K de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Exemples de fonctions descriptives :
  - Luminosité (photographie)
  - Cœfficient d'absorption de rayons X (scanner)
  - Densité de protons (imagerie par résonance magnétique)

- Acquisition d'une image :

  En fait, on ne dispose que de l'intégration de la fonction descriptive sur une petite partie de l'espace.

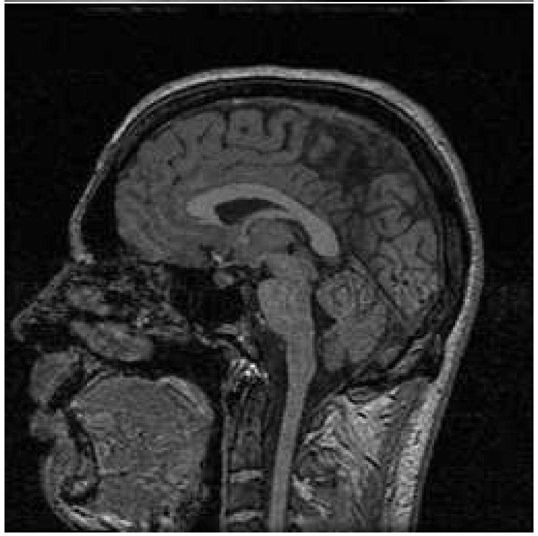
- Discrétisation de l'espace d'acquisition :
  - 2D : pavage carré, rectangulaire, hexagonal
  - 3D : pavage cubique, parallélépipèdique, rhombododécaèdrique

- Discrétisation des valeurs de la fonction :

  liée au codage (nombre de bits) employé.

  Si la fonction est à valeurs dans $\{0, 1\}$, l'image est dite binaire.

INTRODUCTION



INTRODUCTION

La **segmentation** d'une image consiste en l'extraction d'information pertinente de l'image.

Il y a deux approches possibles :

- *L'approche contours* :

  recherche des discontinuités de la fonction des niveaux de gris.

- *L'approche régions* :

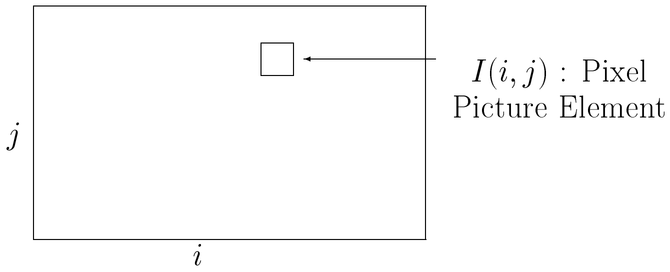
  Partitionnement de l'image en zones homogènes au sens des niveaux de gris.

Ces deux approches sont **duales**.

IMAGE NUMERIQUE
EXEMPLE D'UNE PHOTOGRAPHIE

On quantifie

- La **position spatiale** dans l'image



  Une image numérique est une matrice de valeurs $I(i,j)$ (typiquement 512×512).

- Le **temps d'acquisition** d'une image

  $I(i,j)$ mesure la quantité de lumière reçue par l'élément de surface (i,j) pendant Δt (typiquement $\Delta t = 1/25s$).

- La **valeur** de $I(i,j)$ (typiquement 256 valeurs codées sur un octet).

DETECTION DE CONTOURS

- But :

  On cherche à caractériser les points de discontinuité de l'intensité lumineuse $I(i,j)$. Ces points fournissent des **indices visuels** et correspondent généralement à la frontière d'objets physique, à des marques ou des intersections de surfaces. Ces indices visuels sont utiles pour les étapes ultérieures (segmentation, vision stéréoscopique, reconnaissance et localisation d'objets).

INTERPRETATION DES CONTOURS

Modèle photogrammétrique simplifié
En première approximation (on négliage la distance)

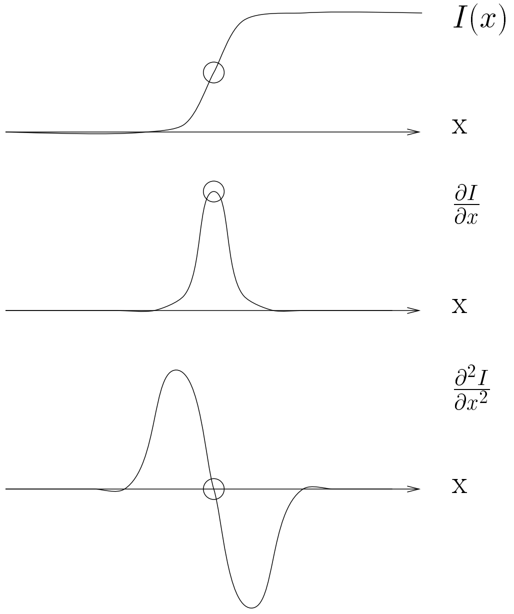
$$I_r(\vec{u}) = F(\vec{u}, I_i, R, \vec{N})$$

- I_r : intensité lumineuse reçue d'une surface S
- $\vec{u}$: direction d'observation
- I_i : intensité lumineuse incidente à la surface S
- R : réflectance de la surface S
- $\vec{N}$: normale à la surface S

Les contours correspondent à une discontinuité de $I_r(\vec{u})$, généralement provoquée par une discontinuité d'un des paramètres $I_i, R, \vec{N}$ pour une variation de la direction $\vec{u}$.

1. **Occultations** : I_i, R et $\vec{N}$
2. **Arêtes** : $\vec{N}$
3. **Marques** : R
4. **Ombres** : I_i

DETECTION DES CONTOURS



DETECTION DES CONTOURS

- **Définition qualitative**
  - Points où l'intensité $I(x,y)$ varie rapidement avec (x,y).
- **Définitions quantitatives**
  1. **Maxima du gradient**
     - Points où $\|\vec{\nabla} I\| = \|(\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y})\|$ est extremal dans la direction du gradient $\vec{\nabla} I$.
     - Le gradient est orthogonal au contour.
  2. **Passages par zéro du laplacien**
     - Points où $\nabla^2 I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$ est nul.

DETECTION DES CONTOURS

Ces deux approches ne sont pas équivalentes.

- La dérivée de la norme du gradient dans une direction $\vec{v}$ s'écrit :
  $$\frac{\mathrm{d}\|\vec{\nabla} I\|}{\mathrm{d}\vec{v}} = \vec{v}.\vec{\nabla}\|\vec{\nabla} I\|$$
  avec
  $$\vec{\nabla}\|\vec{\nabla} I\| = \begin{pmatrix} \dfrac{I_x I_{xx} + I_y I_{yx}}{\|\vec{\nabla} I\|} \\ \dfrac{I_x I_{xy} + I_y I_{yy}}{\|\vec{\nabla} I\|} \end{pmatrix} = \frac{(\mathrm{H}I)\vec{\nabla} I}{\|\vec{\nabla} I\|}$$
  Le critère d'extremalité dans la direction du gradient s'écrit donc (pour les points ayant un gradient non nul) :
  $$\vec{\nabla} I.(\mathrm{H}I)\vec{\nabla} I = 0$$
  où H est l'opérateur hessien.
- Les zéros du laplacien s'écrivent :
  $$\mathrm{trace}(\mathrm{H}I) = 0$$

DETECTION DES CONTOURS

Les avantages de ces approches sont :

- **Maxima du gradient**
  - On dispose d'une "mesure de la discontinuité" du contours : la valeur de la norme du gradient correspond à la "hauteur" du contour.
- **Passages par zéro du laplacien**
  - On obtient des contours fermés : transitions entre les zones positives et négatives du laplacien.

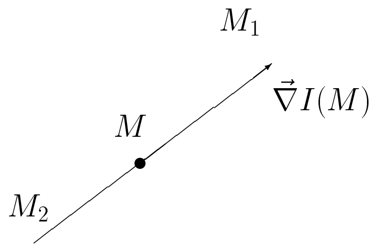
EXTREMA DU GRADIENT

Cette méthode se décompose ainsi :

1. Calcul du gradient de l'image :

$$\vec{\nabla} I = (\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y})$$

2. Extraction
   des extrema du gradient dans la direction du gradient :



$$M_1 = M + d\frac{\vec{\nabla} I(M)}{\|\vec{\nabla} I(M)\|} \quad ; \quad M_2 = M - d\frac{\vec{\nabla} I(M)}{\|\vec{\nabla} I(M)\|}$$

M est un extremum du gradient si :

$$\|\vec{\nabla} I(M)\| > \|\vec{\nabla} I(M_2)\| \quad \text{et} \quad \|\vec{\nabla} I(M)\| \geq \|\vec{\nabla} I(M_1)\|$$

3. Seuillage des extrema du gradient

PASSAGE PAR ZERO DU LAPLACIEN

Cette méthode se décompose ainsi :

1. Calcul du laplacien :

$$\nabla^2 I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$

   et extraction des passages par zéro.

2. Calcul de la norme du gradient :

$$\|\vec{\nabla} I\| = \|(\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y})\|$$

3. Seuillage des passages pae zéro avec l'information norme.

SEUILLAGE

Il existe deux seuillages généralement utilisé :

1. Le seuillage simple :
   On sélectionne les points M vérifiant

$$\|\vec{\nabla} I(M)\| > s$$

2. Le seuillage par hystérésis :
   On sélectionne les points M vérifiant :
   (a) M appartient à une composante connexe C dont tous les points N vérifient

$$\|\vec{\nabla} I(N)\| > s_1$$

   (b) Il existe un point N_0 de C tel que

$$\|\vec{\nabla} I(N_0)\| > s_2$$

   (c) (facultatif) La taille de C est supérieure à t.

FILTRAGE

Le filtrage d'une image consiste à en extraire de l'information de manière globale.

Il y a différents types de filtrage :

- Linéaire :

  On peut exprimer le résultat du filtrage sous forme d'un produit de convolution de l'image par une fonction (le filtre).

- Non-linéaire
- Séparable :

  Un filtrage multidimensionnel peut s'exprimer comme la composition de plusieurs filtres mondimensionnels.

- Non-séparable

FILTRAGE

La convolution s'écrit dans le domaine réel par :

$$(I \star f)(M_0) = \int_{\text{Image}} I(M) f(M - M_0) dM$$

et dans le domaine discret par :

$$(I \star f)(M_0) \approx \sum_{\text{Image}} I(M) f(M - M_0)$$

Les avantages de la convolution sont

- la possibilité de combiner plusieurs filtres :

$$I \star (fg) = (I \star f) \star g$$

- ses propriétés vis-à-vis de la dérivation :

$$(I \star f)^{(n)} = I^{(n)} \star f = I^{(k)} \star \Big((-1)^{n-k} \; f^{(n-k)} \Big) = I \star \Big((-1)^n \; f^{(n)} \Big)$$

Ces propriétés de dérivations ne sont malheureusement plus vérifiées dans le cas des images (sommation discrète).

L'avantage de la séparabilité s'exprime en fonction du coût calculatoire :

Soit, en dimension n, un filtre f de taille $\overbrace{p \times \ldots \times p}^{n}$ et une image I de taille d^n, alors le coût de la convolution directe de I par f est :

Nombre de multiplication : $d^n p^n$

Nombre d'additions : $d^n(p^n - 1)$.

Si f est séparable selon les d directions, le coût calculatoire devient :

Nombre de multiplication : $n(d^n p)$

Nombre d'additions : $n(d^n(p-1))$.

Exemple de filtre linéaire et séparable : le filtre moyenne

$$\overline{I}(x,y) = \frac{1}{9} \sum_{i=-1\ldots1} \sum_{j=-1\ldots1} I(x+i, y+j)$$

que l'on peut écrire

$$\overline{I} = I \star \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce filtre est de plus séparable :

$$\overline{I}(x,y) = \frac{1}{3} \sum_{j=-1\ldots1} \left(\frac{1}{3} \sum_{i=-1\ldots1} I(x+i, y+j) \right)$$

ce qui peut s'écrire :

$$\overline{I} = \left(I \star \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \star \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple de filtre non-linéaire et séparable : le filtre maximum

$$\max_{3\times 3} I = \max_{i=-1\ldots 1, j=-1\ldots 1} I(x+i, y+j)$$

$$\max_{3\times 3} I = \max_{j=-1\ldots 1} \left(\max_{i=-1\ldots 1} I(x+i, y+j) \right)$$

Exemple de filtre non-linéaire : le filtre médian

Ce filtre a pour effet de supprimer le bruit impulsionnel dans une image.

1. Pour un point M, on trie dans son voisinage les valeurs de niveaux de gris par ordre croissant.
2. On attribue à M la valeur en niveau de gris la plus représentée dans son voisinage

Ce filtre n'est pas séparable.

Calcul des dérivées d'une image : filtrage linéaire

Par différences finies :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

d'où le filtre dérivée première ($h = 1$)

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f''(x) \approx \frac{\frac{f(x+h_1+h_2)-f(x+h_1-h_2)}{2h_2} - \frac{f(x-h_1+h_2)-f(x-h_1-h_2)}{2h_2}}{2h_1}$$

d'où le filtre dérivée seconde ($h_1 = h_2 = 1/2$)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Le filtre de dérivation selon x et y deviennent alors

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et le laplacien

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcul des dérivées d'une image : filtrage non-linéaire

Le gradient étant orthogonal au contour, on calcule les dérivées premières de l'image dans plusieurs directions et on garde la réponse maximale : ce sont les masques de Prewitt.

$$\text{N} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{N - W} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 5 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{W} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{W - S} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ 5 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

plus 4 autres masques de convolutions.
Chacun de ces masques est un filtre linéaire mais non séparable.

Calcul des dérivées d'une image : filtres de Sobel

La notion de filtre séparable (dans le traitement d'image) a été introduite historiquement par Sobel.

Pour réduire le bruit présent dans l'image (correspondant généralement aux composantes très hautes fréquences de l'intensité lumineuse), on convolue par un filtre passe-bas (appelé filtre de lissage), par exemple :

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Le filtre de dérivée première selon x devient donc :

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \star \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et selon y :

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \star \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Les résultats obtenus avec les filtres présentés sont difficiles à évaluer et à comparer.

On définit les contours comme les maxima de la convolution de $I(x)$ avec un filtre f.

Canny a défini un modèle de contour d'une part et des critères de performance d'autre part.

détection : le filtre doit donner une réponse au voisinage d'un contour;

localisation : le contour doit être localisé avec précision;

réponse unique : un contour doit provoquer une seule réponse du filtre.

Modèle de contour

Nous nous donnons comme modèle de contour une fonction de type marche (step) :

$$c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et comme modèle de bruit un bruit blanc gaussien η de variance η_0^2, le signal I est alors représenté par :

$$I(x) = Ac(x) + \eta(x)$$

où A est la hauteur de la marche.

Critères de performance

détection des points de contours : maximiser le rapport signal sur bruit

$$\mathrm{RSB} = \frac{A}{\eta_0} \frac{\int_{-\infty}^{0} f(x)dx}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx}} = \frac{A}{\eta_0}\sigma$$

localisation des points de contours : maximiser

$$L = \frac{A}{\eta_0} \frac{|f'(0)|}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)dx}} = \frac{A}{\eta_0}\lambda$$

réponse unique : la distance $x_{\max}$ entre deux pics est une fraction k de la taille du filtre W

$$x_{\max} = k\,W = 2\pi \times \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x)dx}$$

Filtre de Canny

Canny a résolu numériquement l'équation aux dérivées partielles liée à ses critères en cherchant un filtre antisymétrique de taille *finie* et il a trouvé un filtre ressemblant à la première dérivée d'une gaussienne.

Filtre de Canny = Première dérivée d'une gaussienne.

Filtre de lissage = Gaussienne.

Filtre de Deriche

Deriche a repris la modélisation de Canny mais a résolu directement l'équation aux dérivées partielles.
Il a donc trouvé un filtre de taille *infinie*

$$f(x) = a\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\sin(\omega x)$$

En posant $\alpha = m\omega$ et en reprenant les critères déjà définis, on remarque que le meilleur compromis localisation/détection s'obtient pour $m = \alpha/\omega \gg 1$.
Le filtre de dérivation de Deriche devient donc :

$$f(x) = kx\mathrm{e}^{-\alpha|x|}$$

α permet de "régler" la taille du filtre, et k est une constante de normalisation.

Mise en œuvre du filtre de Deriche

Le filtre de Deriche est de taille *infinie*, mais on peut le mettre en ouvere récursivement.
Soit $f(n)$ la fonction d'échantillonnage de $f(x)$ et $F(Z)$ sa transformée en Z :

$$F(Z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) Z^{-n}$$

$f(n)$ s'écrit $f_-(n) + f_+(n)$ où :

$$f_-(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 0 \\ -kn\mathrm{e}^{\alpha n} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

$$f_+(n) = \begin{cases} -kn\mathrm{e}^{-\alpha n} & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$F(Z) = F_-(Z) + F_+(Z^{-1})$$

Avec

$$F_-(Z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_-(n) Z^{-n} \ ; \ F_+(Z^{-1}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_+(n) Z^{-n}$$

FILTRAGE

Mise en œuvre du filtre de Deriche

On obtient après calculs :

$$F_+(Z) = -F_-(Z) = \frac{aZ}{1 + b_1 Z + b_2 Z^2}$$

avec

$$a = -c\mathrm{e}^{-\alpha} \ ; \ b_1 = -2\mathrm{e}^{-\alpha} \ ; \ b_2 = \mathrm{e}^{-2\alpha}$$

et la constante de normalisation k choisie pour que la réponse à une marche soit la hauteur de la marche :

$$k = \frac{(1 - \mathrm{e}^{-\alpha})^2}{\mathrm{e}^{-\alpha}}$$

La mise en œuvre récursive de ce filtre s'écrit finalement :

$$\begin{array}{rcl} y^+(m) = & ax(m-1) - b_1 y^+(m-1) - b_2 y^+(m-2) & m = 1 \dots N \\ y^-(m) = & ax(m+1) - b_1 y^-(m+1) - b_2 y^-(m+2) & m = N \dots 1 \\ y(m) = & y^-(m) + y^+(m) & m = 1 \dots N \end{array}$$

Filtres de Deriche

Par intégration et dérivation du filtre de dérivation première, on obtient respectivement les filtres de lissage et de dérivation seconde :

Filtre de lissage

$$f^{(0)}(x) = k(\alpha|x| + 1)\mathrm{e}^{-\alpha|x|}$$

Filtre de dérivée seconde par dérivation de $f^{(1)}$ on obtient

$$f^{(2)}(x) = -k(1 - \alpha|x|)\mathrm{e}^{-\alpha|x|}$$

Toutefois ce filtre ne donne pas une réponse nulle à un signal constant aussi on le change en :

$$-(1 - k\alpha|x|)\mathrm{e}^{-\alpha|x|}$$

Filtres de Shen-Castan

En utilisant d'autres critères de performance que ceux définis par Canny, Shen et Castan ont trouvé un autre filtre de taille *infinie* que celui de Deriche.

Filtre de lissage

$$f(x) = k\,\mathrm{e}^{-\alpha|x|}$$

Filtre de dérivation

$$f(x) = k\,\varepsilon(x)\mathrm{e}^{-\alpha|x|}$$

avec

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ces filtres peuvent aussi être mis en œuvre récursivement.