# UTILISATION DE VOLUMES OU DE SURFACES SEGMENTES
## Transformation rigide

Une transformation rigide est définie par 6 paramètres, 3 pour la translation, 3 pour la rotation. La translation dépend du centre de rotation choisi:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OM'} &= \mathbf{R}\overrightarrow{OM} + \vec{\mathbf{t}} \\
\overrightarrow{O'M'} &= \overrightarrow{O'O} + \mathbf{R}(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}) + \vec{\mathbf{t}} \\
&= \mathbf{R}\overrightarrow{O'M} + \underbrace{\overrightarrow{O'O} + \mathbf{R}\overrightarrow{OO'} + \vec{\mathbf{t}}}_{\vec{\mathbf{t}'}}
\end{aligned}
$$

Cas particulier d'un point appartenant au solide :

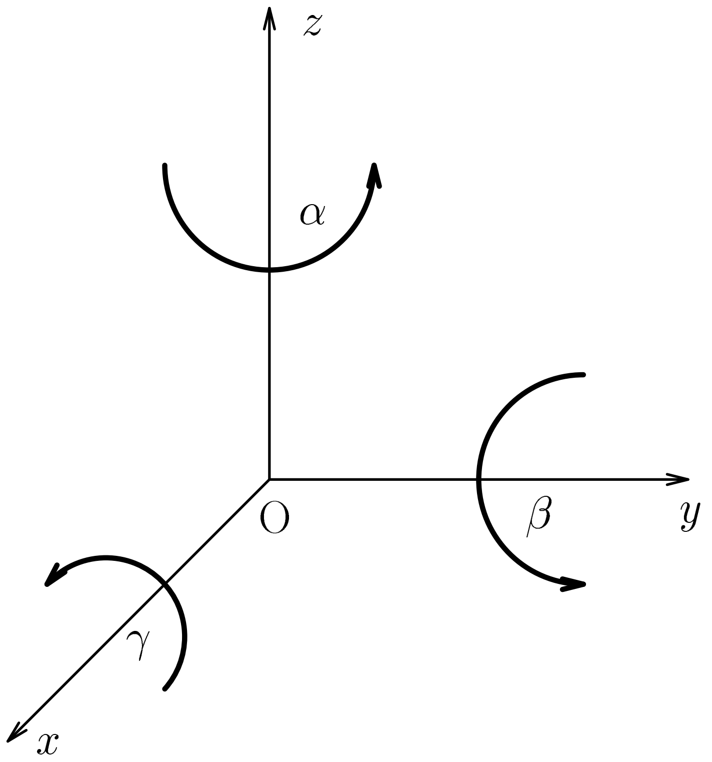
$$
\left\{ \begin{array}{lcl} \overrightarrow{P'M'} &=& \mathbf{R}\overrightarrow{PM} \\ \overrightarrow{PP'} &=& \vec{\mathbf{t}} \end{array} \right. \qquad \forall P \in S^1
$$

Les dérivées de $T(M) = M'$ par les coordonnées du vecteur translation sont évidentes :

$$
\frac{\partial T(M)}{\partial \mathbf{t}_x} = \vec{\mathbf{x}}
$$

# UTILISATION DE VOLUMES OU DE SURFACES SEGMENTES

## Rotations
## Paramétrisation par les angles d'Euler




$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

Les angles $(\gamma, \beta, \alpha)$ sont appelés roulis, tangage et lacet.

# UTILISATION DE VOLUMES OU DE SURFACES SEGMENTES

## Rotations
## Paramétrisation par les angles d'Euler

La rotation par les angles d'Euler s'écrit :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{pmatrix}$$

Les angles $(\alpha, \beta, \gamma)$ sont déterminés de manière unique lorsque $\beta \neq \pm\frac{\pi}{2}$. Sinon, on ne connaît que la somme ou la différence entre $\alpha$ et $\gamma$.
**R** est différentiable pour :

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in ]-\pi, \pi[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \times ]-\pi, \pi[$$

# UTILISATION DE VOLUMES OU DE SURFACES SEGMENTES

## Rotations
## Paramétrisation par les angles d'Euler

La dérivée d'une matrice orthogonale $\mathbf{R}$ par un paramètre $P$ peut s'écrire

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial p} = \boldsymbol{\Delta}_p \mathbf{R}$$

où $\boldsymbol{\Delta}_p$ est une matrice antisymétrique : $\boldsymbol{\Delta}_p = \mathbf{X}(\vec{\mathbf{s}})$
La dérivée de la matrice $\mathbf{R}$ par les angles d'Euler s'écrit

$$\delta \mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha}\delta_\alpha + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta}\delta_\beta + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \gamma}\delta_\gamma = \mathbf{X}(\vec{\mathbf{s}})\mathbf{R}$$

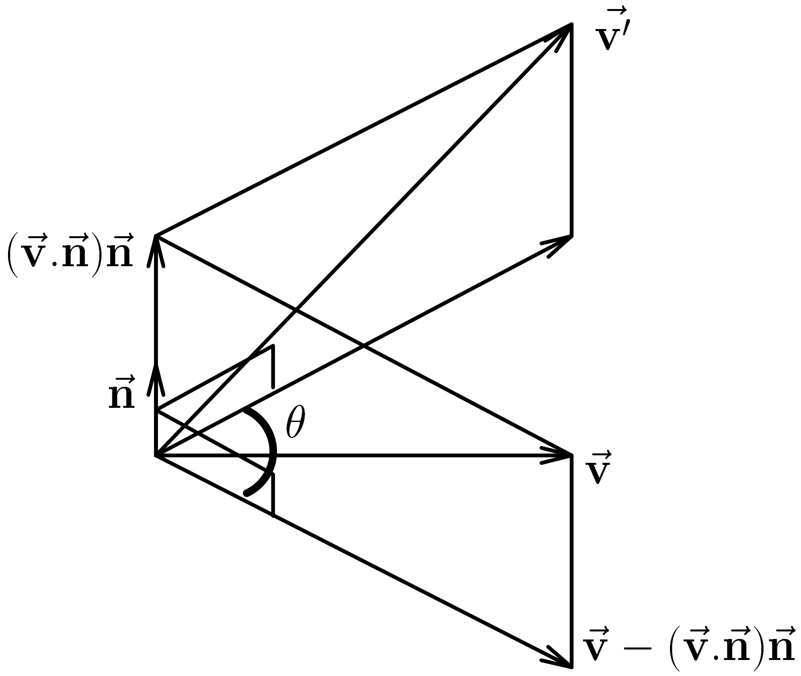
avec

$$\vec{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta \\ 1 & 0 & sin\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_\alpha \\ \delta_\beta \\ \delta_\gamma \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice précédente est égal à $-\cos\beta$.

# UTILISATION DE VOLUMES OU DE SURFACES SEGMENTES

## Rotations
## Paramétrisation par le vecteur rotation




Soit $\mathbf{X}(\vec{\mathbf{n}})$ la matrice du produit vectoriel par $\vec{\mathbf{n}}$

$$\vec{\mathbf{n}} \wedge \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{X}(\vec{\mathbf{n}})\vec{\mathbf{u}} \qquad \mathbf{X}(\vec{\mathbf{n}}) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{n}_z & \mathbf{n}_y \\ \mathbf{n}_z & 0 & -\mathbf{n}_x \\ -\mathbf{n}_y & \mathbf{n}_x & 0 \end{pmatrix}$$

Une rotation d'axe le vecteur (unitaire) $\vec{\mathbf{n}}$, d'angle $\theta$ peut être représentée par le vecteur rotation $\vec{\mathbf{r}} = \theta\vec{\mathbf{n}}$.
La matrice de rotation associée se calcule par la formule de Rodrigues :

$$\mathbf{R}(\vec{\mathbf{n}}, \theta) = \mathbf{I} + \sin\theta\mathbf{X}(\vec{\mathbf{n}}) + (1 - \cos\theta)\mathbf{X}(\vec{\mathbf{n}})^2$$

# UTILISATION DE VOLUMES OU DE SURFACES SEGMENTES

## Rotations

## Paramétrisation par le vecteur rotation

La rotation $\mathbf{R}$ est définie par le vecteur $\vec{\mathbf{r}}$ tel que $\theta = \|\vec{\mathbf{r}}\|$

$$\delta\mathbf{R} = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{r}_x}\delta_{\mathbf{r}_x} + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{r}_y}\delta_{\mathbf{r}_y} + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{r}_z}\delta_{\mathbf{r}_z} == \mathbf{X}(\vec{\mathbf{s}})\mathbf{R}$$

où $\vec{\mathbf{s}}$ se calcule à partir de $\vec{\mathbf{d}} = (\delta_{\mathbf{r}_x}, \delta_{\mathbf{r}_y}, \delta_{\mathbf{r}_z})$ par

$$\begin{aligned} s &= (\vec{\mathbf{r}}.\vec{\mathbf{d}})h(\theta)\vec{\mathbf{r}} + f(\theta)\vec{\mathbf{d}} + g(\theta)\vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{d}} \\ &= \begin{pmatrix} h(\theta)\mathbf{r}_x^2 + f(\theta) & h(\theta)\mathbf{r}_x\mathbf{r}_y - g(\theta)\mathbf{r}_z & h(\theta)\mathbf{r}_x\mathbf{r}_z + g(\theta)\mathbf{r}_y \\ h(\theta)\mathbf{r}_x\mathbf{r}_y + g(\theta)\mathbf{r}_z & h(\theta)\mathbf{r}_y^2 + f(\theta) & h(\theta)\mathbf{r}_y\mathbf{r}_z - g(\theta)\mathbf{r}_x \\ h(\theta)\mathbf{r}_x\mathbf{r}_z - g(\theta)\mathbf{r}_y & h(\theta)\mathbf{r}_y\mathbf{r}_z + g(\theta)\mathbf{r}_x & h(\theta)\mathbf{r}_z^2 + f(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{\mathbf{r}_x} \\ \delta_{\mathbf{r}_y} \\ \delta_{\mathbf{r}_z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta} \quad g(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} \quad h(\theta) = \frac{1-f(\theta)}{\theta^2}$$

Le déterminant de la matrice est non nul pour $0 \leq \theta \leq \pi$.

# UTILISATION DE VOLUMES OU DE SURFACES SEGMENTES
## Rotations
## Paramétrisation par les quaternions

Un quaternion $q = (s, w)$ avec $s \in \mathbb{R}$ et $w \in \mathbb{R}^3$. $s$ est appelé la partie *réelle* de $q$, et $w$ la partie *pure*.

- L'addition est celle de $\mathbb{R}^4$.
- La multiplication est donnée par

$$(s, w) * (s', w') = (ss' - w.w', w \wedge w' + sw' + s'w)$$

- Le conjugué d'un quaternion $q = (s, w)$ est défini par $\bar{q} = (-s, w)$
- La norme d'un quaternion est celle de $\mathbb{R}^4$

$$|q|^2 = \bar{q} * q = \|q\|^2_{\mathbb{R}^4}$$

Les rotations peuvent être représentées par les quarternions unitaires de la façon suivante : à un quaternion $q$, on associe l'application

$$p \longmapsto q * p * \bar{q}$$

La restriction de cette application à $\mathbb{R}^3$ $(s = 0)$ est une rotation de $\mathbb{R}^3$.

# UTILISATION DE VOLUMES OU DE SURFACES SEGMENTES

## Rotations
## Paramétrisation par les quaternions

Le quaternion représentant une rotation se calcule a partir du vecteur directeur unitaire $\vec{\mathbf{n}}$ de l'axe de rotation et de l'angle $\theta$ par :

$$q = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\vec{\mathbf{n}}\right)$$

La matrice de rotation $\mathbf{R}$ associée à un quaternion $q = (a, b, c, d)$ se calcule par

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & 2 + c^2 - b^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & 2 + d^2 - b^2 - c^2 \end{pmatrix}$$

# UTILISATION DE VOLUMES OU DE SURFACES SEGMENTES

## Rotations
## Paramétrisation par les quaternions

Les quaternions sont particulièrement bien adaptés pour résoudre une mise en correspondance aux moindres carrés.

> P.J. Besl and N.D. McKay. *A method for registration of 3-D shapes.* IEEE Pami 14:239-256, feb. 1992
>
> O.D. Faugeras and M. Herbert. *The representation, recognition, and locating of 3-D objects.* The international journal of robotics research 5(3):27-19, 1986.

Pour la translation nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sum \|\overrightarrow{MM'}\|^2}{\partial \mathbf{t}_x} &= 2\sum \overrightarrow{MM'}.\frac{\partial \overrightarrow{MM'}}{\partial \mathbf{t}_x} \\ &= 2\sum \overrightarrow{MM'}.\vec{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

Minimiser la translation aux moindres carrés impose donc $\sum \overrightarrow{MM'} = \vec{0}$, la translation est donc celle qui superpose les barycentres des deux nuages de points.

# UTILISATION DE VOLUMES OU DE SURFACES SEGMENTES

## Rotations
## Paramétrisation par les quaternions

Pour la rotation, il nous reste à minimiser la rotation entre les vecteurs $\overrightarrow{G'M'}$ et $\overrightarrow{GM}$, que nous noterons $p'$ et $p$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum \|p' - \mathbf{R}p\|^2 &= \sum |p' - q * p * \bar{q}|^2 \\
&= \sum |p' - q * p * \bar{q}|^2 |q|^2 \\
&= \sum |p' * q - q * p|^2
\end{aligned}$$

Or nous avons $p' * q - q * p = \mathbf{A}q$ où $\mathbf{A}$ est une matrice 4x4 dépendant de $p$ et $p'$. L'équation précédente revient donc à minimiser

$$\sum [\mathbf{A}q]^t [\mathbf{A}q] = q^t \left[\sum \mathbf{A}^t\mathbf{A}\right] q$$

soit à rechercher le vecteur propre unitaire associé à la plus petite valeur propre de $\sum \mathbf{A}^t\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
0 & p_x - p'_x & p_y - p'_y & p_z - p'_z \\
p'_x - p_x & 0 & -p_z - p'_z & p_y + p'_y \\
p'_y - p_y & p_z + p'_z & 0 & -p_x - p'_x \\
p'_z - p_z & -p_y - p'_y & p_x + p'_x & 0
\end{pmatrix}$$