UNIVERSITÉ de NICE - SOPHIA ANTIPOLIS

École Doctorale des Sciences Pour l'Ingénieur

laboratoire: **INRIA Sophia Antipolis**

THÈSE

préparée pour obtenir le titre de
Docteur en Sciences

Discipline **Informatique**
Spécialité **Traitement d'images**

par

Karl KRISSIAN

TRAITEMENT MULTI-ÉCHELLE : APPLICATIONS À L'IMAGERIE MÉDICALE ET À LA DÉTECTION TRIDIMENSIONNELLE DE VAISSEAUX.

Soutenue le 6 janvier 2000 devant un jury composé de :

Guido	**GERIG**	Rapporteurs
Isabelle	**BLOCH**	
Nicholas	**AYACHE**	Directeur
Grégoire	**MALANDAIN**	Examinateurs
Rachid	**DERICHE**	
Régis	**VAILLANT**	

INRIA de Sophia Antipolis, 10h30.

À mes parents et ma famille,

Remerciements

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont soutenu et aidé au cours de ce travail.

En premier lieu, je remercie tous les rapporteurs et les membres du jury dont m'ont fait l'honneur de lire mon travail avec intérêt et d'assister à ma soutenance.

Je remercie aussi Nicholas Ayache avec qui j'ai défini le sujet initial de ce travail et qui m'a accueilli dans son projet et permis de rencontrer d'autres chercheurs, et Grégoire Malandain qui a encadré en partie ce travail, a su faire des remarques pertinentes.

Je remercie aussi tous les autres membres du projet EPIDAURE : Hervé Delingette, Clément Forest, Sébastien Granger, Alexandre Guimond, Jean-Christophe Lombardo, Johan Montagnat, Sébastien Ourselin, Xavier Pennec, Françoise Pezé, Guillaume Picinbono, Sylvain Prima, David Rey, Alexis Roche, Maxime Sermesant, Gérard Subsol, Marie-Laure Tabary, ainsi que certains anciens : Luc Soler avec qui j'ai partagé le même bureau au début de ma thèse, Jérôme Declerck et Stéphane Cotin qui étaient les derniers survivants des translokos, Márta Fidrich dont j'ai apprécié les conseils et qui a aussi travaillé sur le traitement multi-échelle des images, Nicolas Turro et Soraya Arias du projet CHIR, Mike Brady dont l'enthousiasme est mondialement reconnu et apprécié ; Janet Bertot qui a relu certains passages en anglais, et Pascal Cachier qui partage la même passion pour certains sports nautiques.

Je remercie aussi l'équipe des techniques avancées de General Electric chez qui j'ai passé trois mois, et en particulier Régis Vaillant et Yves Trousset, qui m'ont aidés à appliquer mon travail à un problème concret et pertinent.

Je tiens aussi à remercier d'autres chercheurs avec qui j'ai eu des discussions qui, mêmes courtes, ont influencé mon travail : Rachid Deriche, Stephen Pizer, Tony Lindeberg, Joachim Weickert, Andrès Almansa, Olivier Faugeras, Luis Alvarez qui a accepté de m'accueillir pour mon service militaire dans son laboratoire à Las Palmas.

Je remercie enfin les personnes de la documentation de l'INRIA-Sophia Antipolis pour leur efficacité même en plein mois d'août et que j'ai particulièrement sollicitées pendant ma rédaction.

TRAITEMENT MULTI-ÉCHELLE : APPLICATIONS À L'IMAGERIE MÉDICALE ET À LA DÉTECTION TRIDIMENSIONNELLE DE VAISSEAUX.

Karl Krissian

INRIA, B.P. 93, F-06902 Sophia Antipolis Cedex, France.

La distinction entre la recherche appliquée et la recherche théorique est un sujet d'actualité, avec la spécialisation croissante des chercheurs. Notre travail a été motivé par un problème pratique : étudier les images tridimensionnelles de vaisseaux afin d'extraire les caractéristiques des structures tubulaires telles que les lignes centrales et d'effectuer leur quantification automatique. Un domaine du traitement des images est particulièrement adapté à ce type de problème : l'analyse multi-échelle des images. Ce domaine a évolué rapidement ces dernières années et, par l'intermédiaire des équations aux dérivées partielles, englobe des analyses linéaires et non-linéaires. Nous proposons d'utiliser la stratégie suivante : (1) réduire le bruit des images tout en préservant les structures tubulaires, à l'aide d'une diffusion anisotrope originale basée sur le flux de diffusion et utilisant les directions principales de courbure ; (2) détecter les lignes centrales des vaisseaux à l'aide d'un traitement multi-échelle linéaire, dont les paramètres sont optimisés sur un modèle de vaisseau ; (3) quantifier automatiquement l'aire des sections le long des vaisseaux, et permettre ainsi une estimation précise des sténoses. Au cours de ce travail, d'autres applications ont été envisagées et expérimentées, comme la diffusion anisotrope d'images ultrasonores. Nous espérons que cette étude, orientée vers la pratique, a pu ouvrir de nouvelles perspectives théoriques dans les domaines étudiés : équations pour la diffusion anisotrope, détection de structures à l'aide de modèles analytiques, schémas numériques pour des équations d'évolution de courbes de niveaux.

Mots clés : analyse multi-échelle, imagerie médicale, vaisseaux, diffusion anisotrope, quantification automatiques, sténoses.

MULTISCALE ANALYSIS: APPLICATIONS TO MEDICAL IMAGING AND 3D VESSEL DETECTION

Practice and theory are often considered as two distinct research fields. Our work was motived by a practical problem: studying 3D vessel images and extracting tubular structures characteristics like centerlines in order to facilitate their quantification or to quantify them automatically. A recent field in image processing is especially adapted to this problem: multiscale analysis. This field has widen from linear scale-space to nonlinear scale-space through the use of Partial Differential Equations. We propose to use the following strategy: (1) anisotropic diffusion as a pre-processing stage for reducing noise and enhancing vessels, using an original *flux-based* diffusion based on directions of principal curvatures; (2) model-based linear scale-space analysis for extracting vessels centerlines and optimizing parameters on models by analytic calculus and simulation; (3) automatic computation of the cross-section area along the vessels centerlines, allowing a precise stenosis quantification. Other applications have also been investigated during this work, like the enhancement of ultrasound images using anisotropic diffusion. We hope that this practical work can also motivate new theoretical ideas in the following fields: partial differential equations for anisotropic diffusion, automatic detection of structures based on analytic models, numerical schemes for level set equations.

Keywords: multiscale analysis, medical imaging, vessels, anisotropic diffusion, stenosis quantification.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Dans son livre intitulé "Pour l'honneur de l'esprit humain", Jean Dieudonné conçoit les mathématiques comme un art qui n'a pas besoin de l'expérience ou de la pratique pour justifier son existence. Il cite

> *... M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde.*
>
> C.G.J. Jacobi, lettre à Legrendre, 2 juillet 1830.

Le problème de la relation entre la théorie et l'application est une question d'ordre épistémologique. Il me semble que la théorie se nourrit de la pratique tout autant que la pratique de la théorie, et que les deux sont indissociables.

Si les philosophes et des scientifiques des siècles précédents s'intéressaient à la relation entre les mathématiques et la physique, l'informatique a introduit un nouvel outil qui se situe à la frontière entre la théorie et la pratique. L'informatique est, comme les mathématiques, un outil créé par l'homme et dans un but pratique : celui de faire des tâches systématiques plus rapidement que l'homme et à la place de celui-ci. La difficulté de l'informatique est donc de décrire, à l'aide d'algorithmes [1], le moyen de résoudre un problème ou de faciliter sa résolution. Ainsi, l'informatique, comme les mathématiques, a besoin de langages lui permettant de décrire ses objets et de les manipuler. Une différence fondamentale est cependant que l'informatique est limitée au plus bas niveau par la représentation physique des données alors que les mathématiques ne sont limitées que par l'imagination de l'esprit humain.

L'intelligence artificielle est une branche de l'informatique qui essaie de reproduire par le moyen de l'informatique des tâches non triviales effectuées par l'homme. Dans le domaine de la vision et du traitement d'images, de nombreux travaux s'intéressent à l'explication du processus humain de compréhension et de traitement des images. Une constatation assez courante est alors la difficulté de remplacer l'analyse experte de l'œil humain par celle d'un programme informatique, comme le traduit cette phrase souvent citée de David Marr :

> *The common almost despairing feeling of the early investigators (...) was that pratically anything could happen in an image and furthermore that pratically everything did.*

1. l'origine du mot algorithme vient du nom de l'algébriste Al-Khwārizmi (IX^{e} siècle).

David Marr, Vision.

Les images traitées en vision sont complexes en raison d'artefacts introduits par leur acquisition : bruit, flou, biais ; de phénomènes liés au type d'image traité : occlusion dans les images photographiques, proximité des structures anatomiques dans les images médicales ; ou en raison de la complexité même des objets représentés par l'image (par exemple, les ramifications des réseaux vasculaires).

Face à cette complexité des images, l'analyse humaine reste souvent la référence permettant par exemple de juger de la qualité d'un algorithme de segmentation ou de restauration des images. Cependant, nous pouvons distinguer deux moyens de quantifier l'efficacité d'un algorithme en traitement d'images. Le premier est l'expérimentation de l'algorithme sur des images synthétiques, incluant les principales difficultés des images réelles, et de difficulté croissante. Le second est de comparer le résultat obtenu avec celui obtenu par un expert.

Nous présentons dans la suite de cette introduction le problème pratique étudié, nos contributions, ainsi que le plan de ce manuscrit.

Problème pratique et contributions

Le problème pratique que nous proposons de traiter dans cette thèse est celui de la détection et de la quantification de structures vasculaires dans des images tridimensionnelles. Il s'agit donc d'une part d'obtenir une représentation tridimensionnelle robuste du réseau vasculaire étudié, et d'autre part de quantifier avec précision la taille des pathologies pour aider au diagnostic médical. L'information des lignes centrales est essentielle pour cette représentation car elle contient l'information arborescente (connaissance des jonctions) du réseau vasculaire et la position spatiale des centres des vaisseaux. La détection des informations s'effectue à partir des images acquises. Plusieurs modalités d'acquisition sont utilisées en fonction du type d'organe ou de la pathologie recherchée. Nous nous intéressons spécifiquement au cas des images tridimensionnelles, pour lesquelles il est plus difficile pour le médecin d'appréhender le degré de pathologie. Nous chercherons à développer des méthodes de détection indépendantes de la modalité d'acquisition utilisée. Une comparaison des différentes modalités utilisées pour l'acquisition de réseaux vasculaires est présentée dans [Verdonck, 1996]. Les méthodes développées devront être robuste par rapport au bruit ou à la texture des images, par rapport à l'intensité des vaisseaux et à la variation de cette intensité en fonction de la taille des vaisseaux.

Intérêt médical

Ce problème possède de nombreuses applications médicales car la localisation précise des vaisseaux sanguins et la quantification de leurs sections sont des informations utiles pour de nombreuses applications médicales.

Les *opérations du foie*, présentées dans la thèse de Luc Soler [Soler, 1998]. En particulier, l'exérèse [2] d'une partie du foie se base sur un découpage du foie en 8 segments, ces segments représentant la distribution du réseau vasculaire de la veine porte.

Les *opérations sur les anévrismes.* Dans [Payot et al., 1996], une présentation générale de l'imagerie vasculaire cérébrale est donnée. En particulier, l'auteur justifie l'intérêt de la communauté médicale pour l'amélioration du diagnostic des troubles vasculaires cérébraux et de leurs traitements par le nombre élevé d'accidents vasculaires cérébraux ayant lieu chaque année en France (environ 150 000), faisant de ce problème la troisième cause de mortalité.

Les *opérations de sténoses.* Une sténose est un rétrécissement de la section d'un vaisseau, pouvant perturber l'écoulement normal du sang. Le praticien a besoin d'une mesure précise du degré de sténose pour décider de la solution thérapeutique : selon le degré de pathologie, la solution peut varier entre aucun traitement pour les faibles pathologies et un traitement endo-vasculaire (angioplastie ou placement de stents) à chirurgical pour les pathologies importantes. Le problème de l'opération des sténoses se pose pour différents organes de l'organisme tels que le cœur irrigué par les artères coronaires, l'abdomen ou le cerveau irrigué par les carotides.

Contributions

État de l'art Nous présentons dans ce manuscrit un état de l'art sur traitement multi-échelle linéaire et non-linéaire des images, sur la restauration d'images à l'aide d'équations de diffusion anisotropes, ainsi que sur la détection multi-échelle linéaire des lignes centrales de vaisseaux.

Diffusion anisotrope Nous introduisons une équation de diffusion anisotrope adaptée aux vaisseaux dans les images tridimensionnelles. Cette équation se base sur un flux de diffusion multi-directionnel. L'équation de diffusion anisotrope s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},0) &= u_0(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= div(\mathbf{F}). \end{aligned}$$

où le flux de diffusion $\mathbf{F}$ est un champ de vecteurs qui se décompose de la manière suivante, dans la base orthogonale normée $(\xi^*,\mathbf{e}_1^*,\mathbf{e}_2^*)$, ξ^* étant la direction du gradient lissée, $\mathbf{e}_1^*$ et $\mathbf{e}_2^*$ les directions de courbure maximale et minimale de l'image lissée :

$$\mathbf{F} = \varphi_1(u_{\xi^*})\,\xi^* + \varphi_2(u_{\mathbf{e}_1^*})\,\mathbf{e}_1^* + \varphi_3(u_{\mathbf{e}_2^*})\,\mathbf{e}_2^*.$$

et $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ sont trois fonctions de diffusion. La figure 1 [3] montre un résultat de cette diffusion sur une image du réseau vasculaire du foie. Les fonctions de diffusion utilisées sont adaptées aux structures tubulaires : φ_1 a un effet de lissage en-dessous d'un seuil et de rehaussement du contraste

2. Ablation chirurgicale d'une partie inutile ou nuisible à l'organisme, ou d'un corps étranger.

3. Les vues en coupe et les projections MIP présentées dans ce manuscrit ont été générées par un programme de visualisation de l'auteur, dont l'exécutable est disponible sous différentes architectures à l'adresse suivante : http://www-sop.inria.fr/epidaure/personnel/Karl.Krissian/InrView/InrView.html.

au delà de ce seuil, $\varphi_2 = 0$ et $\varphi_3(u_{\mathbf{e}_2^*}) = u_{\mathbf{e}_2^*}$ afin de privilégier la diffusion dans la direction de courbure minimale.

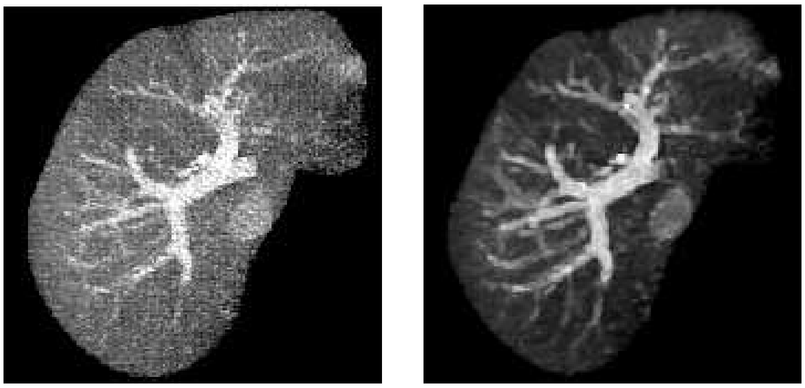


FIG. 1 – *Diffusion anisotrope sur une image scanner du foie, vue MIP.*

Détection des lignes centrales de vaisseaux Nous proposons une méthode de détection automatique des lignes centrales des vaisseaux. Des calculs analytiques sur des *modèles de vaisseaux*, rectilignes à section circulaire ou elliptiques et toriques à section circulaire, nous permettent de mieux comprendre et interpréter les valeurs propres et les vecteurs propres de la *matrice hessienne* de l'image. Ces informations permettent de présélectionner des candidats pour les centres des vaisseaux et de fournir un repère dans le plan de la section des vaisseaux. Les *paramètres* de notre algorithme sont ensuite optimisés pour un modèle de vaisseau rectiligne à section gaussienne. Une série d'*expériences* sur des images synthétiques contenant des jonctions, des tangences, et un calcul sur un nouveau modèle de section "barre-convolué" permettent d'améliorer la détection dans des cas difficiles. La figure 2 présente un résultat de détection des lignes centrales des vaisseaux sur une image obtenue par reconstruction 3D à partir d'angiographies 2D par rayons X.

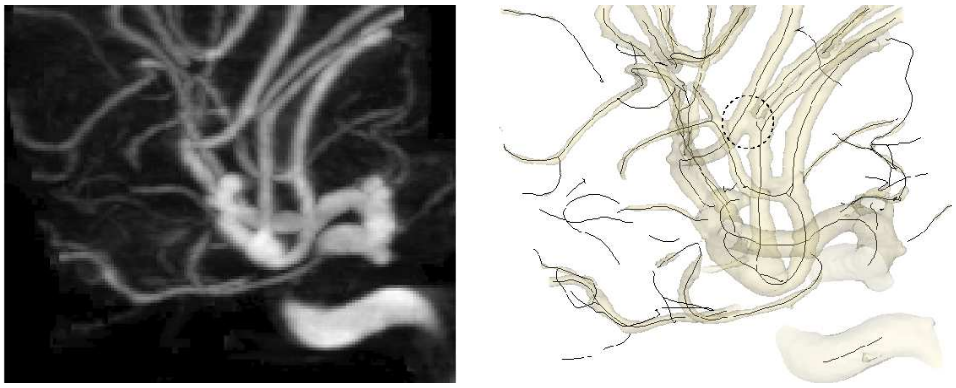
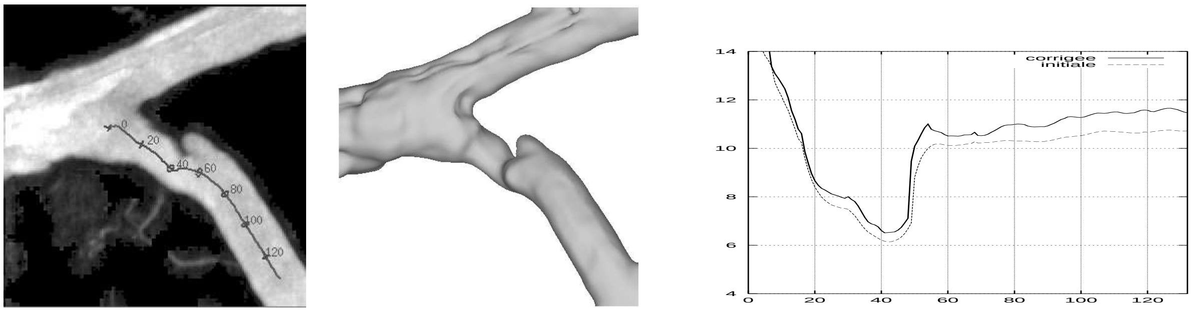


FIG. 2 – *Détection de lignes centrales*

Quantification automatiques des sténoses en 3D Une méthode de quantification automatique et tridimensionnelle de la section des vaisseaux le long des lignes centrales est proposée. Cette méthode utilise les lignes centrales extraites par l'algorithme présenté précédemment afin de choisir un contour des vaisseaux parmi les isosurfaces d'intensité zéro de la dérivée seconde de l'image dans la direction du gradient. Une correction automatique de l'aire de la section est ensuite effectuée en utilisant les propriétés multi-échelles d'un modèle de vaisseaux à section circulaire de type barre-convolué. La précision obtenue sur des structures de différentes tailles dans une image de fantôme est de l'ordre de 1/4 de voxel en moyenne pour le rayon des structures. La figure 3 présente un exemple d'estimation de l'aire des sections sur une image réelle d'iliaque, contenant une forte sténose.



(a) Ligne choisie pour la quantification.

(b) Vue surfacique du contour choisi.

(c) diamètre de vaisseau associé (en mm) en fonction de l'abscisse curviligne.

FIG. 3 – *Résultats sur une image d'iliaques (abdomen).*

Autres contributions Deux autres contributions sont présentées dans les chapitres 2 et 14. La *première* concerne la compréhension du schéma numérique proposé par Osher et Sethian dans le cadre des équations d'Hamilton-Jacobi appliquées aux courbes de niveaux et l'explication du meilleur comportement d'un autre schéma numérique, proposé indépendamment par Brockett et Maragos. La *deuxième* concerne l'utilisation de la diffusion anisotrope pour la restauration d'images ultrasonores et la comparaison des résultats de restauration obtenus par la diffusion anisotrope et par un processus de filtrage couramment utilisé dans les images ultrasonores.

Organisation du manuscrit

Ce manuscrit est organisé en quatre parties.

Première partie La première partie introduit le domaine du traitement multi-échelle des images. Un état de l'art du traitement multi-échelle à la fois linéaire et non-linéaire est présenté à travers une axiomatique proposée par Alvarez, Guichard, Lions, Morel. Un deuxième chapitre est consacré aux schémas numériques associés aux équations d'Hamilton-Jacobi. Ce chapitre a l'intérêt de présenter un exemple d'approximation discrète d'équations écrites dans le cadre de fonctions continues. Nous présentons ensuite quelques outils mathématiques des analyses multi-échelles linéaires.

Deuxième partie La deuxième partie de ce manuscrit est consacrée à une analyse multi-échelle non-linéaire particulière : la diffusion anisotrope, et à son application pour la restauration des images vasculaires tridimensionnelles. Nous donnons dans un premier temps un état de l'art sur la restauration des images par la diffusion anisotrope, en présentant une approche variationnelle, la diffusion anisotrope scalaire et matricielle, le choix des paramètres, des schémas numériques associés et quelques applications. Nous développons dans un deuxième chapitre de nouveaux résultats permettant de réécrire l'équation de diffusion anisotrope dans un repère orthogonal normé lié à la structure locale des images. Nous introduisons alors une nouvelle équation utilisant un flux de diffusion multi-directionnel et nous proposons une écriture variationnelle faisant intervenir ce flux de diffusion. Les deux derniers chapitres sont consacrés à l'utilisation de la diffusion anisotrope avec un flux de diffusion multi-directionnel dans le repère (ξ,e_1,e_2) correspondant au vecteur gradient normé et aux directions de courbures principales. Nous proposons de privilégier la diffusion dans la direction de plus faible courbure pour mieux lisser les structures tubulaires dans des images 3D. Une étude expérimentale est présentée sur des images synthétiques et sur des images réelles de vaisseaux du foie et du cerveau.

Troisième partie La troisième partie traite du problème de la détection des lignes centrales des vaisseaux et non plus de la restauration. La diffusion anisotrope peut alors être utilisée comme pré-traitement afin de réduire la texture ou le bruit des images. L'extraction des lignes centrales de structures tubulaires est classiquement réalisée à l'aide d'une analyse multi-échelle linéaire mettant en œuvre une fonction de réponse. La fonction de réponse est choisie de manière à mettre en évidence le centre des structures dont la taille dépend de l'échelle utilisée. Nous donnons dans l'introduction un état de l'art sur l'extraction des structures vasculaires à l'aide d'un traitement multi-échelle linéaire. Une étude mathématique de la détection des lignes centrales passe par une modélisation des vaisseaux. Nous présentons donc les différents modèles tridimensionnels de vaisseaux que nous utilisons. Ces modèles sont utilisés pour mieux comprendre le lien entres les caractéristiques extraites de l'image et la structure géométrique ou le centre des vaisseaux. Ainsi, nous calculons les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice Hessienne sur des modèles rectiligne, torique et elliptique de vaisseaux. Nous introduisons ensuite une méthode de détection des lignes centrales basée sur le choix d'une nouvelle fonction de réponse. Les paramètres de notre méthode sont adaptés et optimisés pour un modèle vaisseau rectiligne à section gaussienne, grâce à des calculs analytiques. Une série d'expériences est ensuite réalisée afin de gérer les situations “difficiles” telles que les sections non gaussiennes, les tangences et les jonctions de vaisseaux et les variations rapides de la taille des sections. Nous présentons enfin des résultats sur une image de fantôme et sur des images réelles de vaisseaux du cerveau acquises par rayons X ou par IRM angiographique.

Quatrième partie La dernière partie de ce manuscrit est orientée vers des applications plus directes de nos travaux. Nous présentons une méthode de quantification automatique de l'aire des sections des vaisseaux, basée sur la connaissance de lignes centrales et une détection tridimensionnelle des contours. Ce travail a été réalisé au cours d'un stage de trois mois au sein de l'équipe des techniques avancées de General Electric Medical Systems à Buc. Une étude de la précision du résultat obtenu est réalisée sur des images synthétiques et sur une image de fantôme. Une méthode de correction de la surface estimée est proposée, à l'aide d'un modèle de vaisseau circulaire convolué par un noyau gaussien. Nous présentons aussi des résultats obtenus sur huit images contenant des sténoses.

Enfin, nous présentons aussi dans un dernier chapitre une application de la diffusion anisotrope pour la restauration des images ultrasonores. Cette étude a été réalisée dans le cadre d'un contrat avec l'entreprise Nycomed, leader mondial dans la fabrication des produits de contraste. Afin de mettre en évidence l'intérêt d'utiliser des produits de contraste dans les images ultrasonores, nous avons proposé d'améliorer la qualité de ces images à l'aide d'une diffusion anisotrope. Nous comparons les résultats obtenus par une diffusion anisotrope et ceux obtenu avec une méthode de minimisation aux moindres carrés classiquement utilisée dans les images ultrasonores. Nous montrons l'intérêt d'utiliser une diffusion anisotrope pour ce type d'image contenant un bruit particulier et aussi l'intérêt de combiner la diffusion anisotrope avec une technique de recalage des images séquentielles.

La partie III, le chapitre 14, ainsi que les annexes C, D, E, et G sont écrits en anglais car ils sont issus de travaux publiés dans cette langue.

Première partie

Quelques notions sur le traitement multi-échelle

Chapitre 1

Introduction

Le traitement multi-échelle est devenu un domaine à part entière et incontournable en traitement d'images. Il est l'objet de plusieurs ouvrages [Lindeberg, 1994; Ter Haar Romeny, 1994; Weickert, 1998]. Dans cette partie, nous introduisons quelques notions sur le traitement multi-échelle des images, et en particulier les notions qui nous seront utiles dans les parties suivantes. Dans le contexte du traitement d'images, nous parlerons d'analyse ou traitement multi-échelle ou de représentation multi-échelle. La notion de traitement multi-échelle est liée à un *concept physique*:

> *Effectuer une observation physique signifie qu'une quantité physique est mesurée à l'aide d'un système d'acquisition et avec certaines ouvertures ... Ce concept d'avoir une série de mesures en utilisant des ouvertures de tailles physiques différentes correspondant à des échelles différentes est appelé une mesure multi-échelle des données.*
>
> [Ter Haar Romeny, 1994]

Dans le cadre du *traitement d'images*, les structures à une échelle *grossière* doivent constituer une *simplification* des structures à une échelle *fine*.

Parmi les différentes représentations multi-échelles, nous distinguons celles pour lesquelles le paramètre d'échelle est représenté sous forme discrète (représentation pyramidale, "quad-tree") et celles pour lesquelles il est continu (traitement multi-échelle linéaire et non-linéaire).

Représentation discrète de l'échelle Les représentations sous la forme de *quad-tree* [Klinger, 1971; Tanimoto et Klinger, 1980] et sous la forme *pyramidale* [Burt, 1981; Crowley, 1981] ont les avantages de réduire la quantité d'information stockée pour représenter l'image à des échelles élevées. Cependant, elles ne possèdent pas certaines propriétés d'invariance qui semblent naturelles comme par exemple l'invariance par translation pour la représentation pyramidale, et elles sont peu adaptées aux formes des objets.

Traitement multi-échelle linéaire Weickert [Weickert, 1998; Weickert et al., 1997] présente dans son livre un récapitulatif de l'axiomatique du traitement multi-échelle gaussien continu, où il met en avant les travaux pionniers issus du Japon [Iijima, 1959; Iijima, 1962; Iijima, 1963; Iijima, 1971; Otsu, 1981]. Il présente aussi les apports d'autres travaux pionniers dans ce domaine [Koenderink, 1984; Yuille et Poggio, 1986; Babaud et al., 1986; Lindeberg, 1990; Florack et al., 1992; Alvarez et al., 1993; Pauwels et al., 1995; Nielsen et al., 1997; Lindeberg, 1997a; Florack, 1996].Nous présentons ici les idées directrices des travaux de Witkin et de Koenderink qui sont à la base de cette théorie.

Filtrage multi-échelle [Witkin, 1983] : Witkin [Witkin, 1983] a introduit le terme de filtrage multi-échelle et proposé une méthode d'analyse de l'image dans ce contexte. Il constate une ambiguïté introduite par la notion d'échelle. Le processus physique de génération des images agit sur une multitude d'échelles, dont aucune n'est intrinsèquement plus intéressante ou plus importante. Witkin propose donc de faire varier le paramètre d'échelle de manière continue, de suivre les extrema locaux, et d'identifier les points singuliers pour lesquels de nouveaux extrema apparaissent. Le suivi multi-échelle des extrema peut se faire des échelles élevées vers les échelles faibles (*coarse-to-fine tracking*). Cette proposition est justifiée par deux propriétés de l'évolution multi-échelle de l'image :

- une simplification de l'image,
- une délocalisation des extrema.

L'approche proposée est donc d'utiliser les échelles élevées pour identifier les structures et de suivre ces structures jusqu'aux échelles fines pour obtenir leur localisation précise. Une *représentation arborescente* de l'analyse multi-échelle de l'image permet ensuite d'identifier et de suivre les structures intéressantes.

Principe de causalité et noyau gaussien [Koenderink, 1984] : Koenderink définit les échelles "intérieure" et "extérieure". L'échelle "intérieure" (*inner scale*) correspond à la résolution de l'image, et à la plus petite échelle que l'on peut utiliser. L'échelle "extérieure" (*outer scale*) correspond à la taille de l'image. Certains travaux [Hay et Chesters, 1977] essayent de comprendre le fonctionnement de l'œil et du cerveau humain dans l'analyse et la compréhension des images, et constatent que

> *l'œil humain semble posséder l'aptitude extraordinaire de se focaliser sur le bon intervalle d'échelles.*
>
> [Koenderink, 1984]

Le principe de *causalité*, introduit par Koenderink, stipule que les caractéristiques de l'image à une échelle grossière sont toujours issues de ces caractéristiques à une échelle plus fine :

> *Any feature at a coarse level of resolution is required to possess a (not necessarily unique) cause at a finer level of resolution although the reverse need not be true.*
>
> [Koenderink, 1984]

Koenderink applique ce principe aux extrema de l'image pour en déduire l'unicité de l'équation de la chaleur. Le concept de causalité est aussi étudié dans [Yuille et Poggio, 1986; Hummel et Moniot, 1989; Lindeberg, 1994].

Traitement multi-échelle non-linéaire Le traitement multi-échelle non-linéaire englobe un ensemble de traitements des images qui peuvent s'écrire sous la forme d'une équation aux dérivées partielles non linéaire. Parmi ces techniques, nous distinguons la diffusion anisotrope, la morphologie mathématique, et les méthodes utilisant l'évolution des courbes de niveaux.

L'équation de diffusion anisotrope a été introduite par Perona et Malik [Perona et Malik, 1990]. Cette équation est dérivée de l'équation de la chaleur et peut s'interpréter comme un transfert de matière dans un milieu non homogène. Un état de l'art sur ce traitement sera présenté dans le chapitre 5 partie II.

La morphologie mathématique est habituellement décrite à l'aide de la théorie des ensembles [Serra, 1982; Haralick et al., 1987; Heijmans, 1995]. Des travaux récents proposent de formuler ce domaine sous la forme d'une analyse multi-échelle [Brockett et Maragos, 1994; Van Den Boomgaard, 1992; Arehart et al., 1993; Jackway, 1992; Jackway et Deriche, 1996; Alvarez et al., 1993].

L'utilisation des courbes de niveaux dans le domaine du traitement d'images a été proposé par Sethian [Sethian, 1996]. Une équation aux dérivées partielles permet de faire évoluer les isovaleurs (isocontours en 2D, isosurfaces en 3D) de l'image. Des méthodes numériques adaptées à ce type d'équations ont été proposées [Osher et Sethian, 1988; Sethian, 1985; Sethian, 1996], ainsi que de nombreuses applications dans le cadre de la segmentation de structures anatomiques [Malladi et al., 1995; Malladi et al., 1996; Zeng et al., 1998], de restauration d'images et de recherche de parcours optimal en robotique [Sethian, 1996].

Organisation de cette partie Dans cette partie, nous présentons *en premier lieu* l'axiomatique multi-échelle proposée par Alvarez, Guichard, Lions et Morel [Alvarez et al., 1993]. Cette axiomatique permet de dériver des équations aux dérivées partielles en fonction de leurs propriétés et englobe la plupart des travaux précédents sur le traitement multi-échelle. De plus, de nouvelles équations sont introduites, vérifiant par exemple une invariance par projection (ou invariance affine). Un *deuxième chapitre* se focalise sur la compréhension de l'approximation des équations d'Hamilon-Jacobi utilisées pour les courbes de niveaux (level sets). Cette étude nous permet de justifier par des arguments théoriques et de vérifier expérimentalement les meilleures propriétés d'une approximation proposée par Brockett et Maragos par rapport au schéma classique de Osher et Sethian. Dans un *troisième chapitre*, nous présentons des résultats sur le traitement multi-échelle linéaire, avec en particulier différentes propriétés du noyau gaussien et la normalisation des dérivées proposée par Lindeberg et qui servira pour la détection de lignes centrales des vaisseaux dans la partie III.

Notations

Dans cette partie, les notations suivantes seront utilisées :

	Définition de l'image :
n	dimension de l'image,
$\mathbb{R}$	ensemble des réels,
x	un vecteur de $\mathbb{R}^n$ ou un point de l'image,
$u(t,x)$	fonction intensité de l'image, fonction de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$,
$u_0 = f$	image initiale,

	Opérateurs différentiels :
Du	vecteur gradient de l'image u,
D^2u	hessien de l'image u,
t	échelle,
T_t	famille de transformation de paramètre $t \geq 0$,
o	opérateur de composition: $AoB(x) = A(B(x))$,
$\mid Du \mid$	est la norme du gradient de l'image u,
S^n	est l'ensemble des matrices symétriques de dimension $n \times n$,
$curv(u)$	est la courbure moyenne de l'isosurface de l'image au point considéré,

Chapitre 2

Axiomes et équations aux dérivées partielles [Alvarez et al., 1993]

Dans ce chapitre, nous présentons l'axiomatique multi-échelle proposée par Alvarez, Guichard, Lions et Morel. Cette axiomatique englobe la plupart des travaux précédents sur le traitement multi-échelle. De plus, de nouvelles équations sont introduites, vérifiant par exemple l'invariance par projection (ou invariance affine).

Dans cette partie, nous reprenons le travail d'Alvarez, Guichard, Lions, Morel [Alvarez et al., 1993], pour rappeler quelques axiomes de la théorie multi-échelle ainsi que les équations qui en découlent. La plupart de ces axiomes sont "naturels" et ont déjà été proposés ou étudiés dans la littérature [Asada et Brady, 1986; Mackworth et Mokhtarian, 1986; Serra, 1982]. La nouveauté de cette approche et de proposer un formalisme mathématique général, qui englobe une grande partie des analyses multi-échelles proposées, et d'en déduire de nouvelles équations aux dérivées partielles. Ce travail théorique remarquable mérite cependant d'être regardé d'un point de vue pratique et appliqué. La question qui vient naturellement en lisant cette approche axiomatique est celle du bien fondé des axiomes par rapport aux besoins pratiques du traitement d'images, et dans notre cas du traitement des images médicales. Cet intérêt pratique et appliqué a été à la base des idées des travaux fondateurs de Witkin et de Koenderink. Ce lien entre la pratique et la théorie vis-à-vis des axiomes est lié à l'acquisition et aux modalités d'acquisition des images :

- indépendance du traitement de l'image par rapport à la position de l'appareil d'acquisition : translation, rotation, zoom ;
- indépendance ou robustesse par rapport au bruit ;
- indépendance par rapport à la modalité d'acquisition, qui est plus difficile à obtenir, mais qui peut s'exprimer en partie par une invariance par changement des niveaux de gris (dans le cas des images photographiques, invariance en fonction de l'éclairage de la scène).

L'énoncé de ces propriétés nous amène naturellement à envisager une application du traitement multi-échelle peu discutée : le *recalage d'image*. De la même manière que la détection des contours gagne à être traitée à plusieurs échelles ("coarse-to-fine tracking"), le recalage entre différentes images peut bénéficier de la même stratégie [Maintz, 1996; Wells et al., 1996; Thévenaz et Unser, 1997].

Dans ce chapitre, nous présentons dans une première partie l'axiomatique introduite par Alvarez et al. [Alvarez et al., 1993], qui distinguent les axiomes hiérarchiques et morphologiques. Ensuite, nous présentons les principaux résultats obtenus et les propriétés axiomatiques des équations aux dérivées partielles telles que l'équation de la chaleur, les opérations morphologiques d'érosion et de dilatation, l'équation de Perona et Malik de diffusion anisotrope, et les équations d'invariance morphologique euclidienne et affine.

2.1 Axiomes

Les auteurs distinguent deux types d'axiomes : les axiomes liés à l'approche multi-échelle ou axiomes hiérarchiques, et les axiomes dit morphologiques. Une "analyse multi-échelle" est définie par une famille de transformations $(T_t)_{t\geq 0}$ qui, appliquées à une image initiale f, donnent une famille d'images $u(t,x) = (T_t f)(x)$. Ils montrent que sous certaines hypothèses raisonnables sur T_t, la séquence d'images obtenue est solution d'une équation aux dérivées partielle (EDP) du deuxième ordre :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(D^2u,Du,t) \text{ avec } u(0,x) = f(x),$$

D^2u étant le hessien de l'image u et Du son gradient.

2.1.1 Axiomes hiérarchiques

L'axiome dit de récursivité ou encore la propriété de semi-groupe énonce qu'une image obtenue à une échelle $s+t$ correspond à appliquer l'opérateur d'échelle T_s à l'image obtenue à l'échelle t. Cela se traduit par un morphisme entre l'ensemble $\mathbb{T}$ des opérateurs muni de l'opération de composition o et l'ensemble des réels munis de l'addition :

DÉFINITION 1 (PROPRIÉTÉ DE SEMI-GROUPE OU AXIOME DE CAUSALITÉ) *:*

$$\forall s,t \geq 0, \forall f, T_0(f) = f \qquad T_s o T_t(f) = T_{s+t}(f)$$

Une version plus faible de cet axiome est l'axiome dit de *causalité*, qui implique qu'il existe un opérateur de transition $T_{t+s,s}$ qui appliqué à T_s donne T_{t+s}. Rappelons que le terme de causalité a été introduit par Koenderink, et traduit, pour une caractéristique de l'image à une échelle donnée, la présence d'une cause à une échelle plus petite. Les auteurs introduisent aussi la notion de *générateur* associé à T_t, qui peut être interprété comme une dérivée en 0 de T_t en fonction de l'échelle t.

DÉFINITION 2 (GÉNÉRATEUR) *:*

Pour une fonction u lisse, le générateur $A[u]$ associé à une famille de transformations T_t est défini par la limite de $(T_h u - u)/h$ lorsque h tend vers 0^+ :

$$A[u] \;=\; \lim_{h \to 0^+} \frac{T_h(u) - u}{h}$$

C'est cette notion de générateur qui permet de faire le lien entre les axiomes et les équations aux dérivées partielles : le générateur représente la dérivée de l'évolution de l'image par rapport à l'échelle.

Deux autres axiomes dits de *régularité* et de *localité* sont introduits, le premier permet d'assurer une continuité de l'opérateur T utile pour montrer l'existence d'un générateur, le deuxième axiome impose à l'opérateur T de ne dépendre que du comportement local de la fonction u.

2.1.2 Axiome de comparaison

L'*axiome de comparaison* ou encore le principe de maximum implique que l'image initiale est simplement lissée et non rehaussée, c'est-à-dire que si une image u est en tout point supérieure à une image v, elle le reste pour toute échelle.

2.1.3 Axiomes morphologiques

Les axiomes dit “morphologiques” sont liés d’une part à une indépendance de l’analyse multi-échelle de l’image en fonction du niveau d’intensité, mais aussi en fonction de transformations isométriques (translation, rotation) de l’image ou même de changement d’échelle ou de projection de l’image. Les invariances par transformation de l’intensité sont exprimées par deux axiomes.

Définition 3 (Invariance par décalage de niveaux de gris) *:*

$$\forall u, \forall C \in \mathbb{R}, T_t(0) = 0, \quad T_t(u + C) = T_t(u) + C.$$

Une version plus forte de cette propriété est l’invariance des niveaux de gris par application d’une fonction réelle croissante.

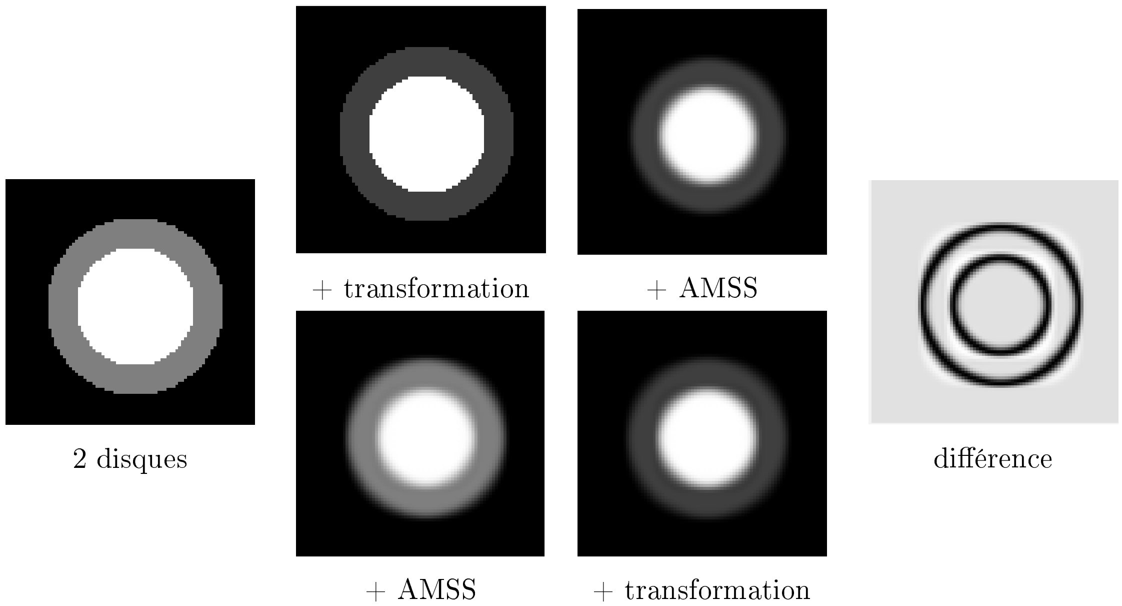


Fig. 2.1 – *Illustration de l’invariance par changement de niveaux de gris. Les intensités des 2 disques de l’image initiale valent 100 et 200. Le changement d’intensité $I' = transf(I)$ est l’application de la fonction croissante $h(x) = x^2/200$ à l’intensité de l’image. L’image de la différence entre $AMSS(transf(I))$ et $transf(AMSS(I))$ est comprise entre -12 et +2.*

Définition 4 (Invariance par changement de niveaux de gris) *:*

$$\forall u, \forall t \geq 0, \forall h \ \textit{ fonction réelle monotone croissante }, \quad T_t(h(u)) = h(T_t(u))$$

La figure 2.1 illustre cette invariance. Dans cette figure, AMMS (Affine Morphological Scale Space) représente l’analyse multi-échelle définie dans la section 2.2.5, invariante par transformation affine et par changement de niveaux de gris.
L’opérateur T_t est dit *invariant par translation* si et seulement si pour toute translation τ, et toute

image u,

$$T_t(\tau \; o \; u) \;=\; \tau \; o \; T_t(u).$$

De même, les auteurs définissent l'*invariance par rotation*, illustrée par la figure 2.2.

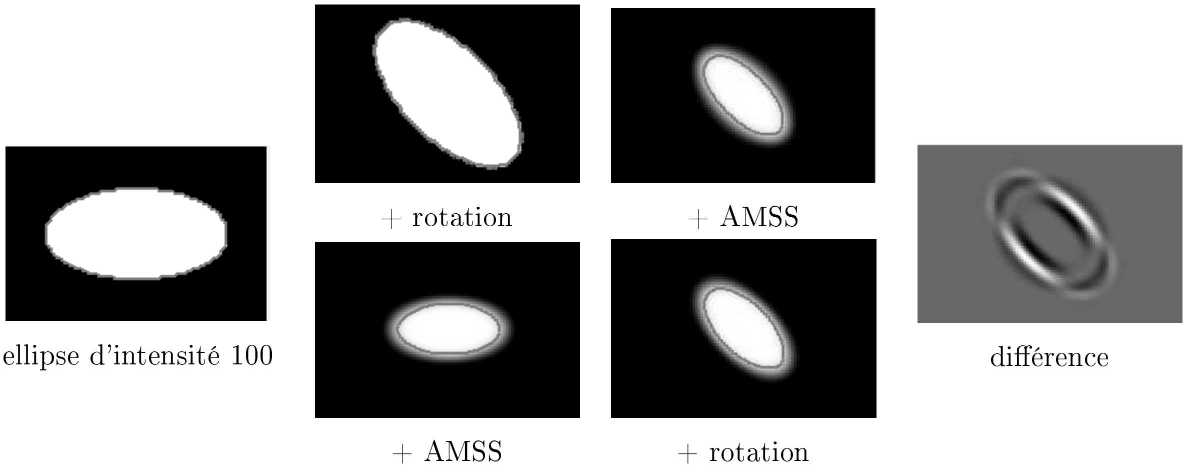


FIG. 2.2 – *Illustration de l'invariance par rotation. L'isocontour d'intensité 80 est représenté. L'image de la différence entre $rot(AMSS(I))$ et $AMSS(rot(I))$ est comprise entre -8 et +12.*

De manière générale, Alvarez et al. définissent aussi l'*invariance par changement d'échelle* en définissant un opérateur de changement d'échelle de facteur $\lambda \in \mathbb{R}$ par $D_\lambda f(x) = f(\lambda x)$. L'analyse multi-échelle est dite *invariante par changement d'échelle* si pour toute échelle t et tout facteur λ, il existe une échelle t' telle que $D_\lambda T_{t'} = T_t D_\lambda$ Elle est dite *invariante par projection* si pour toute

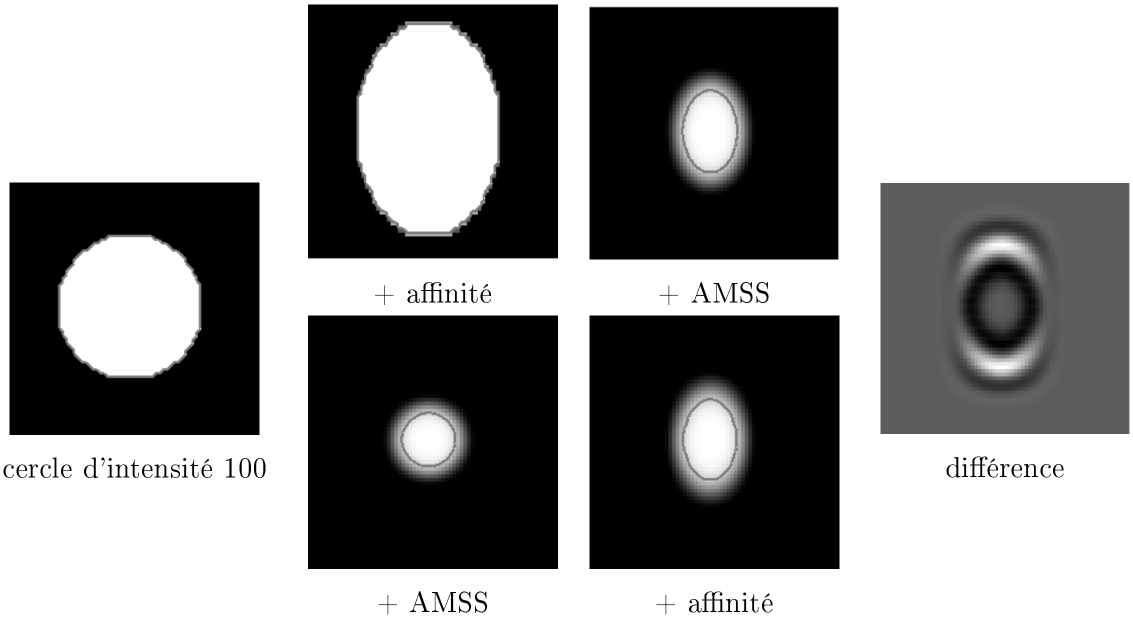


FIG. 2.3 – *Illustration de l'invariance par projection. L'isocontour d'intensité 80 est représenté. L'image de la différence entre $AMSS(proj(I))$ et $proj(AMSS(I))$ est comprise entre -4 et 7.*

transformation linéaire A, en posant $Af(x) = f(Ax)$, et pour toute échelle t, il existe une échelle t' telle que $AT_{t'} = T_tA$. Cette invariance est illustrée par la figure 2.3.

2.2 Théorèmes

Dans un premier temps, l'existence d'un générateur est démontrée pour une analyse multi-échelle satisfaisant les axiomes suivants : [Invariance par Translation], [Principe de Comparaison], [Invariance par décalage des niveaux de gris], [semi-groupe]. Sous certaines contraintes de régularité et de continuité, ce générateur peut s'exprimer sous la forme

$$A_t[u] = F(D^2u,Du,t)$$

où F est une fonction de $S^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, S^n désignant l'ensemble des matrices symétriques de dimension $n \times n$. F vérifie en outre

$$\forall p \in \mathbb{R}^n,\ A,B \in S^n,\ A \geq B \quad F(A,p,t) \geq F(B,p,t),$$

où $A \geq B$ signifie que $A - B$ est définie positive.
L'*équation de la chaleur* est alors déduite comme étant l'unique analyse multi-échelle linéaire et invariante par isométrie. Nous rappelons que l'équation de la chaleur s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(0,x) &= u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u \ = \ trace(D^2u), \end{aligned}$$

le générateur associé à cette équation est $A_t[u] = F(D^2u,Du,t) = trace(D^2u)$. Nous montrerons dans le paragraphe 4.3 que l'évolution de l'équation de la chaleur jusqu'à une échelle t et à partir d'une image initiale u_0 est équivalente à convoluer l'image avec une fonction gaussienne dont l'écart-type dépend de t.

2.2.1 Opérations morphologiques

La morphologie mathématique est habituellement décrite en termes de la théorie des ensembles [Serra, 1982; Haralick et al., 1987; Heijmans, 1995]. Des travaux récents proposent de formuler ce domaine sous la forme d'une analyse multi-échelle [Brockett et Maragos, 1994; Van Den Boomgaard, 1992; Arehart et al., 1993; Jackway, 1992; Jackway et Deriche, 1996]. Les opérations morphologiques de base sont la dilatation et l'érosion, les auteurs montrent qu'elles s'intègrent dans l'axiomatique proposée.
Nous définissons dans un premier temps ces opérations. Soit B un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, appelé *élément structurant*. Soit $t \geq 0$ le paramètre d'échelle. La dilatation à l'échelle t d'une fonction f avec un élément structurant B est définie par

$$D_tf(x) = sup\ \{f(y),\ y - x \in tB\}$$

Et de la même manière, l'érosion est définie par

$$E_t f(x) = inf \ \{f(y), \, y - x \in tB\}$$

Ces opérations multi-échelles satisfont la propriété de semi-groupe si et seulement si B est convexe, ce qui est une conséquence directe de la propriété suivante :

$$\forall s,t \geq 0, \quad (t+s)B = tB \oplus sB \Longleftrightarrow B \ \text{ est convexe}$$

où $\oplus$ est l'opérateur d'addition sur les ensembles. Elles satisfont les axiomes cités précédemment sauf l'axiome d'invariance par projection. L'invariance par isométrie n'est satisfaite que lorsque B est une boule, et :
$u(t,x) = D_t f(x)$ est solution de l'équation de viscosité

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mid Du \mid_B \tag{2.1}$$

$u(t,x) = E_t f(x)$ est solution de l'équation de viscosité

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \mid Du \mid_B \tag{2.2}$$

où l'opérateur $\mid . \mid_B$ est défini par

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \mid y \mid_B = \sup_{z \in B} \ y.z$$

où $y.z$ désigne le produit scalaire euclidien.
Lorsque B est une sphère de rayon 1, cette norme est la *norme euclidienne usuelle.*
La mise en œuvre de ces équations requiert l'utilisation d'une "bonne" approximation du gradient, ce point est discuté dans le chapitre suivant sur les schémas numériques associés aux équations d'Hamilton-Jacobi.

2.2.2 L'équation de Perona et Malik

L'équation de diffusion anisotrope de Perona et Malik est étudiée plus en détail dans le chapitre 5. Cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(g(\mid \nabla u \mid)\nabla u).$$

Elle vérifie les axiomes hiérarchiques, les invariances par translation, par décalage de niveaux de gris, par isométrie. L'invariance par changement d'échelle n'est vraie que si la fonction g est une puissance, et l'invariance par changement de niveaux de gris n'est pas vérifiée.

2.2.3 Invariance par changement de niveaux de gris et par isométrie

THÉORÈME 1 (ANALYSE INVARIANTE PAR CHANG. DE NIV. DE GRIS ET PAR ISOMÉTRIE) *:*

Lorsque l'analyse multi-échelle est invariante par changement de niveaux de gris et par isométrie, la fonction F a la forme suivante :

$$\forall n \geq 2, \quad F(A,p) \ = \ G(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \mid p \mid) \tag{2.3}$$

où A est une matrice symétrique de dimension $n \times n$, p est un vecteur non nul ($p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$), et G est une fonction continue, définie sur $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, +\infty[$, avec

$$\forall q \in [0, +\infty[, \qquad G(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, q)$$

symétrique et croissante par rapport à ces $n-1$ premiers paramètres,

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ sont les valeurs propres réelles de la restriction de Q_pAQ_p à $(\mathbb{R}_p)^\perp$, et Q_p est la projection dans l'hyperplan orthogonal au vecteur p : $Q_p = I_n - (p \,.\, p^t) \,/\, \mid p \mid^2$.

Interprétation géométrique Dans le cas des équations différentielles étudiées, la matrice A est la matrice hessienne D^2u et le vecteur p est le gradient Du. La matrice $Q_p = Q_{Du} = I_n - 1/\mid Du \mid^2 Du.Du^t$ est la matrice de projection dans le plan orthogonal au gradient et les valeurs propres de $Q_{Du}D^2uQ_{Du}$ restreint à $(\mathbb{R}_p)^\perp$ sont proportionnelles aux courbures principales de l'isosurface associée au point courant : $\lambda_i = \mid Du \mid \kappa_i$.
Deux cas particulier de l'équation (2.3) sont les analyses multi-échelles morphologiques invariantes par transformation euclidienne et affine.

2.2.4 Évolution par la courbure moyenne (*Euclidian Morphological Scale Space*)

L'équation dite d'analyse multi-échelle morphologique euclidienne (EMMS) est un cas particulier de l'équation (2.3) avec $G(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \mid \nabla u \mid) \ = \ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \ = \mid \nabla u \mid curv(u)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mid Du \mid (t \;\; curv(u)) \tag{2.4}$$

$curv(u)$ est la courbure moyenne et s'exprime aussi sous la forme $div(\frac{\nabla u}{|\nabla u|})$. Le lien entre l'évolution des courbes de niveaux et ces équations différentielles est expliqué au paragraphe 3.2. En particulier, appliquer une EDP de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -F \mid Du \mid$$

à une image u correspond à faire évoluer ces courbes de niveaux (isophotes en 2D, ou isosurfaces en 3D) avec une force F dans la direction du gradient. Gage et Hamilton [Gage et Hamilton, 1987] ont montré qu'une courbe planaire convexe fermée converge vers un point circulaire lorsqu'elle évolue selon sa courbure (en 2D). Et Grayson [Grayson, 1987] a montré qu'une courbe non convexe converge vers une courbe convexe avant de converger vers un point circulaire. Sapiro et Tannenbaum [Sapiro et Tannenbaum, 1995] proposent des variations de cette équation afin de conserver le périmètre ou l'aire de la courbe.

2.2.5 Invariance par changement d'échelle et par projection (*Affine Morphological Scale Space*)

Les auteurs montrent que, dans le cas des images bidimensionnelles ($n = 2$), la seule équation vérifiant l'invariance par changement de niveaux de gris, par isométrie, par projection et par changement d'échelle est l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mid Du \mid (t \;\; curv(u))^{1/3} \tag{2.5}$$

L'équation (2.5) peut s'interpréter, en dimension 2, comme une évolution en fonction de la dérivée seconde des isophotes paramétrées par une métrique affine (dans le cas de l'équation (2.4) la métrique est euclidienne). L'évolution des courbes selon cette équation est invariante par transformation affine [Sapiro et Tannenbaum, 1993; Sapiro et Tannenbaum, 1994]. En outre, Sapiro et Tannenbaum montrent que toute courbe convexe fermée converge vers un point elliptique, et que, comme dans le cas euclidien, toute courbe non convexe évolue vers une courbe convexe avant de converger vers un point elliptique.

2.3 Conclusion

En reprenant l'axiomatique et les résultats obtenus par Alvarez, Guichard, Morel et Lions, nous avons présenté un ensemble d'équations aux dérivées partielles utilisées pour l'analyse multi-échelle des images : l'équation de la chaleur (convolution de l'image avec un noyau gaussien), les opérations morphologiques, l'équation de diffusion anisotrope de Perona et Malik, ainsi que les équation d'évolution par la courbure moyenne (invariance euclidienne), et l'équation d'invariance euclidienne morphologique. Les expériences présentées dans les figures 2.1, 2.2 et 2.3 montrent cependant que l'aspect discret des images introduit des erreurs par rapport aux invariances des équations aux dérivées partielles, cette discrétisation contredit les hypothèses de continuité de l'image introduites par les axiomes. Une partie du travail d'Alvarez, Guichard, Lions, Morel sur le traitement multi-échelle des séquences d'images n'est pas présenté ici. Dans le chapitre suivant, nous nous intéressons aux schémas numériques des équations d'Hamilton-Jacobi, utilisées pour approximer les équations d'érosion et de dilatation mais aussi dans de nombreuses applications de détection de contours.

Chapitre 3

Courbes de niveaux et approximation des équations d'Hamilton-Jacobi : vers de meilleurs schémas numériques

« *Ceux qui s'entêtent de pratique sans la science, sont comme des marins montant un navire sans timon ni boussole, et qui ne savent jamais avec certitude où ils vont.* »
de Vinci, Léonard (1452-1519)

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'approximation des équations d'Hamilon-Jacobi utilisées pour les courbes de niveaux (level sets). Cette étude nous permet de justifier théoriquement et de vérifier expérimentalement les meilleures propriétés d'une approximation proposée par Brockett et Maragos par rapport au schéma classique d'Osher et Sethian.

Notations

Dans ce chapitre, les notations suivantes seront utilisées :

	notations générales :
n	dimension de l'image,
$\mathbb{R}$	ensemble des réels,
$x = (x_1, \ldots, x_n)$	un vecteur de $\mathbb{R}^n$ ou un point de l'image,
t	paramètre d'évolution des équations aux dérivées partielles,
dt	"petite" évolution du paramètre t,
$u(x,t)$	image, fonction de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$, u désignera une solution d'une équation d'Hamilton-Jacobi,
$u_0(x)$	image initiale,
$v(x,t)$	image, fonction de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$, v désignera une solution d'une équation sous forme conservative,
$v_0(x)$	image initiale,
v_1	valeur pour $x < 0$ de la condition initiale au problème de Riemann,
v_2	valeur pour $x > 0$ de la condition initiale au problème de Riemann,
$f(-,-)$	fonction de flux,
$H(-)$	fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ introduite par l'équation d'Hamilton-Jacobi,
$H'(-)$	dérivée de la fonction H (dans le cas 1D),
$F(-)$	fonction introduite par l'équation sous forme conservative en dimension 1,
$g(-)$	fonction de la norme du gradient correspondant au cas particulier des équations d'Hamilton-Jacobi étudiées : $H(u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) = g(\mid \nabla u \mid)$,
S	vitesse de déplacement d'un choc,
$\min(a,b)$	le minimum des deux réels a et b,
$\max(a,b)$	le maximum des deux réels a et b,
$\mathrm{o}(h)$	pour un réel h, $\mathrm{o}(h)$ est une fonction du type $h\,\mathrm{O}(h)$ où la fonction $\mathrm{O}(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0,

	notations relatives aux courbes de niveaux :
$\mathcal{S}$	isosurface d'intensité 0 d'une image,
$\mathcal{F}$	force de déplacement appliquée à une isosurface de l'image, $\mathcal{F} \in \mathbb{R}$,
$\mathbf{V}$	vitesse de déplacement des isosurfaces,

	notations relatives à la discrétisation :
Δx	pas de discrétisation en x,
Δt	pas de discrétisation de l'évolution t,
u_i^n	approximation discrète de u en $(i\Delta x, n\Delta t)$,
D_+u_i	approximation finie *à droite* de la dérivée en $i\Delta x$: $(u_{i+1} - u_i) / \Delta x$,
D_-u_i	approximation finie *à gauche* de la dérivée en $i\Delta x$: $(u_i - u_{i-1}) / \Delta x$,
Du_i	Approximation finie *centrée* de la dérivée en $i\Delta x$: $(u_{i+1} - u_{i-1}) / 2\Delta x$,
$W(-,-,-)$	fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ permettant d'exprimer un schéma numérique à trois points : $u_i^{n+1} = W(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n)$

3.1 Introduction

Osher et Sethian [Osher et Sethian, 1988; Sethian, 1985; Sethian, 1996] ont proposé un schéma numérique pour l'évolution de courbes et de surfaces en fonction de leur courbure. Ce schéma est utilisé dans de nombreuses applications en traitement d'images et en robotique [Sethian, 1996; Malladi et al., 1995; Malladi et al., 1996; Zeng et al., 1998]. En particulier, l'approche des courbes de niveaux consiste à considérer l'évolution d'une isosurface (ou d'un isocontour en 2D) d'une image et de faire converger cette isosurface sur les contours des objets que l'on désire segmenter. L'évolution s'écrit sous la forme d'une équation aux dérivées partielles avec un terme de propagation, un terme de lissage, un terme d'attache aux données. Cette approche concurrence les techniques liées aux modèles déformables [Cohen, 1991; Delingette, 1999]. Elle présente l'avantage de permettre aux contours détectés de changer naturellement de **topologie**, mais nécessite la mise en œuvre de techniques d'optimisation de l'EDP pour limiter les temps de calcul [Adalsteinsson et Sethian, 1995]. Dans ce chapitre, nous essayons de fournir une explication du choix particulier d'approximation numérique proposé par Osher et Sethian [Osher et Sethian, 1988]. Dans le même temps, un article de Kimmel et al. [Kimmel et al., 1997] propose d'utiliser une autre approximation introduite par Brockett et Maragos [Brockett et Maragos, 1994] dans le contexte de la morphologie mathématique, et qui donne expérimentalement de meilleurs résultats. En reprenant les arguments donnés par Sethian et issus des travaux de Colella et Puckett [Colella et Puckett, 1994], nous montrons que le schéma de Brockett et Maragos se comporte mieux dans le cas des *chocs* et est équivalent à celui de Sethian dans les autres cas. Ces bonnes propriétés sont vérifiées expérimentalement.

Au cours de ce chapitre, nous introduisons deux types d'équations aux dérivées partielles, qui sont l'équation d'Hamilton-Jacobi et les équations sous forme conservatrice. Un cas particulier de l'*équation d'Hamilton-Jacobi* est l'équation utilisée pour l'évolution des courbes de niveau, et pour les opérations multi-échelles de morphologie mathématique introduites dans le chapitre précédent. L'intérêt des équations *sous forme conservatrice* est la possibilité de trouver des schémas numériques stables approchant ces équations. Un *lien* entre l'équation d'Hamilton-Jacobi et les équations sous forme conservatrice est donné dans le paragraphe 3.3.3 : dans le cadre des images 1D, la dérivation de l'équation d'Hamilton-Jacobi s'écrit sous forme conservatrice.

Notre contribution est de montrer les meilleures propriétés du schéma numérique proposé par Brockett et Maragos par rapport à celui proposé par Osher et Sethian.

Ce chapitre est constitué de trois parties :

- présentation des level sets,
- présentation de méthodes numériques utilisées en dynamique de fluides,
- comparaison des deux approximations.

3.2 Relation entre l'évolution des courbes et les EDP

Nous considérons l'évolution des courbes de niveaux d'une image. Soit $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une image, et $\mathcal{S}$ son isosurface d'intensité 0 :

$$\mathcal{S} \;=\; \{\; x \in \mathbb{R}^n ,\;\; u(x) = 0 \;\}$$

En un point $x \in \mathbb{R}^n$ de $\mathcal{S}$, la normale à la surface est obtenue par le vecteur gradient de l'image. Si la surface évolue selon un déplacement $\mathbf{V}\,dt$, où $\mathbf{V}$ est la vitesse de déplacement de la surface, alors la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; -\mathcal{F} \mid \nabla u \mid \tag{3.1}$$

où $\mathcal{F}$ est appelée la force de déplacement et est égale à $\mathcal{F} = \mathbf{V}.\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$. Le terme de force est ici un abus de langage car aucun modèle physique associé n'est défini, mais il est couramment employé.

Démonstration :

Cette relation se vérifie facilement en appliquant le principe de conservation de l'intensité d'un point. Le point M de coordonnées x à l'instant t se trouve à la position $x + \mathbf{V}\,dt$ à l'instant $t + dt$, donc :

$$u(x + \mathbf{V}\,dt, t + dt) \;=\; u(x,t)$$

Ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned}
u(x + \mathbf{V}\,dt, t + dt) - u(x,t) \quad &= \quad 0 \\
\underbrace{u(x + \mathbf{V}\,dt, t + dt) \;-\; u(x, t + dt)}_{(\nabla u)(x,\, t+dt).\mathbf{V}\,dt \,+\, \mathrm{o}(dt)} + \underbrace{u(x, t + dt) \;-\; u(x,t)}_{\frac{\partial u}{\partial t}(x,\,t)dt \,+\, \mathrm{o}(dt)} \quad &= \quad 0 \\
\underbrace{(\nabla u)(x, t + dt)}_{(\nabla u)(x,\,t) \,+\, \mathrm{o}(1)}\;\mathbf{V}\,dt + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dt \quad &= \quad \mathrm{o}(dt)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla u)(x,t)\;\mathbf{V}\,dt + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dt \quad &= \quad \mathrm{o}(dt) \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \quad &= \quad -(\nabla u)(x,t).\mathbf{V} \;+\; \mathrm{O}(dt) \\
\frac{\partial u}{\partial t} \quad &= \quad -\mathcal{F} \mid \nabla u \mid \;+ \mathrm{O}(dt)
\end{aligned}$$

Ce qui donne l'équation (3.1) à l'ordre 1. ■

La force $\mathcal{F}$ de l'équation (3.1) correspond à la composante normale à l'isosurface de la vitesse de déplacement $\mathbf{V}$, cela traduit l'indépendance de l'évolution de la surface par rapport aux composantes tangentielles de la force de déplacement. Un parallèle évident avec les opérations morphologiques de dilatation et d'érosion (voir paragraphe 2.2.1) par une boule unité peut être fait : une force $\mathcal{F}$ positive et constante correspond à une érosion et une force $\mathcal{F}$ négative et constante correspond à une dilatation.

3.3 Schémas numériques

Les schémas numériques associés aux équations aux dérivées partielles jouent un rôle essentiel pour obtenir la solution recherchée. En particulier, la stabilité du schéma numérique et l'obtention de solutions non continues requiert la mise en œuvre de schémas vérifiant certaines propriétés de conservation. Dans un premier temps, nous définissons certaines notions liées aux méthodes numériques de résolution d'EDP. Ces définitions sont inspirées de [Sethian, 1996; Kimmel et al., 1997] et des travaux de Lax [Lax, 1973], LeVeque [LeVeque, 1992], Sod [Sod, 1985]. Nous définirons successivement une loi de conservation hyperbolique, un schéma sous forme conservatrice, un schéma monotone, un schéma numérique dit "upwind", le problème de Riemann et les notions de raréfaction et de choc, la condition de Courant-Friedrich-Lewy. Cette présentation, qui reprend le travail de Osher et Sethian, doit permettre au lecteur non familiarisé de comprendre les propriétés que doit satisfaire le schéma numérique.

L'équation d'*Hamilton-Jacobi* est définie ci-dessous : l'évolution de l'image est une fonction des dérivées premières partielles.

DÉFINITION 5 (ÉQUATION D'HAMILTON-JACOBI) *:*

L'équation d'Hamilton-Jacobi, pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continue et dérivable par rapport à chacun de ses arguments, a la forme suivante :*

$$\begin{cases} u_t + H(u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{3.2}$$

L'équation (3.1) d'évolution des courbes de niveaux est donc un cas particulier de ces équations, pour lequel $H(u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = \mathcal{F}\sqrt{u_{x_1}^2 + \cdots + u_{x_n}^2}$.
Afin de trouver une bonne approximation aux équations d'Hamilton-Jacobi, nous introduisons la notion d'équation sous forme conservatrice. Il est possible de trouver des schémas numériques stables et convergents pour les équations sous forme conservatrice. Une propriété remarquable, qui sera montrée ultérieurement, et présentée par Osher et Sethian, est que la dérivation des équations d'Hamilton-Jacobi en dimension 1 donne des équations sous forme conservatrice.

3.3.1 Loi de conservation hyperbolique

Selon Lax :

> *A conservation law asserts that the rate of the total amount of substance contained in a fixed domain is equal to the flux of that substance across the boundary of the domain.*
> [Lax, 1973]

Dans le cas 1D, cette propriété de conservation est vérifiée pour des équations de la forme :

$$v_t + [F(v)]_x = 0. \tag{3.3}$$

où v est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Ces équations sont dites sous *forme conservatrice*. Toute équation qui peut se mettre sous la forme conservatrice est une *loi de conservation*. Pour les dimensions supérieures, les équations conservatrices s'écrivent sous la forme d'une divergence, ce qui est le cas des équations de la chaleur ou de la diffusion anisotrope.

Il est très facile de vérifier que l'équation (3.3) est une loi de conservation au sens de Lax, l'explication est donnée ci-dessous. En dimension supérieure, cette propriété utilise le théorème de la divergence (voir paragraphe 5.2 page 70).

Démonstration :

L'équation peut encore s'écrire :

$$v_t = -\left[F(v)\right]_x$$

En intégrant cette relation dans un domaine fixe, représenté par l'intervalle $[a,b]$, et en interprétant $F(v)$ comme la fonction de flux, nous obtenons une loi de conservation de l'intensité :

$$\begin{aligned} \int_a^b v_t dx &= -\int_a^b \left[F(v)\right]_x dx \\ \frac{d}{dt}\int_a^b v dx &= F(v(a,t)) - F(v(b,t)) \end{aligned} \tag{3.4}$$

La variation de substance dans l'intervalle $[a,b]$ est donc bien égale au flux qui traverse la frontière de ce domaine (les points a et b). ■

L'intérêt de réécrire l'équation (3.3) sous la forme (3.4) est de ne plus supposer que la fonction v est dérivable par rapport à x, et donc d'avoir une ensemble de solutions admettant des fonctions discontinues.

3.3.2 Schéma sous forme conservatrice

Ce schéma vient de la discrétisation de l'équation (3.4) de conservation. Nous définissons les valeurs discrètes v_i par

$$v_i = \frac{1}{\Delta x}\int_{(i-1/2)\,\Delta x}^{(i+1/2)\,\Delta x} v dx,$$

alors pour $a = (i-1/2)\,\Delta x$ et $b = (i+1/2)\,\Delta x$ l'équation (3.4) s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\int_{(i-1/2)\,\Delta x}^{(i+1/2)\Delta x} v\,dx = F\left(v((i-1/2)\Delta x, t)\right) - F\left(v((i+1/2)\Delta x, t)\right)$$

Une discrétisation de cette équation donne :

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} = -\frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x} \tag{3.5}$$

avec $F_{i\pm 1/2} = F\left(v((i \pm 1/2)\,\Delta x, t)\right)$.

Définition 6 (schéma numérique sous forme conservatrice) *:*

Un schéma numérique est dit **sous forme conservatrice** *s'il existe une "fonction de flux" $f(x,y)$ telle que :*

- $f(v_{i-1},v_i)$ *approche* $F_{i-1/2}$ *(donc* $f(v_i,v_{i+1})$ *approche* $F_{i+1/2}$*),*
- $f(v,v) = F(v)$ *(le schéma est cohérent).*

Un schéma numérique sous forme conservatrice associé à l'équation (3.5) s'écrit donc :

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f(v_i,v_{i+1}) - f(v_{i-1},v_i)\right) \tag{3.6}$$

où $f(x,y)$ est une **fonction de flux**.

Définition 7 (schéma numérique monotone) *:*

Un schéma numérique de la forme $u_i^{n+1} = W(\, u_{i-1}^n,\, u_i^n,\, u_{i+1}^n)$ *est dit* **monotone** *si la fonction* W *est une fonction croissante de chacun de ses arguments.*

Ces définitions sont motivées par le théorème suivant, repris de [Kimmel et al., 1997] :

Théorème 2 (Kuznetsov [Kuznetsov, 1976]) *:*

Un schéma numérique cohérent, monotone, qui peut se mettre sous forme conservatrice converge vers l'unique solution faible satisfaisant la condition d'entropie de l'équation $v_t + [F(v)]_x = 0$.

L'approximation des équations d'Hamilton-Jacobi, qui est notre objectif, se base sur la transformation de ces équations sous une forme conservatrice, et aussi sur le choix d'un schéma monotone. Cette transformation est expliquée dans le paragraphe suivant.

3.3.3 Schéma numérique

Cette partie introduit le schéma numérique proposé par Osher et Sethian [Osher et Sethian, 1988]. Soit une équation d'Hamilton-Jacobi (3.2) suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_t + H(Du) & = & 0 \\ u(x,0) & = & u_0(x) \end{array}\right. \tag{3.7}$$

Dans le cas des opérations morphologiques, $H(Du) = \pm \mid \nabla u \mid$. Nous recherchons un schéma numérique permettant d'approcher cette équation. Nous nous restreignons dans un premier temps au cas **unidimensionnel**. La dérivation de l'équation permet d'obtenir une équation sous forme conservatrice.

Nous montrons ci-dessous que l'équation (3.7) peut s'approcher par le schéma numérique suivant [Osher et Sethian, 1988]:

$$\boxed{u_k^{n+1} = u_k^n - \Delta t \;\, f(D_- u_k^n,\, D_+ u_k^n)} \tag{3.8}$$

où f est une fonction de flux associée à la fonction H.
Démonstration :

Soit v la dérivée de u par rapport à x

$$v = u_x$$

En dérivant l'équation (3.7) par rapport à x, l'équation d'évolution de v s'écrit :

$$\begin{aligned} (u_x)_t + [H(u_x)]_x &= 0 \\ v_t + [H(v)]_x &= 0 \end{aligned} \qquad (3.9)$$

Nous obtenons une équation sous forme conservatrice équivalente à l'équation (3.3) dont un schéma numérique sous forme conservatrice associé est donné par l'équation (3.6). Nous introduisons les discrétisations suivantes des fonctions u et v :

$$\begin{aligned} \forall k,n \in \mathbb{N}, \quad u_k^n &= u(k\,\Delta x,\, n\Delta t) \\ \forall i,n \in \mathbb{N}, \quad v_i^n &= \frac{1}{\Delta x}\int_{(i-1/2)\Delta x}^{(i+1/2)\Delta x} v(x,n\Delta t)dx \end{aligned}$$

nous supposerons en outre que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{i\to-\infty} v_i^n = 0$.
Alors, $u_{k+1/2}^n$ s'écrit :

$$u_{k+1/2}^n = u((k+1/2)\,\Delta x,\, n\Delta t) = \int_{-\infty}^{(k+1/2)\Delta x} u_x(x,\, n\Delta t)dx = \sum_{i=-\infty}^{k} v_i^n\,\Delta x \qquad (3.10)$$

L'équation (3.9) d'évolution de v est une loi de conservation hyperbolique et nous l'approchons par le schéma sous forme conservative de l'équation (3.6).
En sommant l'équation (3.6) pour i entre $-\infty$ et k, et en divisant par Δx, nous obtenons :

$$\begin{aligned} u_{k+1/2}^{n+1} &= u_{k+1/2}^n - \Delta t\left[f(v_k,v_{k+1}) - \lim_{i\to-\infty} f(v_{i-1},v_i)\right] \\ &= u_{k+1/2}^n - \Delta t \;\; f(v_k,v_{k+1}) \end{aligned}$$

car $\lim_{i\to-\infty} f(v_{i-1},v_i) = f(0,0) = H(0) = 0$ puisque u_i tend vers 0 lorsque i tend vers $-\infty$ et que $f(v,v) = H(v)$. De plus, nous supposons que $H(0) = 0$ ce qui est le cas pour les équations du type $H(u_{x_1},\ldots,u_{x_n}) = g(.) \mid \nabla u \mid$ qui nous intéressent.
En remplaçant $k+1/2$ par k dans cette dernière équation :

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \Delta t \;\; f(v_{k-1/2},v_{k+1/2})$$

En approchant $v_{k+1/2}$ par D_+u_k et $v_{k-1/2}$ par D_-u_k, puisque $v = u_x$, nous obtenons donc :

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \Delta t \;\; f(D_-u_k,\, D_+u_k) \qquad (3.11)$$

■

Le choix d'une bonne fonction de flux f nécessite de définir la notion de schéma numérique dit “upwind” et de trouver un schéma qui se comporte bien dans le cas d'une discontinuité de l'image initiale, modélisée par le problème de Riemann.

3.3.4 Notion de schéma numérique "upwind"

La notion de schéma numérique "upwind" vient de l'étude de l'approximation numérique de l'équation suivante [Courant et al., 1952]

$$\begin{cases} v_t = c(x)\, v_x \\ v(x,0) = v_0 \end{cases} \tag{3.12}$$

Si $c(x) = c$ est une constante, l'équation est sous forme conservative ($c\, v_x = (c\, v)_x$).
Dans ce cas la solution de cette équation est $v(x,t) = v_0(x + ct)$, c'est-à-dire que l'information se déplace selon des droites $x + ct = \mathit{constante}$ de pente $1/c$.
Lorsque c est une constante *positive*, l'information se déplace vers la gauche et le schéma numérique

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \Delta t\; c\; D_+ v_i^n$$

approche l'équation (3.12).
De même, lorsque c est *négative*, l'information se déplace vers la droite et le schéma numérique

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \Delta t\; c\; D_- v_i^n$$

approche l'équation (3.12).
Ces deux méthodes peuvent être combinées pour $c(x)$ non constant en choisissant un des deux schémas en fonction du signe de $c(x)$. Une définition précise d'un schéma numérique sous forme conservatrice dit "upwind" est donnée dans [Sod, 1985, p. 307].

DÉFINITION 8 (SCHÉMA NUMÉRIQUE UPWIND) *:*

Dans le cas de l'équation (3.9) $v_t = -[H(v)]_x = -H'(v)v_x$, le schéma numérique sous forme conservatrice de l'équation équation (3.6) sera "upwind" si :
- *lorsque H' est négatif ($c = -H' > 0$), $f(v_k,v_{k+1}) = H(v_{k+1})$;*
- *lorsque H' est positif ($c = -H' < 0$), $f(v_k,v_{k+1}) = H(v_k)$.*

Dans le cas plus général des équations non linéaires, le choix du schéma numérique est basé sur le problème de Riemann : le schéma numérique doit avoir un bon comportement dans le cas des discontinuités. Godunov [Godunov, 1959] propose de résoudre le problème local de Riemann sur chaque intervalle défini par les données discrètes.

3.3.5 Étude des solutions au problème de Riemann

Le problème de Riemann consiste à résoudre une équation sous forme conservatrice avec comme condition initiale une fonction discontinue, il est défini ci-dessous.

Définition 9 (problème de Riemann) *:*

Le problème de Riemann consiste à résoudre l'équation (3.9) avec pour condition initiale la fonction discontinue suivante :

$$v(x,0) = v_0(x) = \begin{cases} v_1, & si\ x < 0 \\ v_2, & si\ x > 0 \end{cases}$$

Quatre cas se présentent alors en fonction des signes de H' aux points v_1 et v_2, ces différents cas sont représentés dans la figure 3.1 : (i) évolution globale à droite, (ii) évolution globale à gauche, (iii) une raréfaction se développe et (iv) un choc se développe. Un choc ou une raréfaction peuvent se développer dans les cas (i) et (ii) mais cela n'influera pas sur le choix de la fonction de flux f. Dans l'équation (3.9), $[H(v)]_x = H'(v)\ v_x$ et H' représente la “vitesse de propagation”. En

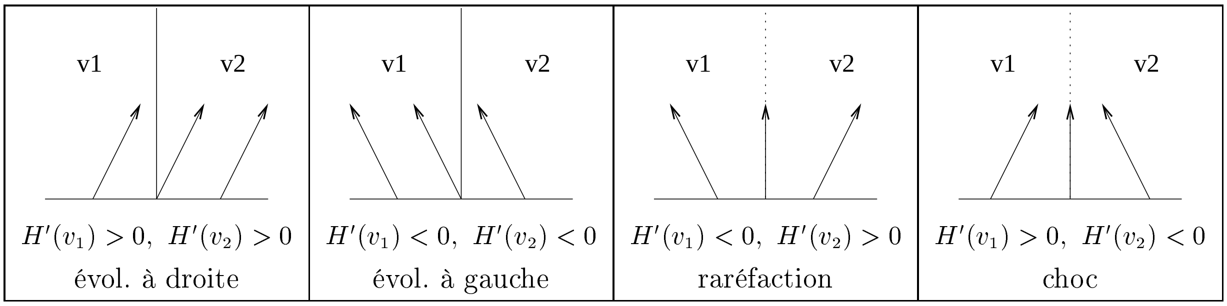


Fig. 3.1 – *Solutions possibles au problème de Riemann.*

reprenant les arguments de Sethian [Sethian, 1996] qui sont eux-mêmes issus des travaux de Colella et Puckett [Colella et Puckett, 1994], le comportement de la fonction $f(v_1,v_2)$ dans chacun des cas doit idéalement être le suivant :

(i) $H'(v_1) > 0,\ H'(v_2) > 0$, l'onde se déplace vers la droite, $f(v_1,v_2) = H(v_1)$;

(ii) $H'(v_1) < 0,\ H'(v_2) < 0$, l'onde se déplace vers la gauche, $f(v_1,v_2) = H(v_2)$;

(iii) $H'(v_1) < 0,\ H'(v_2) > 0$, une **raréfaction** se développe, les informations pour $x < 0$ se déplacent vers la gauche et les informations pour $x > 0$ se déplacent vers la droite. Si l'on note $p = {H'}^{-1}(0)$ la valeur pour laquelle la vitesse de déplacement est nulle, le schéma doit vérifier $f(v_1,v_2) = H(p)$;

(iv) $H'(v_1) > 0,\ H'(v_2) < 0$, ici un **choc** se développe et la solution du problème local de Riemann dépend de la vitesse de propagation S du choc car l'information se déplace dans la direction du choc. Si cette vitesse est positive, alors $f(v_1,v_2) = H(v_1)$; si elle est négative, alors $f(v_1,v_2) = H(v_2)$.

Le tableau 3.1 résume ces propriétés.

La vitesse de propagation du choc est donnée par

$$S = \frac{H(v_2) - H(v_1)}{v_2 - v_1} \tag{3.13}$$

(i)	évol. droite	$H'(v_1) > 0,\ H'(v_2) > 0$	$f(v_1,v_2) = H(v_1)$.
(ii)	évol. gauche	$H'(v_1) < 0,\ H'(v_2) < 0$	$f(v_1,v_2) = H(v_2)$.
(iii)	raréfaction	$H'(v_1) < 0,\ H'(v_2) > 0$	$f(v_1,v_2) = H(p)$, où $p = {H'}^{-1}(0)$.
(iv)	choc	$H'(v_1) > 0,\ H'(v_2) < 0$	$f(v_1,v_2) = \begin{cases} H(v_1) & \text{si} \quad S \geq 0 \\ H(v_2) & \text{si} \quad S < 0 \end{cases}$

TAB. 3.1 – *Comportement de la fonction de flux pour les différentes solutions au problème de Riemann.*

La démonstration est simple et est donnée dans [Sethian, 1996]. Pour être complet, nous la reprenons ci-dessous.

Démonstration :

Le choc est au point $x_0(t)$. La vitesse du choc est définie par $S = dx_0/dt$.
Soient $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} v(x,t)dt &= \frac{d}{dt}\left[\int_{x_1}^{x_0} v(x,t)dx + \int_{x_0}^{x_2} v(x,t)dx\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[\int_{x_1}^{x_0} v_1 dx + \int_{x_0}^{x_2} v_2 dx\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left(x_0(t) - x_1\right) v_1 + \frac{d}{dt}\left(x_2 - x_0(t)\right) v_2 \\
&= (v_1 - v_2)S.
\end{aligned}
$$

et

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} v(x,t)dt \quad \overset{[\ 3.4\ ]}{=} \quad H(v_2) - H(v_1)$$

■

3.3.6 Condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

Nous donnons ci-dessous les définitions du domaine de dépendance numérique et de la condition de Courant-Friedrichs-Lewy dite CFL. Ces définitions sont données à titre indicatif et ne sont pas directement utilisées dans notre étude car la déduction de critères de stabilité à partir de ces définitions ne nous a pas parue clairement explicite dans les articles de Osher et Sethian ou de Kimmel et al. Nous verrons dans le paragraphe suivant que le critère de monotonie du schéma sous forme conservative fournit un seuil sur le pas d'évolution de l'EDP qui assure la stabilité de ce schéma d'après le théorème 2.

DÉFINITION 10 (DOMAINE DE DÉPENDANCE NUMÉRIQUE) *:*

Le domaine de dépendance numérique d'une méthode de différences finies en un point $(i\Delta x,k\Delta t)$ est l'ensemble des points $(j\Delta x,0)$ des données initiales qui influencent la solution au point $(i\Delta x,k\Delta t)$.

Définition 11 (condition de Courant-Friedrichs-Lewy) *:*

Une méthode de différences finies satisfait la condition de Courant-Friedrichs-Lewy si le domaine de dépendance de la solution de la méthode de différences finies est inclus dans le domaine de dépendance de la solution de l'équation aux dérivées partielles pour tout point $(i\Delta x, n\Delta t)$.

La condition CFL est nécessaire pour la stabilité du schéma numérique [Sod, 1985, p. 151]. Pour l'équation $v_t + [H(v)]_x = 0$ et pour un schéma numérique pour lequel v_i^{n+1} ne dépend que de v_{i-1}^n, v_i^n et v_{i+1}^n, la condition CFL est

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \mid H' \mid \leq 1.$$

3.4 Choix de l'approximation

Dans ce paragraphe, nous vérifions les bonnes propriétés du schéma proposé par Osher et Sethian, ainsi que celles du schéma proposé, dans un autre contexte, par Brockett et Maragos. Ces schémas s'écrivent sous la forme donnée par l'équation (3.8), qui correspond à une équation sous forme conservative de la dérivée de l'image (en dimension 1). Les propriétés vérifiées sont basées sur le théorème 2 et sur les propriétés associées au problème de Riemann :

- monotonie du schéma sous forme conservative,
- quatre propriétés données par le tableau 3.1.

Les deux schémas se généralisent en dimension quelconque comme l'ont proposé Osher et Sethian [Osher et Sethian, 1988]. Nous constatons que seul le schéma de Brockett et Maragos vérifie le critère (iv) du tableau 3.1 qui assure un bon comportement en cas de choc. Dans les autres cas, les deux schémas sont équivalents.

Rappelons l'équation d'Hamilton-Jacobi que nous approximons :

$$\begin{cases} u_t + H(u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

ainsi que l'approximation donnée par l'équation (3.8) :

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \Delta t \; f(D_- u_k^n, D_+ u_k^n) \tag{3.14}$$

où f est une fonction de flux associée à la fonction H.

Les approximations données ci-dessous sont adaptées au cas où $H(u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) = g(\mid \nabla u \mid^2)$, c'est-à-dire que l'évolution est une fonction de la norme du gradient de l'image.

3.4.1 Schéma numérique proposé par Osher et Sethian

3.4.1.1 En dimension 1

Notons $v = u_x$. Nous considérons le cas particulier $H(v) = g(v^2)$ donc $H'(v) = 2vg'(v^2)$. Osher et Sethian [Osher et Sethian, 1988] proposent le schéma de l'équation (3.14), avec la fonction f suivante:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{si } g' < 0, \quad f(v_1,v_2) &=& g\left(\min(v_1,0)^2 + \max(v_2,0)^2\right) \\ \text{si } g' > 0, \quad f(v_1,v_2) &=& g\left(\max(v_1,0)^2 + \min(v_2,0)^2\right) \end{array}} \tag{3.15}$$

Le schéma numérique associé de $v = u_x$ est donné par l'équation (3.6) :

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f(v_i,v_{i+1}) - f(v_{i-1},v_i)\right).$$

Ce schéma est "upwind" par construction, il vérifie les conditions (i) et (ii) précédentes.
La condition (iii) est aussi vérifiée : par exemple, dans le cas où $g' > 0$, le signe de $H'(v) = 2vg'(v)$ est celui de v et $p = 0$ car $H'(0) = 0$. Nous avons dans ce cas $v_1 < 0$ et $v_2 > 0$, et $f(v_1,v_2) = g(\max(v_1,0)^2 + \min(v_2,0)^2) = g(0) = g(p) = H(p)$.
Par contre, dans le cas (iv), $f(v_1,v_2)$ ne dépend pas de S et vaut $g(v_1^2 + v_2^2)$.
Ce schéma est *monotone* pour

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \mid H' \mid \leq 1. \tag{3.16}$$

Démonstration :

La fonction $W(a,b,c)$ définie par $v_j^{n+1} = W(v_{j-1}^n,v_j^n,v_{j+1}^n)$ est égale à

$$W(a,b,c) = b - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f(b,c) - f(a,b)\right)$$

La monotonie du schéma est assurée si W est une fonction croissante de chacun de ses arguments, c'est-à-dire si $\frac{\partial W}{\partial a}, \frac{\partial W}{\partial b}$ et $\frac{\partial W}{\partial c}$ sont des fonctions positives. Nous noterons $W_a = \frac{\partial W(a,b,c)}{\partial a}$, et même pour W_b et W_c, et $f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, de même pour f_y.

$$W_a = \frac{\Delta t}{\Delta x} f_x(a,b) = \frac{\Delta t}{\Delta x}\begin{cases} 2\,a\,g'(\dots) \geq 0 & \text{si } g' < 0 \text{ et } a \leq 0 \\ 0 & \text{si } g' < 0 \text{ et } a > 0 \\ 2\,a\,g'(\dots) \geq 0 & \text{si } g' > 0 \text{ et } a \geq 0 \\ 0 & \text{si } g' > 0 \text{ et } a < 0 \end{cases}$$

donc $W_a \geq 0$.

$$W_c = -\frac{\Delta t}{\Delta x} f_y(b,c) = \frac{\Delta t}{\Delta x}\begin{cases} 0 & \text{si } g' < 0 \text{ et } c \leq 0 \\ -2\,c\,g'(\dots) \geq 0 & \text{si } g' < 0 \text{ et } c > 0 \\ 0 & \text{si } g' > 0 \text{ et } c \geq 0 \\ -2\,c\,g'(\dots) \geq 0 & \text{si } g' > 0 \text{ et } c < 0 \end{cases}$$

donc $W_c \geq 0$.

$$W_b = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f_x(b,c) - f_y(a,b)) = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\begin{cases} 2\,b\,g'(b^2 + \max(c,0)^2) & \text{si } g' < 0 \text{ et } b \leq 0 \\ -2\,b\,g'(b^2 + \min(a,0)^2) & \text{si } g' < 0 \text{ et } b > 0 \\ 2\,b\,g'(b^2 + \min(c,0)^2) & \text{si } g' > 0 \text{ et } b \geq 0 \\ -2\,b\,g'(b^2 + \max(a,0)^2) & \text{si } g' > 0 \text{ et } b < 0 \end{cases}$$

W_b s'écrit donc sous la forme $1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} 2 \mid b\,g'(b^2 + \alpha^2) \mid$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
La condition $W_b \geq 0$ s'écrit :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\, 2 \mid b\,g'(b^2 + \alpha^2) \mid \leq 1$$

Or $\mid b \mid \leq \sqrt{b^2+\alpha^2}$ donc $2 \mid b\, g'(b^2+\alpha^2) \mid \leq \mid H'(\sqrt{b^2+\alpha^2}) \mid$, donc

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\, 2 \mid b\, g'(b^2+\alpha^2) \mid \leq \frac{\Delta t}{\Delta x} \mid H' \mid .$$

et la condition (3.16) assure la monotonie. ■

3.4.1.2 En dimension quelconque

En dimension n, l'équation (3.7) d'Hamilton-Jacobi s'écrit :

$$\begin{cases} u_t + H(u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{3.17}$$

La généralisation en dimension 2 du schéma numérique précédent, pour $H(x,y) = g(x^2+y^2)$, est la suivante dans le cas $g' < 0$:

$$\begin{aligned} f(\, D_-^x v, D_+^x v, D_-^y v, D_+^y v\,) \; = \; g\; (\quad & \min(D_-^x v,0)^2 + \max(D_+^x v,0)^2 + \\ & \min(D_-^y v,0)^2 + \max(D_+^y v,0)^2 \quad). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Le schéma numérique associé est "upwind" et monotone si la condition CFL est satisfaite :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \mid H_x \mid \; + \frac{\Delta t}{\Delta y} \mid H_y \mid \; \leq \; 1 \tag{3.19}$$

De la même manière, le schéma proposé par Osher et Sethian peut se généraliser en dimension quelconque.

3.4.2 Autre schéma numérique

Kimmel et al. [Kimmel et al., 1997], motivés par le travail de Brockett et Maragos [Brockett et Maragos, 1994], ont constaté que le schéma donné par l'équation (3.20) était aussi un schéma "upwind" et produisait de meilleurs résultats dans certains cas.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } g' < 0, \;\; f(v_1,v_2) \; = \; g(\,\max(\,0, \, -v_1, v_2)^2\,) \\ \text{si } g' > 0, \;\; f(v_1,v_2) \; = \; g(\,\max(\,0, v_1, \, -v_2)^2\,) \end{array}} \tag{3.20}$$

La différence avec le schéma de l'équation (3.15) correspond à remplacer $\max(0,v_1)^2 + \max(0,-v_2)^2$ par $\max(0,v_1,-v_2)^2$. Le schéma associé à v est *monotone*, sous la même condition donnée par l'équation (3.16) et se généralise en dimension quelconque avec une condition CFL en 2D donnée par l'équation (3.19).

Dans les cas (i), (ii) et (iii) du paragraphe 3.3.5, ce schéma est équivalent au schéma proposé par Osher et Sethian dans l'équation (3.15) et fournit la bonne solution.

En outre, il vérifie la condition (iv) dans le cas des *chocs* contrairement au schéma de Osher et Sethian, ce qui explique son meilleur comportement. En effet, dans ce cas $H'(v_1) > 0$, $H'(v_2) < 0$.

- Si $g' < 0$ alors $v_1 = -a < 0$ et $v_2 = b > 0$,

$$sgn(S) \; = \; sgn\left(\frac{H(v_2) - H(v_1)}{v_2 - v_1}\right) \; = \; sgn\left(g(b^2) - g(a^2)\right)$$

- Si $b > a$, comme $g' < 0$, g est décroissante et $S < 0$, et la relation $f(v_1,v_2) = g(v_2^2) = H(v_2)$ est bien vérifiée.
- Si $a > b$, $S > 0$ et $f(v_1,v_2) = g(v_1^2) = H(v_1)$.

- De même, si $g' > 0$ alors $u_1 = a > 0$ et $u_2 = -b < 0$, $sgn(S) = sgn\left(g(a^2) - g(b^2)\right)$.
  - Si $b > a$, S est négative et $f(v_1,v_2) = g(v_2^2) = H(v_2)$.
  - Si $a > b$, S est positive et $f(v_1,v_2) = g(v_1^2) = H(v_1)$.

Le tableau 3.1 prévoyant tous les cas de figure, si l'on suppose la fonction g monotone, ce schéma numérique est alors l'unique schéma vérifiant les 4 conditions proposées par Colella et Puckett [Colella et Puckett, 1994].

3.5 Comparaison des 2 schémas

Différence entre les deux schémas Nous étudions l'évolution de l'équation $u_t + g(\mid u \mid^2)$. Plaçons nous cas le cas où la dérivée de la fonction g est négative : $g' < 0$.
L'approximation du gradient proposée par Osher et Sethian est la suivante, notée ∇_{OS}

$$\nabla_{OS}(u_n^k) = \sqrt{\min(D_- u_k^n,0)^2 + \max(D_+ u_k^n,0)^2},$$

celle proposée par Kimmel et al. et issue des travaux de Brockett et Maragos est la suivante, notée ∇_{BM}

$$\nabla_{BM}(u_n^k) = \sqrt{\max(-D_- u_k^n, D_+ u_k^n, 0)^2}.$$

Le tableau ci-dessous montre bien qu'un seul cas diffère entre ces deux schémas. Intuitivement, l'approximation du schéma de Osher et Sethian dans ce cas est une sur-estimation du gradient car les valeurs au carré des dérivées à gauche et à droite sont sommées, alors que l'approximation de Brockett et Maragos sélectionne la plus grande de ces deux valeurs.

	$D_- > 0$ et $D_+ > 0$	$D_- > 0$ et $D_+ \leq 0$	$D_- \leq 0$ et $D_+ \leq 0$	$D_- \leq 0$ et $D_+ > 0$
∇_{OS}	D_+	0	$\mid D_- \mid$	$\sqrt{D_-^2 + D_+^2}$
∇_{BM}	D_+	0	$\mid D_- \mid$	$\sqrt{\max(D_-^2, D_+^2)}$

TAB. 3.2 – *Comparaison des approximations de la norme du gradient pour les schémas d'Osher & Sethian et de Brockett & Maragos, dans le cas $g' < 0$.*

Test dans le cas d'un choc Les schémas notés OS et BM définis respectivement par l'équation (3.15) et l'équation (3.20) ne diffèrent que dans le cas de choc. La figure 3.2 représente l'érosion morphologique définie par l'équation (3.21) d'une image synthétique pour chacune des deux méthodes. L'image synthétique u_0 est définie pour $(x,y) \in [0,99] \times [0,99]$ par :

$$\forall (x,y) \in [0,99] \times [0,99] \quad u_0(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 50 \\ 100 - x & \text{si } x > 50 \end{cases}$$

C'est une image continue dont la dérivé u_{0x} passe de 1 à -1 lorsque x dépasse la valeur 50.

L'érosion crée un choc pour l'évolution de la dérivée dans l'image initiale.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \mid \nabla u \mid \tag{3.21}$$

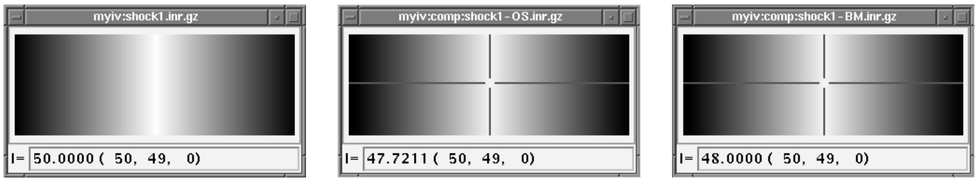
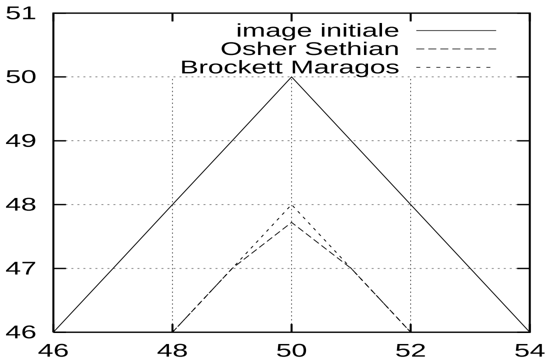


image initiale | érosion OS de taille 2 | érosion BM de taille 2



Comparaison des résultats (intensité en fonction de l'abscisse x).

FIG. 3.2 – *Comparaisons des schémas d'Osher & Sethian et de Brockett & Maragos sur une image synthétique dans le cas d'un choc. Après une érosion de taille 2, la méthode BM donne la solution exacte et la méthode OS une solution approchée.*

Tests de stabilité, condition CFL La condition CFL pour une image 2D est donnée par l'équation (3.19). Dans le cas d'une dilatation, $H(a,b) = \sqrt{a^2 + b^2}$, et $\mid H_a \mid \leq 1$, $\mid H_b \mid \leq 1$. Si $\Delta x = \Delta y = 1$, cette condition devient :

$$\Delta t \leq \frac{1}{2}$$

Pour tester l'effet du dépassement de cette condition, la figure 3.3 présente la dilatation de taille 4 pixels sur une image IRM du cerveau, et avec des pas de temps Δt variables. Le dépassement de la condition CFL peut créer des intensités supérieures aux intensités initiales de l'image. Comme attendu, le schéma BM se révèle plus stable.

3.6 Conclusion

Nous avons donc montré la supériorité du schéma de Brockett et Maragos sur celui de Osher et Sethian. Cette étude, qui n'est cependant pas le domaine de spécialité de l'auteur, peut avoir

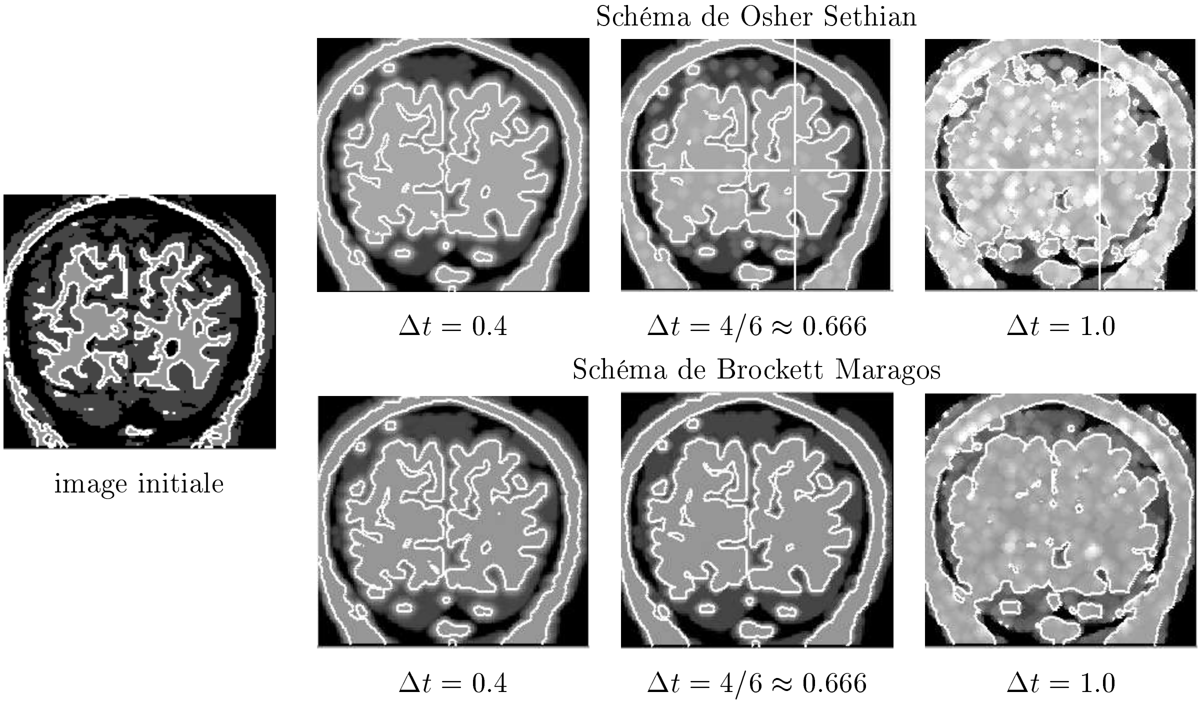


FIG. 3.3 – *Test de stabilité des schémas numériques OS et BM. Une image IRM du cerveau est transformée par une dilatation de taille 4 pixels. La condition CFL est $\Delta t \leq 0.5$. Le schéma OS développe des instabilités dès $\Delta t = 0.666$, indiquées par le curseur, alors que le schéma BM est plus stable. L'isocontour de valeur 79.5 est représenté dans chaque image.*

des conséquences importantes dans le domaine du traitement d'images qui utilise classiquement l'équation de Osher et Sethian. En outre, la modification proposée est une simplification et il est très facile de la mettre en œuvre dans tous les programmes existants (modification d'une ligne de code...). Cependant, il convient de rechercher une approximation optimale et donc d'approfondir cette étude, notamment par une étude expérimentale plus poussée. Dans le chapitre suivant, nous présentons quelques notions du traitement multi-échelle linéaire. Ces notions sont importantes pour la compréhension de la méthode de détection des lignes centrales de structures tubulaires proposée dans la partie III.

Chapitre 4

Traitement multi-échelle linéaire

« … *Thus if spurious resolution is prohibited then the family of gaussians is unique.* »
Jan J. Koenderink *The Structure of Images.* 1984.

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats sur le traitement multi-échelle linéaire, avec en particulier différentes propriétés du noyau gaussien et la normalisation des dérivées proposée par Lindeberg et qui servira pour la détection de lignes centrales des vaisseaux.

Ce chapitre présente des résultats classiques sur le traitement multi-échelle linéaire, mais qui seront utiles pour la suite, en particulier pour la partie III. Une première partie reprend la démonstration de l'unicité du noyau gaussien sous les conditions de linéarité, d'invariance par isométrie et par changement d'échelle, proposée par Florack [Florack, 1993]. L'intérêt de cette démonstration est d'utiliser le Pi-théorème et d'exprimer l'analyse multi-échelle en terme de variables sans dimension. Dans une deuxième partie, nous montrons différentes propriétés de la convolution avec un noyau gaussien : la séparabilité, la propriété de semi-groupe, le calcul des dérivées, l'équivalence avec l'équation de la chaleur, les propriétés d'invariance par changement d'échelle et la γ-normalisation des dérivées. Le lecteur déjà familiarisé avec ces notions pourra parcourir rapidement ce chapitre.

4.1 Unicité du noyau gaussien

L'unicité du noyau gaussien pour un traitement multi-échelle linéaire des images, et sous certaines conditions d'invariance, a été démontré de différentes manières [Iijima, 1971; Koenderink, 1984; Yuille et Poggio, 1986; Babaud et al., 1986; Lindeberg, 1990; Florack et al., 1992; Alvarez et al., 1993]. Nous avons choisi de reprendre ici la démonstration proposée par Florack et al. [Florack et al., 1992; Florack, 1993]. Cette démonstration utilise la notion d'indépendance des unités de mesures pour prendre en compte l'invariance par changement d'échelle de l'analyse multi-échelle. Les auteurs montrent ainsi que la convolution par un noyau gaussien est la seule représentation multi-échelle vérifiant les propriétés de linéarité, de semi-groupe, d'invariance par translation, par isométrie, et d'invariance par changement d'échelle.

Démonstration :

L'énoncé du Pi-théorème est le suivant :

Théorème 3 (Pi-théorème) *:*

Soient z_μ, $\mu \in 1 \dots N$, des quantités physiques fondamentales indépendantes, dont le changement d'échelle se fait selon $z_\mu \longmapsto \lambda_\mu z_\mu$, et soient x_i, $i = 1 \dots D$, des quantités dérivées, qui changent d'échelle selon

$$x_i \longmapsto \prod_{\mu=1}^{N} \lambda_\mu^{\alpha_{\mu i}} x_i$$

pour une matrice $N \times D$ de constantes $A = (\alpha_{\mu i})$, qui traduit la dépendance physique de la quantité x_i par rapport à l'unité fondamentale indexée par μ. Soit R le rang de la matrice A. Alors il existe $D - R$ monômes sans dimension et indépendants :

$$\pi_a = \prod_{i=1}^{D} x_i^{\beta_{ia}} \quad a = 1 \dots D - R,$$

et toute autre quantité sans dimension peut s'exprimer en fonction des π_a. La matrice $B = (\beta_{ia})$ de dimensions $D \times (D - R)$ satisfait le système linéaire $A\,B = 0$.

Nous rappelons que tout opérateur linéaire et invariant par translation peut s'exprimer comme un opérateur de **convolution**. Supposons que la représentation multi-échelles $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ d'un signal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est construite par convolution avec une famille de fonctions à un paramètre (noyau) $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$:

$$L(.,t) = h(.,\sigma) * f.$$

Dans le domaine de Fourier ($\omega \in \mathbb{R}^n$), on peut l'écrire :

$$\hat{L}(\omega,\sigma) = \hat{h}(\omega,\sigma)\hat{f}(\omega). \tag{4.1}$$

Le *Pi-théorème* (théorème 3) est un résultat en physique qui affirme que si un processus physique est invariant par changement d'échelle, alors il est possible de l'exprimer en termes de variables sans dimension. Plus de détails sur ce théorème sont donnés dans [Olver, 1986]. Dans le cas de la représentation multi-échelle linéaire, deux unités sont utilisées : l'intensité I et la longueur l ($N = 2$), les quantités dérivées et leurs dimensions sont $\hat{L} \equiv I$, $\hat{f} \equiv I$, $\omega \equiv l^{-1}$, et $\sigma \equiv l$ ($D = 4$). Selon les notations du théorème, la matrice A peut s'écrire :

	$\hat{L}$	$\hat{f}$	ω	σ
I	1	1	0	0
l	0	0	-1	1

Le rang de cette matrice est $R = 2$ et on peut donc introduire deux variables sans dimension $\pi_1 = \frac{\hat{L}}{\hat{f}}$ et $\pi_2 = \omega\sigma$. L'équation (4.1) peut alors s'écrire en fonction de ces deux variables :

$$\frac{\hat{L}(\omega,\sigma)}{\hat{f}(\omega,\sigma)} = \hat{h}(\omega,\sigma) = \tilde{h}(\omega\sigma)$$

L'**invariance par rotation** implique que la fonction $\hat{h}$ ne dépend pas d'une orientation particulière, ce qui implique que $\hat{h}$ est fonction du module de $\omega\sigma$, c'est-à-dire de $\mid \omega\sigma \mid$.
D'autre part, la **propriété de semi-groupe** se traduit par la relation

$$\hat{h}(\omega,\sigma_1)\hat{h}(\omega,\sigma_2) = \hat{h}(\omega,\varphi^{-1}(\varphi(\sigma_1) + \varphi(\sigma_2)))$$

et permet de déduire que la fonction $\tilde{h}(\omega,\sigma)$ est de la forme $exp(-\alpha \mid \omega\sigma \mid^p)$.

En dimension supérieure à un, la condition de séparabilité permet de fixer h comme une fonction gaussienne [Florack et al., 1992]. En dimension supérieure ou égale à un, [Pauwels et al., 1995] montrent que la valeur $p = 2$ est la seule valeur permettant l'existence d'un générateur et d'avoir un noyau de convolution positif. L'unicité du noyau gaussien est ainsi obtenue sous les hypothèses citées précédemment. ■

4.2 Propriétés de la fonction gaussienne

Les propriétés d'invariance du produit de convolution avec une fonction gaussienne justifient l'importance de son utilisation dans le traitement multi-échelle linéaire des images. Dans ce paragraphe, nous montrons certaines propriétés de la fonction gaussienne et de ses dérivées.

4.2.1 Définitions

DÉFINITION 12 (PRODUIT DE CONVOLUTION) *:*

Soient deux fonctions f, g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ sur $\Omega \in \mathbb{R}^n$, avec f bornée et g intégrable sur Ω, et $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, le produit de convolution de f avec g est défini par la fonction

$$(f * g)(\mathbf{x}_0) \;=\; \int_\Omega f(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}).g(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Il possède les propriétés suivantes :
- il est **commutatif**
- il est **linéaire**
- sa **dérivée** vérifie

$$(f * g)' \;=\; f * g' \;=\; f' * g \tag{4.2}$$

DÉFINITION 13 (FONCTION GAUSSIENNE) *:*

La fonction gaussienne d'écart-type $\sigma = \sqrt{t}$ sera notée g_σ ou G_t, pour $\mathbf{x} = (x_1, \ldots ,x_n) \in \mathbb{R}^n$, elle s'exprime ainsi :

$$g_\sigma(\mathbf{x}) \;=\; \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} e^{\frac{-\mathbf{x}\,.\,\mathbf{x}}{2\sigma^2}} \tag{4.3}$$

$$G_t(\mathbf{x}) \;=\; \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi t}\right)^n} e^{\frac{-\mathbf{x}\,.\,\mathbf{x}}{2t}} \tag{4.4}$$

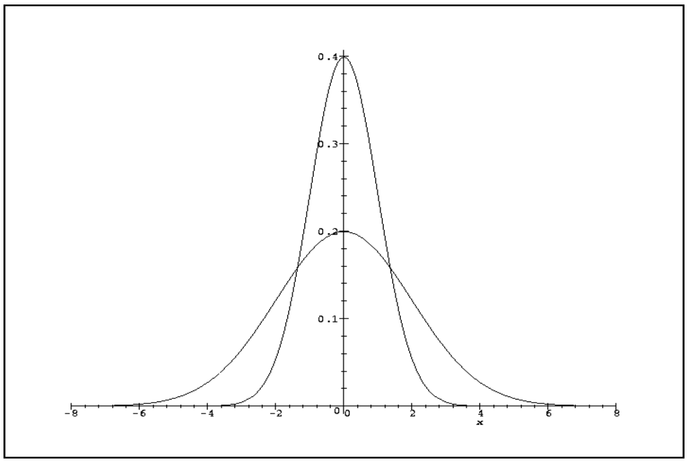


FIG. 4.1 – *Fonction gaussienne monodimensionnelle avec $\sigma = 1$ et $\sigma = 2$.*

4.2.2 Séparabilité

Le produit de convolution avec une fonction gaussienne est séparable, c'est-à-dire que la convolution dans $\mathbb{R}^n$ peut s'obtenir par n convolutions unidimensionnelles dans chaque dimension. Cette propriété vient de la définition de la fonction gaussienne :

$$\begin{aligned} g_\sigma^{nD}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} e^{\frac{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-x_1^2}{2\sigma^2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-x_n^2}{2\sigma^2}} \\ &= \prod_{i\in 1..n} g_\sigma^{1D}(x_i) \end{aligned}$$

Cette séparabilité est très pratique car elle permet un gain de temps considérable dans le calcul de la convolution. En outre, des schémas récursifs ont été proposés pour accélérer le produit de convolution par la fonction gaussienne et ses dérivées [Deriche, 1993; Aldroubi et Unser, 1994; Unser et Eden, 1994]. Le temps de calcul du produit de convolution n'est alors plus dépendant de l'écart-type de la gaussienne.

4.2.3 Propriété de semi-groupe

Cette propriété s'exprime ainsi :

Propriété 1 (semi-groupe) *:*

Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, et $\sigma_1 = \sqrt{\alpha}$, $\sigma_2 = \sqrt{\beta}$, la convolution d'une gaussienne G_α avec une gaussienne G_β est égale à une gaussienne $G_{\alpha+\beta}$:

$$G_\alpha * G_\beta = G_{\alpha+\beta}$$

ou encore

$$g_{\sigma_1} * g_{\sigma_2} = g_{\sqrt{\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2}}.$$

Démonstration :

Le produit de convolution avec une fonction gaussienne étant séparable, il suffit de vérifier cette relation dans le cas 1D :

$$\begin{aligned} (G_\alpha * G_\beta)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{\frac{-(x-t)^2}{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} e^{\frac{-(t)^2}{2\beta}}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha\,\beta}} e^{-\frac{1}{2\alpha\beta}E(x,t,\alpha,\beta)} dt \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} E &= \beta(x-t)^2 + \alpha t^2 \\ &= (\alpha+\beta)t^2 - 2\beta x t + \beta x^2 \\ &= (\alpha+\beta)\left[\left(t - \frac{\beta}{\alpha+\beta}x\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}\right)x^2\right] \\ &= (\alpha+\beta)\left[\left(t - \frac{\beta}{\alpha+\beta}x\right)^2 + \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}x^2\right] \\ &= (\alpha+\beta)\left(t - \frac{\beta}{\alpha+\beta}x\right)^2 + \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x^2, \end{aligned}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
(G_\alpha * G_\beta)(x) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha\,\beta}}\, e^{-\frac{1}{2\alpha\beta}\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x^2} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}(t-\frac{\beta}{\alpha+\beta}x)^2} dt &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha\,\beta}}\, e^{-\frac{x^2}{2(\alpha+\beta)}}\sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\alpha+\beta}} e^{-\frac{x^2}{2(\alpha+\beta)}} \\
&= G_{\alpha+\beta}(x).
\end{aligned}
$$

■

4.2.4 Dérivées de la fonction gaussienne

L'expression des dérivées spatiales et de la dérivée par rapport à l'échelle de la fonction gaussienne est utilisée à plusieurs reprises dans ce manuscrit. Nous présentons donc ces expressions ci-dessous.

4.2.4.1 Dérivées spatiales

Les dérivées partielles de la fonction gaussienne à l'ordre n peuvent s'exprimer à l'aide des polynômes d'Hermite. Les dérivées partielles par rapport à x_i aux ordres 1, 2 et 3 sont :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G(\mathbf{x},t)}{\partial x_i} &= \frac{-x_i}{t} G(\mathbf{x},t) \\
\frac{\partial^2 G(\mathbf{x},t)}{\partial x_i^2} &= \left(\frac{x_i^2 - t}{t^2}\right) G(\mathbf{x},t) \\
\frac{\partial^3 G(\mathbf{x},t)}{\partial x_i^3} &= \left(\frac{-x_i^3 + 3x_i t}{t^3}\right) G(\mathbf{x},t)
\end{aligned}
$$

Définissons les polynômes d'Hermite P_k, $k \in \mathbb{Z}^+$ tels que

$$
\begin{aligned}
P_0(x_i,t) &= 1 \\
\frac{\partial^k G(\mathbf{x},t)}{\partial x_i^k} &= \frac{P_k(x_i,t)}{t^k} G(\mathbf{x},t),
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

alors la relation de récurrence suivante est satisfaite :

$$
P_{k+1}(x_i,t) = -x_i P_k(x_i,t) + t\frac{\partial P_k}{\partial x_i}(x_i,t). \tag{4.6}
$$

Nous notons $C_{k,j}$, $j \in [0,k]$ les coefficients du polynôme P_k tels que $P_k(x_i,t) = \sum_{j=0}^{k} C_{k,j}(t)\, x_i^j$. Les coefficients du polynôme à P_{k+1} sont alors définis de manière récursive à partir des coefficients du polynôme P_k de la manière suivante :

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
C_{k+1,0} & = t\, C_{k,1} & \\
C_{k+1,j} & = -C_{k,j-1} + (j+1)\, t\, C_{k,j+1} & ,\forall j \in [1,k] \\
C_{k+1,k+1} & = (-1)^k & \\
C_{k+1,j} & = 0 & ,\forall j > k+1.
\end{array}
\right.
\tag{4.7}
$$

Le tableau 4.1 donne les coefficients de ces polynômes jusqu'à l'ordre 7.

k \ j	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	-1						
2	-1 t	0	1					
3	0	$3\,t$	0	-1				
4	$3\,t^2$	0	$-6\,t$	0	1			
5	0	$-15\,t^2$	0	$10\,t$	0	-1		
6	$-15\,t^3$	0	$45\,t^2$	0	$-15\,t$	0	1	
7	0	$105\,t^3$	0	$-105\,t^2$	0	$21\,t$	0	-1

TAB. 4.1 – *Coefficients $C_{k,i}$ des polynômes d'Hermite P_k.*

4.2.4.2 Dérivée par rapport à l'échelle

L'expression de la dérivée de la fonction gaussienne par rapport à l'échelle t est :

$$\frac{\partial G(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \frac{\mathbf{x}\,.\,\mathbf{x} - n\,t}{2\,t^2}\,G(\mathbf{x},t) \tag{4.8}$$

Un résultat classique est la relation d'équivalence entre le produit de convolution avec une fonction gaussienne et l'équation de diffusion de la chaleur. Cette équivalence est montrée dans le paragraphe suivant.

4.3 Équation de la chaleur

PROPRIÉTÉ 2 (ÉQUIVALENCE ENTRE LA CONV. GAUSSIENNE ET L'ÉQ. DE LA CHALEUR) *:*

Effectuer le produit de convolution d'une fonction f bornée avec une fonction gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type σ est équivalent à faire évoluer l'équation de propagation de la chaleur

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(\mathbf{x},0) & = & u_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial t} & = & \Delta u \end{array}\right. \tag{4.9}$$

jusqu'à une échelle $t = \frac{\sigma^2}{2}$.

Démonstration :

Existence d'une solution

La fonction gaussienne vérifie les équations (4.5) et (4.8), ce qui donne la relation :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\mathbf{x}\,.\,\mathbf{x} - n\,t}{2\,t^2}\,G(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 G(\mathbf{x},t)}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2}\Delta G.$$

La fonction $h(\mathbf{x},t) = G(\mathbf{x},2t)$ vérifie alors l'équation de la chaleur avec pour condition initial un dirac :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \Delta h,$$

et le produit de convolution de h avec la fonction initiale f, noté $u(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x}) * h(\mathbf{x},t)$ vérifie l'équation (4.9), puisque

$$\begin{array}{rcl} u(\mathbf{x},0) & = & f(\mathbf{x}) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} & \overset{[4.2]}{=} & f * \dfrac{\partial h}{\partial t} = f * \Delta h = \Delta u \end{array}$$

où nous définissons $u(\mathbf{x},0) = lim_{t\to 0^+} u(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x})$. La solution de 4.9 à l'instant t correspond donc au produit de convolution de $f(\mathbf{x})$ avec $G(\mathbf{x},2t)$, ce qui peut encore s'exprimer ainsi :
convoluer une fonction avec une gaussienne d'écart-type σ est équivalent à faire évoluer cette fonction selon l'équation de la chaleur jusqu'à un temps $t = \frac{\sigma^2}{2}$.

Unicité de la solution

En outre, nous pouvons montrer l' unicité d'une solution continue et bornée (cette démonstration est reprise d'un cours de DEA de Frédéric Guichard et Jean-Michel Morel). En supposant deux solutions v,w distinctes de l'équation (4.9), la différence $u = v - w$ est alors aussi solution de l'équation de la chaleur avec une valeur initiale $u(\mathbf{x},0) = 0$.

Supposons par contradiction que $u(\mathbf{x},t)$ n'est pas la fonction nulle. La fonction $u^\varepsilon = e^{-\varepsilon t}(G_h * u)(\mathbf{x},t)$ tend uniformément vers 0 lorsque t tend vers 0 ou vers $+\infty$. Cette fonction possède un maximum en un point $(\mathbf{x}_0,t_0)$ que l'on peut supposer positif, via un changement de signe de u en $-u$. Le point $(\mathbf{x}_0,t_0)$ vérifie alors

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}_0,t_0) & = & 0 \\ \Delta u^\varepsilon(\mathbf{x}_0,t_0) & \leq & 0 \end{array}$$

Puisque u est solution de l'équation de la chaleur, on a aussi

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}_0,t_0) = \left(-\varepsilon u^\varepsilon + e^{-\varepsilon t}\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)(\mathbf{x}_0,t_0) \\ & = & -\varepsilon u^\varepsilon(\mathbf{x}_0,t_0) + e^{-\varepsilon t}\Delta u^\varepsilon(\mathbf{x}_0,t_0) \\ & \leq & -\varepsilon u^\varepsilon(\mathbf{x}_0,t_0) < 0. \end{array}$$

Ce qui aboutit à une contradiction. ■

4.4 Propriété d'invariance par changement d'échelle

Ces propriétés sont présentées dans les travaux de Lindeberg [Lindeberg, 1994, pages 44-47]. L'invariance par changement d'échelle est une propriété de l'analyse multi-échelle déjà définie dans le paragraphe 2.1.3. Cette invariance est vérifiée si pour tout changement d'échelle de l'image initiale f par un facteur s donnant une image $\hat{f}$, et pour toute échelle t, il existe une échelle $\hat{t}$ telle que $R(f,t)(\mathbf{x}) = R(\hat{f},\hat{t})(s\,\mathbf{x})$. Dans le cas d'une analyse multi-échelle linéaire obtenue par convolution avec des fonctions gaussiennes, la relation entre t et $\hat{t}$ est $\hat{t} = s^2 t$.

4.4.1 Invariance par changement d'échelle

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ le signal, sa représentation multi-échelle est notée $R : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et est définie par

$$\begin{aligned} R(f,0) &= f \\ R(f,t) &= G(\mathbf{x},t) * f = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} G(\xi,t) f(\mathbf{x} - \xi) d\xi \end{aligned}$$

où $G(\mathbf{x},t) = G_t(\mathbf{x})$ est la fonction gaussienne définie par l'équation (4.4).

Propriété 3 (Invariance par changement d'échelle) *:*

Soient les nouvelles variables $\hat{\mathbf{x}} = s\mathbf{x}$, $\hat{t} = s^2 t$ et la fonction $\hat{f}(\hat{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x})$ qui traduit un agrandissement de l'image d'un facteur s, alors

$$R(\hat{f},\hat{t})(\hat{\mathbf{x}}) = R(f,t)(\mathbf{x})$$

Démonstration :

Il est facile de vérifier la relation suivante :

$$G(\mathbf{x},t) = s^n G(\hat{\mathbf{x}},\hat{t}). \tag{4.10}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} R(\hat{f},\hat{t})(\hat{\mathbf{x}}) &= \int_{\hat{\xi} \in \mathbb{R}^n} G(\hat{\xi},\hat{t}) \hat{f}(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\xi}) d\hat{\xi} \\ &= \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{s^n} G(\xi,t) f(\mathbf{x} - \xi) s^n d\xi \\ &\quad \text{après le changement de variable } \hat{\xi} = s\xi \ (d\hat{\xi} = s^n d\xi) \\ &= R(f,t)(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

■

4.4.2 Généralisation pour les dérivées de l'image

Notation 1 (notation multi-index) *:*

La notation multi-index est définie de la manière suivante : soit $m = (m_1, \ldots, m_n)^T \in \mathbb{Z}_+^n$, avec $m_i \in \mathbb{Z}_+$ et $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Alors $\mathbf{x}^m$ est défini par

$$\mathbf{x}^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

et l'opérateur de dérivation d'ordre $|m| = m_1 + \cdots + m_n$: $\partial_{\mathbf{x}^m}$ est défini par

$$\partial_{\mathbf{x}^m} = \partial_{x_1^{m_1}} \partial_{x_2^{m_2}} \ldots \partial_{x_n^{m_n}}.$$

Nous pouvons alors définir les dérivées multi-échelles $R_{\mathbf{x}^m}(f,t)(\mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{x}^m} R(f,t) = G_{\mathbf{x}^m}(\mathbf{x},t) * f$. La relation (4.10) se généralise alors la manière suivante

$$G_{\mathbf{x}^m}(\mathbf{x},t) = s^{n+|m|} G_{\hat{\mathbf{x}}^m}(\hat{\mathbf{x}},\hat{t}) \tag{4.11}$$

Pour montrer cette relation, il suffit de la vérifier pour la dérivée partielle par rapport à une seule variable, pour $m_1 \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} G_{\hat{x}_1^{m_1}}(\hat{\mathbf{x}},\hat{t}) &\overset{[4.5]}{=} \frac{P_{m_1}(\hat{\mathbf{x}},\hat{t})}{\hat{t}^{m_1}} G(\hat{\mathbf{x}},\hat{t}) \\ &\overset{[4.10]}{=} \frac{1}{s^n} \frac{P_{m_1}(\hat{\mathbf{x}},\hat{t})}{\hat{t}^{m_1}} G(\mathbf{x},t). \end{aligned}$$

Or $\hat{t}^{m_1} = s^{2m_1} t^{m_1}$, et $P_{m_1}(\hat{\mathbf{x}},\hat{t}) = s^{m_1} P_{m_1}(\mathbf{x},t)$, ce qui donne bien

$$\begin{aligned} G_{\hat{x}_1^{m_1}}(\hat{\mathbf{x}},\hat{t}) &= \frac{1}{s^{n+m_1}} \frac{P_{m_1}(\mathbf{x},t)}{t^{m_1}} G(\mathbf{x},t) \\ &= \frac{1}{s^{n+m_1}} G_{x_1^{m_1}}(\mathbf{x},t). \end{aligned}$$

Nous obtenons alors la relation :

$$R_{\mathbf{x}^m}(f,t)(\mathbf{x}) = s^{|m|} R_{\hat{\mathbf{x}}^m}(\hat{f},\hat{t})(\hat{\mathbf{x}}). \tag{4.12}$$

Les coordonnées ξ sans dimension sont définies par $\xi = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}$ et $\hat{\xi} = \frac{\hat{\mathbf{x}}}{\sqrt{\hat{t}}}$ et les opérateurs de dérivation normalisés associés par $\partial_{\xi^m} = t^{|m|/2} \partial_{\mathbf{x}^m}$ et $\partial_{\hat{\xi}^m} = \hat{t}^{|m|/2} \partial_{\hat{\mathbf{x}}^m}$.
La relation suivante se déduit alors de l'équation (4.12) :

$$\boxed{R_{\xi^m}(f,t)(\mathbf{x}) = R_{\hat{\xi}^m}(\hat{f},\hat{t})(\hat{\mathbf{x}}).} \tag{4.13}$$

4.5 Normalisation

4.5.1 γ-normalisation

Une difficulté dans une analyse multi-échelle d'une image est de comparer des résultats obtenus à des échelles différentes sachant que l'intensité, ainsi que ces dérivées spatiales, sont des fonctions décroissante de l'échelle. Lindeberg [Lindeberg, 1994; Lindeberg, 1996] a introduit la notion de dérivée normalisée pour essayer de résoudre cette difficulté. A une échelle t définie par $t = \sigma^2$, où σ est l'écart-type d'une fonction gaussienne, la **dérivée γ-normalisée** est définie par

$$\partial_{x,\gamma-norm} = t^{\frac{\gamma}{2}} \partial_x \tag{4.14}$$

Nous avons montré dans le paragraphe 4.4.2 que le choix de la valeur 1 pour γ permet d'assurer une invariance par changement d'échelle. Cependant, en fonction des informations que l'on veut extraire de l'image, d'autres valeurs du paramètre γ peuvent être utilisées. Des calculs sur des modèles analytiques permettent alors trouver une relation entre la taille des structures, le paramètre γ, et l'échelle à laquelle une structure est détectée [Lindeberg, 1996]. Le choix de γ se fait alors selon la méthode suivante :

a) déterminer les points qui nous intéressent (par exemple les contours),
b) calculer la position de ces points pour une fonction analytique donnée,
c) déterminer en fonction de γ l'échelle pour laquelle la réponse est maximale et choisir la valeur de γ.

4.5.2 Calcul de γ pour différents modèles

Contour "gaussien" Nous considérons la primitive d'une fonction gaussienne comme un modèle de l'intensité de l'image à travers un contour. Son expression est la suivante en dimension $n = 2$:

$$\forall y \in \mathbb{R},\ I(x,y) \ = \ \int_{-\infty}^{x} G_{t_0}(u)du \tag{4.15}$$

pour un réel positif t_0 fixé. La représentation multi-échelle linéaire utilisée est le produit de convolution de l'image avec une fonction gaussienne G_t. La fonction de réponse est définie par la dérivée de l'image dans la direction du contour pour une échelle t donnée :

$$R(I,t) \ = \ \partial_x(I * G_t) \ = \ \frac{\partial I}{\partial x} * G_t \ = \ G_{t_0} * G_t \ = \ G_{t_0+t}$$

et sa γ-normalisation est :

$$R_\gamma(I,t) \ = \ \partial_{x,\gamma-norm}(I * G_t) \ = \ t^{\gamma/2}\, G_{t_0+t}$$

Si nous reprenons les trois points a,b,c de la méthode décrite : les points qui nous intéressent sont les points de pente maximale, c'est-à-dire les points d'abscisse nulle pour le modèle choisi, et la réponse normalisée a pour expression

$$R_\gamma(I,t)_{x=0} = \frac{t^{\gamma/2}}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{t_0+t}}. \tag{4.16}$$

Nous cherchons la réponse maximale à travers les échelles, pour cela nous calculons la dérivée partielle de la réponse par rapport à t (la réponse au carré est dérivée pour simplifier les calculs). Ce qui donne :

$$\partial_t\left(\frac{t^\gamma}{t_0+t}\right) \ = \ \frac{\gamma t^{\gamma-1}}{t_0+t} + \frac{-t^\gamma}{(t_0+t)^2} \ = \ \frac{t^{\gamma-1}}{(t_0+t)^2}\left(\gamma t_0 - (1-\gamma)\,t\right).$$

Si $0 < \gamma < 1$, alors $R_\gamma(I,t)_{(x=0)}$ est une fonction positive pour $t \in \mathbb{R}^+$, qui s'annule en 0 et en $+\infty$, elle a alors un unique maximum pour t en $t_{max} \ = \ \frac{\gamma}{1-\gamma}t_0$. Si on veut que l'échelle pour laquelle la réponse est maximale soit t_0 alors il faut choisir $\gamma \ = \ \frac{1}{2}$.

Disque gaussien Un disque gaussien (*Gaussian blob* en anglais) en dimension 2 est une structure de type circulaire dont l'équation est :

$$I(x,y) = G_{t_0}(x,y) \tag{4.17}$$

La fonction multi-échelle associée est $T(x,y,t) \ = \ G_{t_0+t}(x,y) \ = \ \frac{1}{2\pi(t+t_0)}e^{-\frac{x^2+y^2}{2(t+t_0)}}$.
Les points recherchés sont les contours du disque, définis par le passage par zéro des dérivées secondes de l'image dans la direction du gradient : $T_{\xi\xi} = 0$. En un point $M = (x,y)$, un vecteur unitaire dans la direction du gradient est $\xi \ = \ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-x,-y)^t$ et le Hessien H en M vaut

$$H \ = \ \begin{pmatrix} x^2-(t+t_0) & xy \\ xy & y^2-(t+t_0) \end{pmatrix} \frac{T}{(t+t_0)^2}$$

d'où

$$\begin{aligned}
T_{\xi\xi} &= \xi^t H \xi \\
&= \frac{1}{(t+t_0)^2} \frac{\left(\left(x^2-(t+t_0)\right)x + xy^2\right)x + \left(\left(y^2-(t+t_0)\right)y + x^2y\right)y}{x^2+y^2} T(x,y,t) \\
&= \frac{1}{(t+t_0)^2} \frac{x^4+2x^2y^2+y^4-(x^2+y^2)(t+t_0)}{x^2+y^2} T(x,y,t) \\
&= \frac{x^2+y^2-(t+t_0)}{(t+t_0)^2} T(x,y,t)
\end{aligned}$$

Le cercle de rayon $\sqrt{t+t_0}$ représente donc les passages du gradient par un maximum, c'est-à-dire les points qui nous intéressent pour le modèle choisi. Il reste à déterminer (en fonction de γ) l'échelle pour laquelle la réponse est maximale. La réponse est définie par la dérivée de l'intensité dans la direction du gradient :

$$T_\xi(x,y,t) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t+t_0} T(x,y,t) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\pi(t+t_0)^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2(t+t_0)}}$$

pour simplifier, la réponse est choisie comme le carré de cette expression :

$$R(x,y,t) = T_\xi^2 = \frac{x^2+y^2}{4\pi^2(t+t_0)^4} e^{-\frac{x^2+y^2}{t+t_0}}$$

sa dérivée par rapport à l'échelle est :

$$\partial_t R(x,y,t) = T_\xi^2 \left[\frac{-4}{t+t_0} + \frac{x^2+y^2}{(t+t_0)^2}\right] = \frac{T_\xi^2}{(t+t_0)^2}\left[-4(t+t_0)+x^2+y^2\right].$$

La réponse est normalisée : $R_\gamma(x,y,t) = t^\gamma T_\xi^2$. La dérivée partielle de cette réponse par rapport à l'échelle est :

$$\partial_t\left(R_\gamma(x,y,t)\right) = \frac{t^{\gamma-1} T_\xi^2}{(t+t_0)^2}\left[\gamma(t+t_0)^2 + t\left(x^2+y^2-4(t+t_0)\right)\right]$$

avec $x^2+y^2 = t+t_0$

$$\partial_t\left(R_\gamma(I,t)\right) = 0 \Longrightarrow t = \frac{\gamma}{3-\gamma} t_0,$$

ce qui donne la relation recherchée entre l'échelle qui donne la réponse maximale et la taille de la structure.

4.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre des propriétés utiles du produit de convolution avec une fonction gaussienne et ses dérivées. Nous avons en particulier présenté l'unicité de la convolution par un noyau gaussien pour un traitement multi-échelle linéaire, invariant par isométrie et par changement d'échelle. Nous avons montré la propriété de semi-groupe de la fonction gaussienne; calculé ses dérivées spatiales en fonction des polynômes d'Hermite; montré l'équivalence entre la convolution par un noyau gaussien et l'évolution de l'équation de la chaleur; montré les propriétés d'invariance par changement d'échelle de la convolution par un noyau gaussien et aussi par les dérivées de ce noyau. Enfin, nous avons introduit la γ-normalisation des dérivées ainsi que le calcul permettant d'extraire des contours ou des disques à l'aide de modèles analytiques.

Ces notions sont déjà présentes dans la littérature et ce chapitre a permis de les introduire afin de mieux comprendre la méthode de détection des lignes centrales qui sera présentée dans la partie III.

Conclusion

Dans cette première partie, nous avons introduit des notions sur le traitement multi-échelle des images à travers l'axiomatique présentée par Alvarez, Guichard, Lions et Morel. Cette axiomatique permet d'exprimer de nombreuses approches multi-échelles existantes sous la forme d'équations aux dérivées partielles et aussi de déduire de nouvelles équations en fonction des propriétés d'invariance du traitement étudié. Parmi ces différents traitements multi-échelle, nous avons présenté l'équation diffusion de la chaleur, les opérations morphologiques de dilatation et d'érosion, l'équation de diffusion anisotrope proposée par Perona et Malik, les équations d'analyse multi-échelle morphologiques euclidienne et affine.

Dans un deuxième chapitre, nous avons présenté et comparé des schémas numériques permettant d'approximer les équations d'Hamilton-Jacobi dans le cadre de l'évolution des courbes de niveau. L'évolution des courbes de niveaux est utilisée en traitement d'images pour la segmentation. Cette technique met en œuvre une équation aux dérivées partielles qui est un cas particulier de l'équation d'Hamilton-Jacobi et nécessite un schéma numérique adapté. Les travaux de Osher et Sethian ont permis de proposer un schéma numérique efficace pour ce type d'équations. Nous présentons dans ce chapitre les notions nécessaires à la compréhension du schéma numérique proposé par Osher et Sethian, ainsi que l'explication de son bon comportement. Nous montrons q'un autre schéma numérique, proposé dans le contexte des opérations morphologiques par Brockett et Maragos, possède les mêmes avantages mais se comporte mieux dans le cas des chocs. La différence entre les deux schémas numériques est assez simple, elle correspond grossièrement à remplacer

$$\min(D_- u_k^n, 0)^2 + \max(D_+ u_k^n, 0)^2 \quad \text{par} \quad \max(-D_- u_k^n, D_+ u_k^n, 0)^2.$$

Ces deux approximations de la norme du gradient au carré ne diffèrent que dans un cas sur quatre en fonction des signes de $D_- u_k^n$ et de $D_+ u_k^n$: c'est le cas $D_- u_k^n < 0$ et $D_+ u_k^n > 0$ qui correspond à un choc, et pour lequel nous avons montré que le deuxième schéma possède un meilleur comportement.

Dans un troisième chapitre, nous avons introduit des notions sur les propriétés de la convolution de l'image par une fonction gaussienne et ses dérivées. Nous avons en particulier présenté la démonstration proposée par Florack et al. [Florack et al., 1992] de l'unicité de la convolution par un noyau gaussien pour un traitement multi-échelle linéaire, invariant par isométrie et par changement d'échelle. Nous avons montré des propriétés connues de la fonction gaussienne telles que la propriété de semi-groupe, l'expression des dérivées spatiales en fonction des polynômes d'Hermite, l'équivalence entre la convolution par un noyau gaussien et l'évolution de l'équation de la chaleur, et les propriétés d'invariance par changement d'échelle de la convolution par un noyau gaussien et aussi par les dérivées de ce noyau. Enfin, nous avons introduit la γ-normalisation des dérivées ainsi que le calcul permettant d'extraire des contours ou des disques à l'aide de modèles analytiques.

La partie suivante est consacrée à la restauration des images et la réduction du bruit à l'aide de l'équation aux dérivées partielles proposée par Perona et Malik, et permettant une diffusion non-homogène et anisotrope des images.

Deuxième partie

Restauration des images, diffusion anisotrope tridimensionnelle

Notations

Dans cette partie, les notations suivantes seront utilisées :

	Général :
x_i	i-ème composante du vecteur x,
$\bar{x} + dx_i$	le vecteur $(x_1, \cdots ,x_i + dx_i, \cdots ,x_n)$,
v^*	où v est une information définie sur $\mathbb{R}^n$ (scalaire ou vecteur), représente cette information lissée (en général par une convolution gaussienne),

	Définition de l'image :
n	dimension de l'image,
$\mathbb{R}$	ensemble des réels,
$\bar{x}$	un vecteur de $\mathbb{R}^n$ ou un point de l'image,
$u(\bar{x},t)$	fonction intensité de l'image en fonction de l'échelle t, fonction de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$,
u_0	image initiale,
Ω	domaine de définition de $u_t(\bar{x}) = u(\bar{x},t)$,
h_k	taille d'un pixel dans la direction de la dimension k,
dx_k	petite variation de la k-ième composante du vecteur $\bar{x}$,

	Opérateurs différentiels :
Δu	opérateur laplacien de la fonction u,
∇u	vecteur gradient de la fonction u,
$div\,(u)$	opérateur divergence de la fonction u,
$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$	dérivée partielle de u par rapport à la composante x,
$\mid \nabla u \mid$	norme du gradient de l'image u,

	Diffusion :
$g(.)$	représente la fonction de diffusion, introduite par l'équation de Perona et Malik,
κ	seuil sur la norme du gradient,
$E(u)$	énergie à minimiser en fonction d'une image u,
$\Phi(.)$	représente une fonction de diffusion, introduite par l'approche variationnelle de la diffusion,
β	coefficient d'attache aux données initiales,
D	matrice (ou tenseur) de diffusion,
$\mathbf{F}$	le champ de vecteurs correspondant au flux de diffusion,
$\varphi(.)$	représente la fonction de diffusion associée au flux de diffusion,

	Orientations :
ξ	est un vecteur normé dans la direction du gradient : $\frac{\nabla u}{\lvert\nabla u\rvert}$,
η	est un vecteur normé dans la direction de l'isophote pour une image 2D,
e_1	est la direction de courbure maximale,
e_2	est la direction de courbure minimale,
k_1	est la courbure maximale,
k_2	est la courbure minimale,

	Schémas numériques :
u^k	image obtenue à l'itération k,
τ	pas d'évolution, $\tau = dt$,
$A(u)$	matrice du modèle semi-discret,
$Q(u^k)$	matrice du modèle discret,

Introduction

Dans cette partie, nous nous intéressons à la restauration des images par l'utilisation d'équations aux dérivées partielles. Perona et Malik [Perona et Malik, 1990] ont proposé une équation de diffusion anisotrope. Cette équation est une variation de l'équation de diffusion de la chaleur, pour laquelle le flux de diffusion est pondéré par une fonction de diffusion, permettant de limiter les échanges d'intensité dans les zones de fort gradient. Elle peut s'interpréter physiquement par la loi de Fick qui exprime une diffusion de la chaleur dans un milieu non homogène. Les très bons résultats obtenus par Perona et Malik ont motivé de nombreux chercheurs à étudier cette équation et à proposer des améliorations, et ce nouveau domaine d'investigation a déjà fait l'objet d'état de l'art [Weickert, 1997d; Saint-Marc et al., 1991] et même de livres [Weickert, 1998; Ter Haar Romeny, 1994]. La diffusion anisotrope est souvent présentée parallèlement au traitement multi-échelle linéaire, bien que son utilisation et ses préoccupations soient en général différentes. Une comparaison de différentes représentations multi-échelles pour la segmentation basée sur le suivi des structures au long des échelles [Niessen et al., 1997] montre que des résultats similaires sont obtenus par des analyses multi-échelles linéaires et non-linéaires. La diffusion anisotrope est en général utilisée comme une étape de pré-segmentation ou de segmentation. L'objet de cette diffusion est de réduire le bruit tout en préservant la position et le contraste des contours, voire en rehaussant les contrastes. Plusieurs problèmes se posent alors, le premier est celui de la *régularisation* du processus, se posent aussi les problèmes de la *convergence* du processus vers la solution recherchée ou du critère d'arrêt de la diffusion, de la *discrétisation* et du *schéma numérique*, du choix de la *fonction de diffusion* et de l'*interprétation* de l'effet de la diffusion par rapport aux structures et aux *orientations locales* de l'image.

Le premier chapitre est consacré à l'introduction de la diffusion anisotrope à travers un *état de l'art*. Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'*interprétation* des diffusions scalaire et matricielle par rapport aux dérivées directionnelles de l'image dans un repère lié aux structures locales. Nous introduisons une interprétation géométrique de l'effet de la diffusion, ainsi qu'une nouvelle expression de l'équation de diffusion anisotrope sous la forme d'un *flux de diffusion multi-directionnel*. Le troisième chapitre propose une équation de diffusion adaptée à la restauration des *structures vasculaires tridimensionnelles*. Et finalement, des *expériences* sur des images synthétiques et réelles sont présentées dans le dernier chapitre.

Chapitre 5

Présentation de la diffusion anisotrope

« Nothing is more important than to see the sources of invention which are, in my opinion, more interesting than the inventions themselves. »
Leibniz, Gottfried Whilhem (1646-1716)

Dans ce chapitre, nous présentons un état de l'art de la diffusion anisotrope. Nous introduisons l'approche variationnelle, la conservation de l'intensité, les diffusions scalaires et matricielles, ainsi qu'une discussion sur le choix des paramètres.

Le problème de la *restauration* des images consiste à déduire une image restaurée à partir d'une image initiale en réduisant ou en supprimant les “défauts” de l'image initiale. Dans le cadre du traitement d'images, les défauts considérés sont le bruit et le flou, où le bruit est généralement modélisé par un bruit gaussien de moyenne nulle et le flou par un lissage gaussien. Le problème est la combinaison de ces deux types de restauration :

- la réduction du bruit est réalisée de manière efficace par l'équation de la chaleur (équivalente au produit de convolution de l'image par une fonction gaussienne), mais ce traitement introduit un flou supplémentaire dans l'image,
- la réduction du flou peut être réalisée par un rehaussement des contours, mais cela suppose une capacité à discriminer les contours du bruit afin de ne pas rehausser le bruit.

Le problème de la réduction du flou et de la conservation des contours peut introduire des instabilités dans le traitement de l'image. Ce problème est souvent mal posé et nécessite une régularisation. La définition couramment adoptée d'un *problème bien posé* est celle donnée par Hadamard : un problème est dit bien posé si et seulement si une solution existe, cette solution est unique, et cette solution dépend des données d'entrée de manière continue. La *régularisation* consiste à transformer un problème mal posé en un problème bien posé.
Nous présentons successivement l'équation de diffusion proposée par Perona et Malik, des régularisations de cette équation, une approche variationnelle de la diffusion, l'utilisation d'une matrice de diffusion, des schémas numériques et une discussion sur les paramètres.

5.1 Équation de Perona et Malik

Rappelons l'équation essentielle du traitement multi-échelle linéaire qui est l'équation de diffusion de la chaleur :

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u = div(\nabla u) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Cette équation est équivalente au produit de convolution de l'image avec une fonction gaussienne d'écart-type $\sigma = \sqrt{2t}$, étudié en détail dans le chapitre 4. Malgré les différentes propriétés d'invariance de cette équation (translation, isométrie, changement d'échelle) et son efficacité à réduire le bruit de l'image, l'équation de la chaleur ne préserve pas les contours de l'image et lisse l'information de manière isotrope et indépendamment de la présence de contours. Afin de résoudre les problèmes du lissage, une solution est de transformer l'image à l'aide d'une équation aux dérivées partielles permettant de diffuser de manière non uniforme, en privilégiant certaines directions.
La diffusion anisotrope s'inspire de la diffusion isotrope en introduisant dans l'équation (5.1) une **fonction de diffusion** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dépendant de la norme du gradient de l'image choisie de manière à mieux préserver le contraste de l'image (voir figure 5.1).
Weickert [Weickert, 1998] fait une analogie avec la *loi de Fick* en physique qui exprime la diffusion

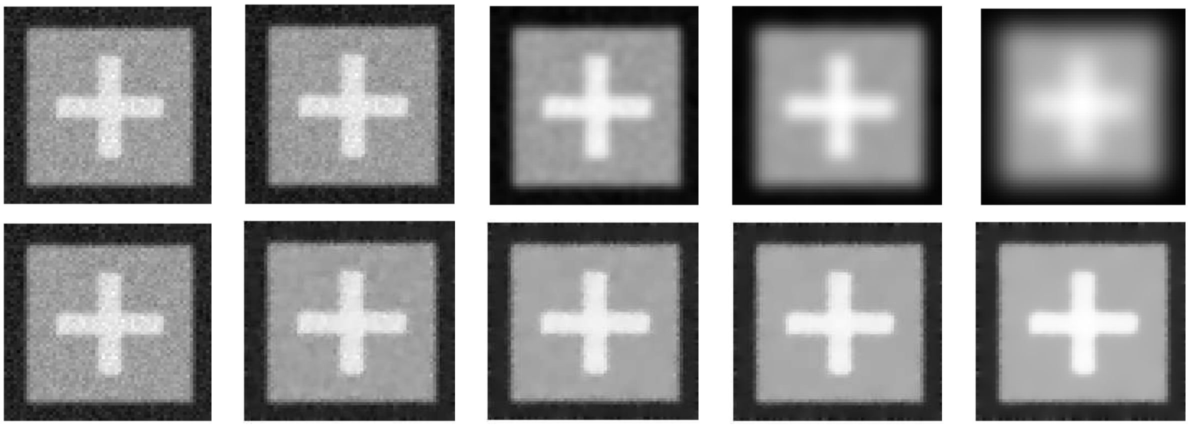


FIG. 5.1 – *Résultats* **ligne du haut** *: produit de convolution de l'image par une fonction gaussienne, et* **ligne du bas** *: filtrage anisotrope à une échelle t identique.*

comme un processus d'équilibre de différences de concentrations avec conservation de la masse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -div(j) \\ j &= -D.\nabla u \end{aligned}$$

où D est un coefficient de diffusion (ou une matrice) qui dépend des propriétés physiques du corps ambiant. La loi de Fick est utilisée par exemple en physique pour étudier l'absorption d'eau par les matériaux composites à matrice organique [Crank, 1956; Bonniau et Bunsell, 1981]. Dans le cas d'un milieu homogène, ce coefficient peut être une constante scalaire et l'équation de diffusion est alors celle de la chaleur. Un autre lien avec la physique est étudié par Rougon et Prêteux [Rougon et Prêteux, 1995] qui proposent un parallèle entre la diffusion anisotrope et les équations de Maxwell.

Dans le cadre du traitement d'images, Perona et Malik [Perona et Malik, 1990] proposent d'introduire la nouvelle équation de diffusion qui correspond à une diffusion non homogène avec un coefficient de diffusion g appelé fonction de diffusion et dépendant de la norme du gradient de l'image.

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= div\,(g(\mid \nabla u \mid)\nabla u)\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Des diffusions utilisant une matrice au lieu d'un scalaire ont ensuite été proposées [Cottet et Germain, 1993; Weickert, 1994] et seront présentées dans le paragraphe 5.6. La fonction de diffusion a pour effet de limiter la diffusion pour les gradients "forts". Pour cela, un *seuil* κ sur la norme du gradient est introduit : nous supposons que les variations du gradient d'intensité de l'image dues au bruit sont inférieures à κ qui est lui-même inférieur au gradient introduit par les discontinuités de l'image non bruitée.

D'une part, la fonction de diffusion g sera choisie de manière à diffuser très peu lorsque $\mid \nabla u \mid$ est très supérieur à κ afin de limiter la diffusion dans les zones à forts gradients. D'autre part, elle devra tendre vers une constante non nulle lorsque $\mid \nabla u \mid$ est proche de zéro, agissant comme l'équation (5.1) de propagation de la chaleur. Le choix automatique du seuil κ n'est pas évident, il peut se baser sur un histogramme cumulé du gradient [Perona et Malik, 1990], sur les propriétés statistiques des régions intérieures aux structures [Yoo et Coggins, 1993] ou sur la géométrie locale de l'image [Luo et al., 1994].

Nous expliquons dans le paragraphe suivant la conservation de matière induite par l'écriture de l'équation aux dérivées partielles sous forme de divergence. L'approche variationnelle est ensuite présentée, et permet de mieux comprendre ce processus et de préciser certaines contraintes pour la fonction de diffusion.

5.2 Conservation de l'intensité

L'expression de l'équation différentielle sous la forme d'une divergence d'un champ de vecteurs permet d'assurer une conservation de l'intensité. Elle permet aussi d'interpréter les transferts d'intensité à la frontière d'un sous-volume de l'image par l'intégrale du champ de vecteurs scalaire la normale à la frontière le long de la surface.

Théorème 4 (Théorème de la divergence, ou formule d'Ostrogradski) *:*

Le flux d'un champ de vecteurs sortant d'une surface fermée $S = \partial V$ est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ sur le compact V limité par S. Cette formule peut s'écrire :

$$\int_V div\left(\vec{F}\right) = \int_{\partial V} \vec{F}.\vec{n}\, dS \tag{5.3}$$

où $\vec{n}$ est la normale à ∂V orientée vers l'extérieur du compact V.

Application à la diffusion anisotrope : V représente un élément de volume inclus dans l'ensemble de définition de l'image, et dont le gradient est très fort sur sa frontière ∂V. L'intensité moyenne à l'intérieur de ce volume reste quasiment constante au cours de la diffusion.

$$\begin{aligned}
\int_V \frac{\partial I}{\partial t}\, dV &= \int_V div\left(g(\mid \nabla I \mid)\, \nabla I\right)\, dV \\
&= \int_{S=\partial V} g(\mid \nabla I \mid)\, \nabla I\, .\vec{n}\, dS \\
&= 0 \\
&\quad \text{Si } g(\mid \nabla u \mid) \text{ est nulle sur } \partial V \\
\int_V I &\approx Constante
\end{aligned}$$

5.3 Approche variationnelle

Nous présentons dans un premier temps de problème de la restauration des images sous une approche variationnelle. Ensuite, nous rappelons et démontrons les équations d'Euler-Lagrange, puis nous appliquons ces équations au problème variationnel pour obtenir l'équation de diffusion anisotrope proposée par Perona et Malik.

5.3.1 Présentation du problème

L'approche variationnelle consiste à écrire le problème de restauration des images sous la forme d'une minimisation d'énergie. Une approche variationnelle de la segmentation des images est présentée dans le livre de Morel et Solimini [Morel et Solimini, 1995]. Les auteurs proposent d'écrire différentes méthodes de segmentation sous forme variationnelle afin de réduire le nombre de paramètres et de fixer leurs valeurs automatiquement. Nous donnons ici une reconstitution chronologique du lien entre l'équation de diffusion anisotrope et son équivalence en termes de minimisation d'une énergie.

Champs de Markov Par analogie entre les images et les systèmes mécaniques statistiques, Geman et Geman [Geman et Geman, 1984] proposent d'associer un champ de Markov aux images et de résoudre le problème de restauration en minimisant une énergie contenant un terme d'attache aux données et un terme correspondant à une loi de Gibbs, du type :

$$\sum_{c\in\mathcal{C}} \Phi(d_c f).$$

où $\mathcal{C}$ est un ensemble de cliques et d_c est un opérateur de différence sur la clique $\mathcal{C}$. Les méthodes de relaxation stochastiques permettant de trouver une estimation du maximum à posteriori de l'image sont cependant très lourdes en temps de calcul. Nous verrons par la suite un lien entre la fonction Φ introduite dans la minimisation et la fonction de diffusion g utilisée par l'équation (5.2) de la diffusion anisotrope.

Fonctionnelle de Mumford et Shah Mumford et Shah [Mumford et Shah, 1985; Mumford et Shah, 1989] proposent de minimiser la fonctionnelle suivante afin d'obtenir une image segmentée :

$$E(u,K) \;=\; \beta \int_{\Omega} (u-u_0)^2 dx + \int_{\Omega-K} \mid \nabla u \mid^2 \, dx + \alpha \mid K \mid \tag{5.4}$$

où K est l'ensemble des discontinuités de l'image, et $\mid K \mid$ est la longueur de ces discontinuités. Le premier terme est un terme d'attache aux données initiales, u_0 étant l'image initiale, et β un coefficient réel qui pondère ce terme. Les deux termes suivants traduisent la recherche d'une image segmentée : constante par morceaux et dont les contours sont réguliers. L'ensemble K doit converger vers l'ensemble des contours de l'image étudiée.

Diffusion anisotrope biaisée Nordström [Nordström, 1990] propose d'unifier les méthodes variationnelles de minimisation d'énergie [Geman et Geman, 1984; Terzopoulos, 1986; Mumford et Shah, 1985; Blake et Zisserman, 1987] avec l'équation de diffusion anisotrope introduite par Perona et Malik. Il introduit un terme d'attache aux données dans l'équation de diffusion anisotrope qui régularise celle-ci, permet d'exprimer le problème sous la forme d'une solution optimale, et de s'affranchir du choix du temps de diffusion. Cependant, cette écriture introduit quand même un nouveau paramètre qui est le coefficient d'attache aux données noté β.

Écriture du problème Le problème de la restauration d'une image u_0 est exprimé, selon le formalisme de Nordström, par la recherche d'une image u qui minimise l'énergie $E(u)$ donnée par :

$$E(u) \;=\; \beta \int_{\Omega} (u - u_0)^2 d\Omega + \int_{\Omega} \Phi(\mid \nabla u \mid) d\Omega \tag{5.5}$$

le premier terme de $E(u)$ est un terme d'attache aux données et le second terme prend en compte le lissage anisotrope de l'image.
La recherche d'un minimum d'une énergie, donnée par une fonctionnelle, est réalisée à l'aide d'une descente de gradient et s'exprime sous la forme d'une équation aux dérivées partielles à l'aide des équations d'Euler-Lagrange.

5.3.2 Minimisation par descente de gradient

En utilisant les équations d'Euler-Lagrange, nous écrivons la minimisation de l'énergie $E(u)$ de l'équation (5.5) sous la forme $\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla E$, et nous vérifions que le deuxième terme correspond à la diffusion anisotrope de Perona et Malik.

5.3.2.1 Équations d'Euler-Lagrange

Nous noterons u une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ représentant une image de dimension 2 et définie sur le rectangle $\Omega = (0,a) \times (0,b)$. Le problème de Lagrange consiste à trouver l'extremum de l'expression :

$$E(y) \;=\; \int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')dx$$

où y est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, f est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Nous supposons que la fonction y vérifie $y(x_0) = y_0$ et $y(x_1) = y_1$. Nous supposons aussi que y est dérivable et de dérivée continue y'. Un extremum de $E(y)$ doit être solution de l'*équation différentielle d'Euler-Lagrange* $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$. Nous écrivons ci-dessous le problème équivalent pour une fonction de deux variables :

Théorème 5 (Équations d'Euler-Lagrange) :

Dans le cas des fonctions à plusieurs variables, nous supposons que $E(u)$ est de la forme :

$$E(u) = \int_\Omega f(x,y,u,u_x,u_y)dxdy$$

$$\text{avec } \forall(x,y) \in \partial\Omega \;\; u(x,y) = v(x,y)$$

où u possède des dérivées partielles continues u_x et u_y.
*L'*équation d'Euler-Lagrange *qui est une condition nécessaire pour obtenir un extremum de $E(u)$ est donnée par $\nabla E = 0$, avec :*

$$\nabla E = f_u - \frac{d}{dx}f_{u_x} - \frac{d}{dy}f_{u_y} = f_u - div\begin{pmatrix} f_{u_x} \\ f_{u_y} \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Démonstration :

Soit u^0 un extremum de E.
Soit $h(x,y)$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ différentiable et de dérivées partielles continues, vérifiant

$$\forall \bar{x} \in \partial\Omega, h(\bar{x}) = 0. \tag{5.7}$$

Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, nous posons :

$$u_\varepsilon(x,y) = u(x,y) + \varepsilon h(x,y)$$

$$E(u_\varepsilon) = F(\varepsilon) = \int_\Omega f(x,y,u+\varepsilon h,u_x+\varepsilon h_x,u_y+\varepsilon h_y)dxdy.$$

$$\begin{aligned} F'(\varepsilon) &= \int_\Omega \frac{df}{d\varepsilon}dxdy \\ &= \int_\Omega \left[f_u h + f_{u_x}h_x + f_{u_y}h_y\right] dxdy \\ &= \int_\Omega \left[f_u h + \frac{d}{dx}(f_{u_x}h) - \frac{d}{dx}f_{u_x}h + \frac{d}{dy}(f_{u_y}h) - \frac{d}{dy}f_{u_y}h\right] dxdy \end{aligned}$$

$$F'(\varepsilon) \overset{[5.7]}{=} \int_\Omega \left[\left(f_u - \frac{df_{u_x}}{dx} - \frac{df_{u_y}}{dy}\right)h\right] dxdy + \int_0^b \underbrace{[f_{u_x}h]_0^a}_{0} dy + \int_0^a \underbrace{[f_{u_y}h]_0^b}_{0} dx$$

Dans les équations ci-dessus, les valeurs de f sont calculées en $(x,y,u+\varepsilon h,u_x+\varepsilon h_x,u_y+\varepsilon h_y)$.
D'après l'hypothèse d'extremum pour u^0, nous devons avoir F'(0) = 0.
Lorsque ε vaut 0, on obtient en (x,y,u_x^0,u_y^0)

$$\forall h \text{ vérifiant les conditions (5.7)}, \;\; F'(0) = \langle\, f_u - \frac{d}{dx}f_{u_x} - \frac{d}{dy}f_{u_y} \,, h \,\rangle = 0$$

Ce calcul donne le gradient de l'énergie E en une fonction u, nous en déduisons l'équation d'Euler-Lagrange (équation (5.6)). ■

5.3.2.2 Minimisation de l'énergie

L'équation (5.5) s'écrit $E(u) = \int_\Omega f(x,y,u,u_x,u_y)\, d\Omega$ avec

$$f(x,y,u,u_x,u_y) = \beta\,(u-u_0)^2 + \Phi(\sqrt{u_x^2+u_y^2}).$$

Nous avons donc les dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned}
f_u &= 2\beta(u-u_0)\\
f_{u_x}(u_x,u_y) &= \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}}\Phi'(\sqrt{u_x^2+u_y^2})\\
&= \frac{u_x}{\mid \nabla u \mid}\Phi'(\mid \nabla u \mid)\\
\text{et}&\\
f_{u_y}(u_x,u_y) &= \frac{u_y}{\mid \nabla u \mid}\Phi'(\mid \nabla u \mid)
\end{aligned}$$

donc

$$\nabla E(u) = 2\,\beta\,(u-u_0) - div\left(\Phi'(\mid \nabla u \mid)\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}\right)$$

et l'équation de diffusion associée s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = div\left(\Phi'(\mid \nabla u \mid)\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}\right) - 2\,\beta\,(u-u_0).} \tag{5.8}$$

5.4 Choix d'une fonction de diffusion

Dans le cas de la diffusion de **Perona et Malik**, le terme d'attache aux données n'est pas pris en compte, et la relation entre la fonction de diffusion g et la fonction Φ est :

$$\frac{\Phi'(x)}{x} = g(x).$$

Des critères de **stabilité** et de **restauration** permettent de choisir certaines fonctions de diffusion parmi les fonctions proposées dans la littérature [Charbonnier, 1994; Deriche et Faugeras, 1996; Aubert et Vese, 1997]. Le critère de stabilité consiste à assurer la convexité de l'énergie minimisée, et s'exprime par les équations :

$$\Phi''(\mid \nabla u \mid) \geq 0 \tag{5.9}$$

$$\Phi'(\mid \nabla u \mid) \geq 0 \tag{5.10}$$

Cependant, ces critères interdisent le rehaussement des pentes. Le critère de restauration cherche à réaliser les deux conditions suivantes :

- la diffusion doit s'effectuer de manière isotrope dans les régions homogènes, c'est-à-dire lorsque $\mid \nabla u \mid$ est proche de zéro ;

– dans les zones à fort gradient, la diffusion ne doit s'effectuer que dans la direction η qui est orthogonale au gradient de manière à conserver le contraste et renforcer les contours.

Le choix d'une fonction satisfaisant ces conditions est basé sur l'interprétation en termes de dérivées secondes directionnelles de l'équation de diffusion (démontrée dans le chapitre suivant, propriété 9 page 90) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Phi''(\mid \nabla u \mid)u_{\xi\xi} + \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid}u_{\eta\eta}. \tag{5.11}$$

Ces conditions se traduisent par les relations suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Phi'(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \Phi''(x) = \Phi''(0) > 0 \tag{5.12}$$

et

$$\lim_{x\to\infty} \Phi''(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \frac{\Phi'(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \frac{x\Phi''(x)}{\Phi'(x)} = 0. \tag{5.13}$$

Différentes équations proposées sont données en annexe A. Parmi ces fonctions, nous pouvons distinguer :

– l'équation de la chaleur, isotrope, donnée par $\Phi''(x) = \frac{\Phi'(x)}{x} = 1$ qui correspond à la fonction de Tikhonov du tableau A.1 ;
– la diffusion dans la direction des contours, $\Phi''(x) = 0$ et $\frac{\Phi'(x)}{x} = 1/x$ qui correspond à la fonction de Rudin du tableau A.1 ;
– les fonctions qui vérifient les deux critères de stabilité (voir tableau A.2), et donc qui diffusent dans les deux directions : Tikhonov [Tikhonov et Arsenin, 1977], Green [Green, 1990], Rudin [Rudin et al., 1992], Charbonnier [Charbonnier, 1994], Alvarez [Alvarez et al., 1992] ;
– les fonctions pour lesquelles la diffusion dans la direction du gradient peut avoir un coefficient $\Phi''(x)$ négatif, afin de rehausser les contours : Perona et Malik 1 et 2 [Perona et Malik, 1990] , Geman [Geman et Reynolds, 1992].

5.5 Autre régularisation de l'équation de diffusion anisotrope

Lorsque Φ'' est négatif, la fonction de diffusion peut rehausser le gradient de l'image et donc le contraste, mais cela introduit une instabilité. En effet, l'équation de diffusion agit alors comme une équation inverse de la chaleur et, en outre, les discontinuités introduites par le bruit peuvent être accentuées. L'équation inverse de la chaleur étant instable, l'équation de Perona et Malik devient mal posée et nécessite une régularisation. Nitzberg et Shiota [Nitzberg et Shiota, 1992] s'intéressent à cette régularisation afin de détecter les contours et les jonctions. Leur algorithme est inspiré de méthodes de lissage adaptatif utilisées au départ pour la réduction du bruit dans les images télévisées [Graham, 1962]. Ces méthodes utilisent une estimation locale du contour pour déterminer le paramètre de la fonction de rehaussement. Si la discrétisation de l'image introduit un lissage implicite qui régularise l'équation, en reprenant les termes de Nitzberg et Shiota :

> *It is essential to regularize the limiting equation itself in order to reduce the effect of grid size and control the behavior of discrete approximations.*
>
> [Nitzberg et Shiota, 1992]

Le travail de Nitzberg et Shiota est pionnier dans la mesure où il utilise plusieurs notions qui seront ensuite développées par d'autres chercheurs : la régularisation du paramètre de la fonction de diffusion, le tenseur de structure (voir paragraphe 5.6) comme matrice qui guide l'orientation de la diffusion, et des schémas numériques permettant le rehaussement des contours.

Catté, Lions, Morel et Coll [Catte et al., 1992] utilisent la même idée afin de régulariser l'équation de diffusion de Perona et Malik. Le principe est de calculer le coefficient de diffusion non pas sur la norme du gradient de l'image, mais plutôt sur la norme du gradient de l'image lissée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div\,(g(\mid \nabla_\sigma u \mid)\nabla u) \tag{5.14}$$

où ∇_σ est l'opérateur gradient lissé par un produit de convolution avec une fonction gaussienne d'écart-type σ : $\nabla_\sigma u = \nabla(G_\sigma * u)$.

Les auteurs montrent la stabilité et la convergence de ce nouveau modèle.

Dans le même ordre d'idée et de manière indépendante, Whitaker et Pizer [Whitaker et Pizer, 1993] proposent une équation de diffusion anisotrope dont la norme du gradient est lissée par un noyau gaussien dont l'écart-type est fonction du paramètre t, leur équation s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div\,\big(g(\mid \nabla_{\sigma(t)} u \mid)\nabla u\big) \tag{5.15}$$

où l'écart-type $\sigma(t)$ de la fonction gaussienne est une fonction décroissante du temps d'évolution. Cette idée semble naturelle car au fur et à mesure de la diffusion, la réduction du bruit permet un lissage moins fort des gradients et donc une meilleure localisation des contours. Cependant, le choix de la fonction $\sigma(t)$ n'est pas explicité et cette idée reste peu étudiée.

La figure 5.2 permet de comparer l'évolution d'une pente avec l'équation de diffusion proposée par *Perona et Malik* (approche "classique") et avec celle proposée par *Catté*. Le seuil κ est fixé à 2 et l'écart-type de la gaussienne vaut 1. Le résultat après 300 itérations montre l'avantage de la méthode de *Catté* qui permet d'utiliser une fonction qui rehausse la pente tout en conservant un processus stable. Cependant, lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini, les deux méthodes convergent vers une fonction constante, même si la méthode de *Catté* qui préserve mieux la pente converge moins vite vers cette solution (figure 5.2 après 5000 itérations).

Si les avantages de cette nouvelle équation ont été décrits ci-dessus, ces inconvénients sont les suivants : le lissage introduit un nouveau paramètre, et ralentit le temps de calcul d'une itération (mais permet des pas de temps plus élevés); cette équation n'a pas d'interprétation directe sous forme de dérivées secondes directionnelles ni sous forme variationnelle.

Cependant, nous pouvons comparer l'équation (5.14) avec l'équation de Mumford et Shah (équation (5.4)) pour laquelle le terme d'attache aux données $\beta = 0$, la régulation des contours $\alpha \mid K \mid$

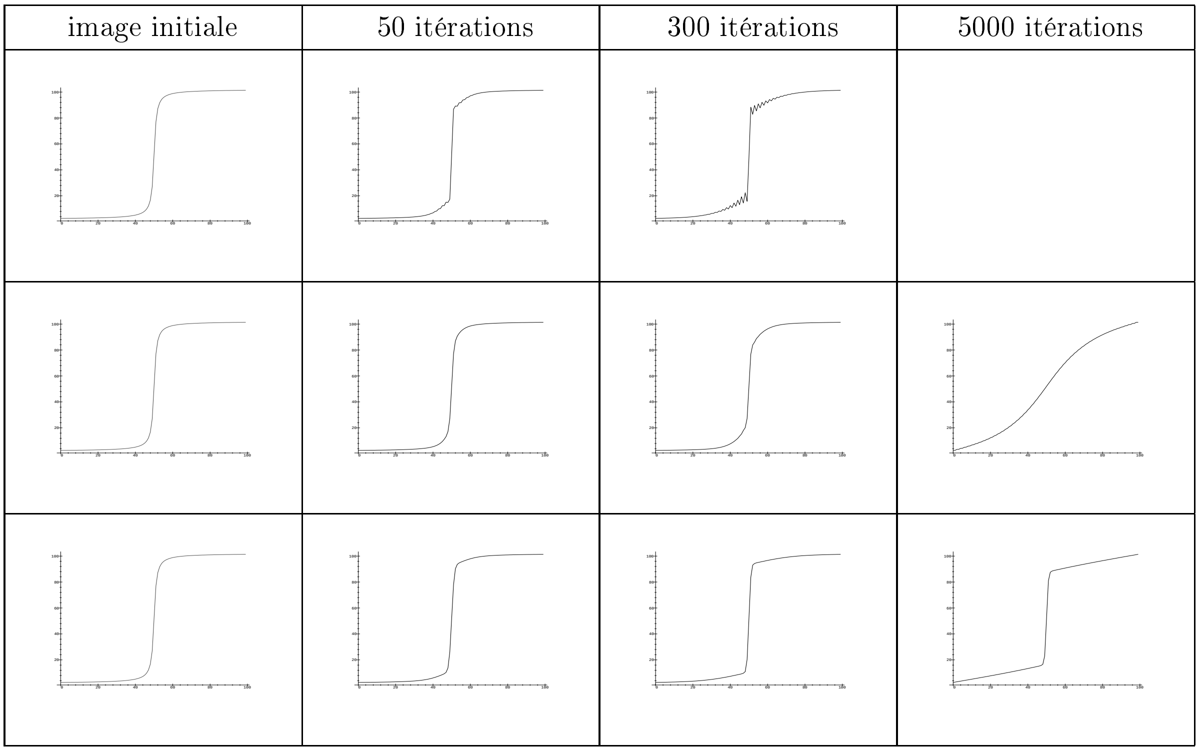


FIG. 5.2 – *Comparaison de la méthode de Catté (paragraphe 5.5) et de la méthode de Perona et Malik, avec un seuil* $\kappa = 2$. Ligne du haut *équation de Perona et Malik avec la fonction Perona et Malik 1 (instable).* ligne du milieu *équation de Perona et Malik avec la fonction de Green (stable);* ligne du bas *équation de Catté et al. avec la fonction de Perona et Malik 1.*

est assurée par le lissage gaussien d'écart-type σ et la distinction entre les contours et le reste de l'image est assurée par la fonction de diffusion $g(.)$ avec un seuil κ.

5.6 Utilisation d'une matrice de diffusion

Cottet et Germain [Cottet et Germain, 1993] proposent une équation de diffusion et réaction, dans laquelle le terme de diffusion est de la forme

$$div(D_\varepsilon \nabla u)$$

où D_ε est l'opérateur de projection dans la direction du gradient de l'image régularisée u_ε :

$$D_\varepsilon \;=\; \frac{1}{\mid \nabla u_\varepsilon \mid^2} \, \nabla u_\varepsilon \,.\, \nabla {u_\varepsilon}^t.$$

Dans [Weickert, 1994; Weickert, 1998], l'auteur étudie les propriétés multi-échelles de la diffusion anisotrope utilisant une matrice (ou tenseur) de diffusion. Cette matrice de diffusion permet de réorienter le champ de vecteurs issu du gradient, c'est pourquoi l'auteur propose d'appeler la diffusion anisotrope utilisant un scalaire une diffusion non homogène isotrope et la diffusion utilisant une matrice une diffusion anisotrope. Nous n'adopterons pas cette terminologie en raison de l'interprétation directionnelle de la diffusion anisotrope (équation (5.11)) qui traduit l'effet anisotrope de l'équation proposée par Perona et Malik.
L'équation de diffusion matricielle s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; div(D\nabla u). \tag{5.16}$$

Choix de la matrice de diffusion Weickert propose d'utiliser une matrice de diffusion possédant les mêmes vecteurs propres que le *tenseur de structure*. La définition et les propriétés du tenseur de structure sont données en annexe B. Cette matrice est très utilisée pour extraire l'orientation locale de l'image, et a été appliquée avec succès pour extraire une information d'orientation dans des images contenant de nombreuses structures allongées et proches : les empreintes digitales [Kass et Witkin, 1987; Rao et Schunck, 1991; Weickert, 1997b; Almansa et Lindeberg, 1998; Lindeberg, 1997b], l'analyse de texture [Bigün, 1991; Lindeberg, 1994], ou les jonctions [Förstner et Gülch, 1987; Nitzberg et Shiota, 1992]. L'effet du tenseur de structure est de moyenner les orientations locales, c'est-à-dire les orientations du gradient mais pas les directions. Ainsi, des gradients opposés s'ajoutent au lieu de s'annuler. Un inconvénient du tenseur de structure est cependant le temps de calcul supplémentaire associé au lissage de la matrice.
La matrice de diffusion proposée par Weickert est une matrice possédant les mêmes valeurs propres que le tenseur de structure, avec des vecteurs propres dépendant de la norme du gradient et d'une mesure de cohérence locale associée au tenseur de structure.
Sánchez-Ortiz, Rueckert et Burger [Sánchez-Ortiz et al., 1999] proposent d'utiliser une matrice de diffusion qui dépend des informations a priori sur l'image, donc d'inclure une connaissance du

modèle à étudier (dans leur cas l'étude du mouvement cardiaque en 3D). Ainsi, la matrice de diffusion devient une fonction de la norme du gradient, mais aussi de la position spatiale.
Nous verrons dans les chapitres 6 et 7 comment interpréter cette matrice de diffusion en termes de flux de diffusion multi-directionnel. L'extraction d'une orientation locale et robuste des structures joue alors un rôle important et peut être obtenue par le tenseur de structure ou par un lissage direct du gradient.

Propriétés multi-échelles et discrétisation Weickert s'intéresse aux *propriétés multi-échelles* de la diffusion anisotrope matricielle, mais aussi aux *schémas numériques* associés. Pour cela, des modèles continu (5.17), semi-discret (5.18), et discret (5.19) sont introduits, et les propriétés d'existence, d'unicité et de régularité de la solution sont étudiées, ainsi que des propriétés multi-échelles [Weickert, 1998].
modèle continu :

$$\begin{cases} < D\nabla u, \vec{n} >= 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur} \quad \Omega \\ \partial_t u = div(D\nabla u) & \text{sur} \quad \Omega \times (0,\infty) \end{cases} \tag{5.17}$$

où $\vec{n}$ un vecteur normal à la frontière $\partial\Omega$.
modèle semi-discret :

$$\begin{cases} u(0) & = & u_0 \\ \frac{du}{dt} & = & A(u)u \end{cases} \tag{5.18}$$

modèle discret :

$$\begin{cases} u^0 & = & u_0 \\ u^{k+1} & = & Q(u^k)u^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \tag{5.19}$$

L'approche de Weickert permet donc de passer du schéma continu au schéma discret, tout en maîtrisant les propriétés du processus de diffusion. Pour chacun de ces modèles, Weickert définit des conditions sur les matrices D, A ou Q permettant d'assurer de bonnes propriétés de ces modèles [Weickert, 1998]. Le paragraphe suivant présente quelques schémas numériques permettant de passer du modèle semi-discret au modèle discret.

5.7 Schémas numériques

5.7.1 schémas explicites et semi-implicites

La discrétisation du modèle semi-discret (5.18) est souvent réalisée par un *schéma numérique explicite*, défini par :

$$u^{k+1} \;=\; u^k + \tau\, A(u^k)\, u^k \;=\; (I + \tau A(u^k))u^k. \tag{5.20}$$

Cette dernière équation correspond bien à au modèle discret de l'équation (5.19) avec $Q(u^k) = I + \tau A(u^k)$. Nous définissons ci-dessous le schéma semi-implicite (sous certaines conditions de la matrice A définies dans [Weickert, 1998]).

DÉFINITION 14 (SCHÉMA α-SEMI-IMPLICITE) *:*

Pour $\alpha \in [0,1]$ et $\tau > 0$, soit $A = (a_{ij}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N\times N}$, le schéma $\alpha-$semi-implicite est défini par :

$$u^{k+1} = u^k + \tau\, A(u^k)(\alpha u^{k+1} + (1-\alpha)u^k) \tag{5.21}$$

Le cas $\alpha = 0$ se ramène au schéma explicite de l'équation (5.20). Les bonnes propriétés du schéma sont assurées lorsque le pas d'évolution est majoré par :

$$\tau \leq \frac{1}{(1-\alpha)\underset{i\in J}{max} \mid a_{ii}(u^k) \mid}.$$

Ainsi, dans le cas $\alpha = 1$, les bonnes propriétés du schémas sont inconditionnellement satisfaites pour une matrice A vérifiant les propriétés associées au schéma semi-discret. Si les schémas semi-implicites requièrent l'inversion d'une matrice, ils ont l'avantage d'être inconditionnellement stables, et Weickert montre que ces schémas permettent d'améliorer le temps de calcul en utilisant des pas de temps plus élevés.

5.7.2 Schéma récursif séparé

Un schéma récursif séparé (*Additive Operator Splitting*) a été proposé par [Weickert, 1997c] comme un schéma numérique semi-implicite séparable pour effectuer la diffusion anisotrope. Dans [Weickert, 1999], l'auteur étend son schéma numérique au cas des équations de diffusion anisotrope utilisant une matrice de diffusion.

5.7.3 Rehaussement des contours

Osher et Rudin [Osher et Rudin, 1990] proposent un schéma numérique permettant de rehausser les contours des structures, à l'aide de filtres de chocs. Ce schéma préserve la variation totale de l'image, définie dans le cas continu par :

$$TV(u) = \int_\Omega \mid \nabla u \mid dx.$$

D'autres méthodes numériques de rehaussement des contours ont ensuite été proposées [Osher et Rudin, 1991; Rudin et al., 1992; Alvarez et Mazorra, 1994] et une comparaison de différentes méthodes est présentée dans [Kornprobst, 1998].

5.8 Conclusion

Faire un état de l'art exhaustif dans un domaine en pleine évolution comme celui de la diffusion anisotrope est assez difficile. Dans ce chapitre, nous avons présenté les idées qui sont à l'origine de cette technique, ainsi un état de l'art non exhaustif sur ce domaine. Pour un état de l'art plus détaillé, le lecteur pourra consulter [Weickert, 1998]. Rappelons brièvement différentes applications étudiées de la diffusion anisotrope :

- empreintes digitales [Weickert, 1995; Almansa et Lindeberg, 1998],
- extraction de texture [Weickert, 1995],
- images en couleurs [Weickert, 1997a],
- diffusion des champs de vecteurs [Whitaker et Gerig, 1994],
- interpolation [Ford et al., 1992].

Dans la domaine médical, la diffusion anisotrope a été testée avec succès pour différentes modalités et pour l'extraction de différents organes :

- *IRM* [Gerig et al., 1992; Krissian, 1996; Sánchez-Ortiz et al., 1999]
- *Ultrasons* [Steen et Olstad, 1994; Sarti et al., 1999]
- angiographies par *rayons X* [Payot, 1996; Krissian et al., 1997]

Malgré toutes ces applications, il nous semble que l'effet de la diffusion anisotrope et son interprétation ne pas toujours clairs dans la littérature. Si la diffusion se comporte comme une équation de la chaleur dans les zones de gradients faibles, elle n'est en général pas nulle lorsque le gradient est fort, et l'effet désiré est de diffuser le long des contours tout en rehaussant le contraste. Deux interprétations paraissent alors contradictoires :

1. l'écriture de l'équation en termes de dérivées secondes directionnelles fait apparaître deux coefficients de diffusion dans la direction du gradient et dans l'hyperplan orthogonal au gradient,
2. l'approche matricielle de Weickert considère la diffusion scalaire comme isotrope, non homogène et la diffusion matricielle comme la vraie diffusion anisotrope.

Rappelons les différents aspects et différentes propriétés de la diffusion anisotrope qui ont été présentés dans ce chapitre, et en particulier ceux qui nous intéressent et qui seront utilisés par la suite.

- Nous avons dans un premier temps rappelé le parallèle entre les équations utilisées et des **processus physiques** de diffusion de chaleur ou d'absorption d'eau dans des matiériaux composites. Ce parallèle permet de donner une idée intuitive de l'évolution de l'image.
- Nous avons présenté l'importance d'écrire le processus comme une **loi de conservation** afin d'assurer une conservation de l'intensité de l'image et du même coût de faciliter la mise en œuvre de schémas numériques stables. Cette propriété sera utilisée par la suite.
- Nous avons exprimé la diffusion comme une **minimisation d'énergie**. Cette approche variationnelle permet d'étudier la convergence du processus de diffusion. Nous étudierons par la suite une approche variationnelle des schémas de diffusion que nous proposerons.
- Nordström a proposé d'introduire un **terme d'attache aux données** dans l'équation de diffusion. Ce terme peut être ajouté aux équations de diffusion anisotrope présentées et permet d'assurer la convergence du processus vers une image non-constante et donc de s'affranchir du

choix du temps total de diffusion et d'éviter de s'éloigner trop de l'image initiale. Ce terme d'attache aux données sera utilisé dans nos expériences sur des images réelles.

- Nous avons rappelé des propriétés des **fonctions de diffusion** permettant la restauration des images et la stabilité du processus dans le cas de l'équation de Perona et Malik. Nous utiliserons le même raisonnement pour choisir nos fonctions de diffusion sur des critères de restauration. Les critères de stabilité dépendant du schéma numérique proposé et interdisant des fonctions qui rehaussent le constraste, nous assurerons la stabilité du processus par la conservation discrète de l'intensité et le terme d'attache aux données et un lissage le long des contours, et nous nous autoriserons des fonctions permettant le rehaussement des contours dans la direction du gradient.
- Nous avons présenté l'importance d'introduire une **régularisation** de l'équation de diffusion afin d'assurer une plus grande stabilité des schémas numériques et de contrôler l'effet des approximations discrètes. Nous utiliserons dans notre schéma une régularisation sous la forme d'un lissage gaussien de champ de vecteurs dans l'expression du flux de diffusion.
- Weickert a proposé une approche de **diffusion matricielle**, plus générale que la diffusion anisotrope de Perona et Malik. Nous donnerons dans le chapitre suivant une interprétation de cette diffusion et nous utiliserons un flux de diffusion dont l'orientation n'est pas parallèle au gradient.
- Nous avons présenté les **schémas explicite et semi-implicite** utilisés. Le schéma semi-implicite possède de meilleures propriétés, et permet en particulier l'utilisation de pas de temps plus élevés. Nous n'utiliserons pas ce schéma dans nos expériences car les développements de schémas semi-implicites efficaces dans le cas matriciel sont très récents. Notre expérience a aussi montré que le gain de temps que permet le schéma semi-implicite par rapport au schéma explicite s'accompagne d'une augmentation de l'erreur dûe aux approximations associées.
- Enfin, nous proposerons une diffusion anisotrope adaptée aux structures tubulaires afin de conserver l'information des petits vaisseaux.

Dans le chapitre suivant, nous nous intéressons à la compréhension et à l'interprétation de la diffusion anisotrope, en particulier lorsque le flux de diffusion est orienté dans une autre direction que celle du gradient.

Chapitre 6

Différentes approches et interprétations de la diffusion anisotrope

« In the subjet of vision, there is no single equation or view that explains everything. Each problem has to be addressed from several points of view - ... »
David Marr. *Vision*, 1980.

Ce chapitre présente une approche systématique et personnelle permettant d'exprimer les équations de diffusion scalaire et matricielle en termes de dérivées directionnelles dans une base liée à la structure locale de l'image. Nous donnons une interprétation de la diffusion anisotrope par rapport au flux de diffusion, et proposons une nouvelle expression de ce flux. Enfin, nous explorons la possibilité de lier l'équation de diffusion proposée à une approche variationnelle.

Notations

Dans ce chapitre, les notations suivantes seront utilisées :

	notations générales et conventions :
n	dimension de l'image,
$\mathbb{R}$	ensemble des réels,
$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$	un vecteur de $\mathbb{R}^n$ ou un point de l'image,
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	nous notons en caractères gras minuscules les vecteurs de $\mathbb{R}^n$,
$A, B, \dots$	les matrices sont notées par des lettres majuscules,
$\mathbf{a}.\mathbf{b}$	produit scalaire entre les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$,
$\overset{[\,x.x\,]}{=}$	signifie que l'égalité se déduit de l'équation $(x.x)$,

	notations liées au choix du repère :
ξ	vecteur normé dans la direction du gradient,
η	vecteur tangent aux isophotes (en 2D),
$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$	base orthogonale normée de l'hyperplan orthogonal au gradient,
$R_0 = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$	repère orthogonal normé par défaut,
$R_1 = (\mathbf{e_0}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$	repère orthogonal normé, dont les vecteurs sont fonction de la position dans R_0,
$B = (b_{ij})_{i,j \in [1,n]}$	matrice de passage,
A	matrice diagonale,
D	matrice (ou tenseur) de diffusion,
$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$	valeurs propres de la matrice de diffusion

	opérateurs :
$\partial_{\mathbf{v}} u$ ou $u_{\mathbf{v}}$	dérivée de l'image u dans la direction du vecteur unitaire $\mathbf{v}$, soit $\nabla u \,.\, \mathbf{v}$,
$v^{\mathbf{i}}$	composante du vecteur $\mathbf{v}$ dans la direction du vecteur unitaire $\mathbf{i}$, soit $v^{\mathbf{i}} = \mathbf{v} \,.\, \mathbf{i}$,
$\mathcal{D}u$	opérateur de dérivation,
$\mathcal{D}^k u$	opérateur de dérivation à l'ordre k,
$div(\mathbf{F})$	divergence d'un champ de vecteurs $\mathbf{F}$,
$div^R(\mathbf{F})$	divergence dans le repère R : si $R = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$ alors $div^R(\mathbf{F}) = \partial_{\mathbf{v_1}} F^{\mathbf{v_1}} + \partial_{\mathbf{v_2}} F^{\mathbf{v_2}} + \partial_{\mathbf{v_3}} F^{\mathbf{v_3}}$,
∇u	gradient,
Hu	matrice hessienne de u,
Δu	laplacien,
f', f''	si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, f' est la dérivée première de f et f'' sa dérivée seconde,

Dans ce chapitre, nous cherchons à mieux comprendre et à interpréter le processus de diffusion de l'équation de diffusion anisotrope. Les interprétations et les approches proposées sont originales et issues de l'auteur, lorsqu'un résultat présenté existe dans la littérature, les références bibliographiques ont été mentionnées. Ce chapitre est présenté en trois parties.
Dans la première partie, nous réécrivons les équations de diffusion scalaire (Perona et Malik) puis matricielle (Weickert) dans un repère orthogonal normé lié à la géométrie locale de l'image. Nous faisons en particulier intervenir les dérivées secondes directionnelles de l'image dans les directions des vecteurs de ce repère. Ces réécritures des équations de diffusion permettent une interprétation de la diffusion et peuvent servir dans le choix de la fonction de diffusion.

Dans la deuxième partie, nous proposons une interprétation géométrique de la diffusion en appliquant le théorème de la divergence (ou formule d'Ostrogadski) localement le long d'un contour de l'image. Cette écriture permet de mieux comprendre le processus de diffusion par une équation de la forme $div(\varphi(u_{\mathbf{v}})\mathbf{v})$ où $\mathbf{v}$ est un champ de vecteurs normés et φ est une fonction de diffusion. En particulier, nous mettons en évidence les relations entre :

- la dérivée de la fonction de diffusion φ' et l'échange d'information dans la direction de $\mathbf{v}$;
- la fonction de diffusion φ et la courbure du champ de vecteurs $\mathbf{v}$.

Nous proposons alors une nouvelle équation de diffusion que nous appelons équation de diffusion avec un flux de diffusion multi-directionnel qui est comparée à la diffusion matricielle proposée par Weickert.

Dans la troisième partie, nous introduisons de nouvelles fonctionnelles dont la minimisation fait apparaître des équations de diffusion proches de l'équation de diffusion par un flux de diffusion multi-directionnel. En particulier, nous introduisons dans l'énergie minimisée un terme de lissage d'un champ de vecteurs.

6.1 Interprétation en termes de dérivées secondes directionnelles

L'équation de diffusion anisotrope de Perona et Malik est interprétée comme un processus de diffusion dans la direction du gradient et dans celle orthogonale au gradient, avec des coefficients de diffusion différents (équation (5.11)). Nous montrons cette relation et nous la généralisons aux images de dimension supérieure à 2. En outre, l'équation de diffusion plus générale utilisant une matrice de diffusion est décomposée dans un repère quelconque, et interprétée dans des cas particuliers.

6.1.1 Définitions et notations

Nous supposerons que l'image u est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, C^∞ par rapport à chacune de ses variables.
Un tenseur d'ordre k est un élément de $(\mathbb{R}^n)^k = \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k\ fois}$.
Un tenseur d'ordre 0 sera un scalaire réel, un tenseur d'ordre 1 est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et un tenseur d'ordre 2 une matrice carrée réelle de dimensions $n \times n$. Dans ce chapitre, nous utiliserons des

tenseurs d'ordre inférieur ou égal à 3. L'ensemble des tenseurs d'ordre k de $\mathbb{R}^n$ est noté $\mathcal{T}^k(\mathbb{R}^n)$. Soit $T \in \mathcal{T}^k(\mathbb{R}^n)$, nous notons $T_{i_1,\dots,i_k}$ ses valeurs réelles indexées par $i_j \in \{1,\dots,n\}$ avec $j \in \{1,\dots,k\}$.
Par abus de langage, nous appellerons tenseur d'ordre k un champ de tenseurs d'ordre k dans $\mathbb{R}^n$ c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{T}^k(\mathbb{R}^n)$. De même, nous appellerons parfois vecteur un champ de vecteurs et matrice un champ de matrices.
Nous introduisons un opérateur de dérivation noté $\mathcal{D}$ qui, appliqué à un champ de tenseurs T (ou par abus de langage à un tenseur) d'ordre k, donne un champ de tenseurs $U = \mathcal{D}T$ d'ordre $k+1$. Dans le repère $R = (\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)$ orthogonal normé, les éléments de U correspondent aux dérivées partielles des éléments de T par rapport à chacun des vecteurs du repère. Nous définissons donc l'opérateur de dérivation $\mathcal{D}$ ainsi :

Définition 15 (opérateur de dérivation $\mathcal{D}$) *:*

L'opérateur $\mathcal{D}$ appliqué à un champ de tenseur T d'ordre k donne un champ de tenseurs U d'ordre $k+1$, défini par :

$$\mathcal{D}T = U_{i_1,\dots,i_k,i_{k+1}} = \partial_{\mathbf{x}_{i_{k+1}}} T_{i_1,\dots,i_k} \tag{6.1}$$

dans la base orthogonale normée $R = (\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n)$ de $\mathbb{R}^n$, avec $\forall j \in [1,k+1],\ i_j \in [1,n]$.

Cet opérateur appliqué à une image $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui est un champ de tenseurs d'ordre 0, donne le gradient de l'image u, c'est-à-dire $\mathcal{D}u = \nabla u$.
Appliqué au gradient de l'image, l'opérateur $\mathcal{D}$ donne la matrice hessienne de l'image, c'est-à-dire $\mathcal{D}(\mathcal{D}u) = Hu$.
Nous noterons $\mathcal{D}^k$ l'opérateur $\mathcal{D}$ appliqué k fois, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^1 u &= \mathcal{D}u = \nabla u \\ \mathcal{D}^2 u &= Hu \end{aligned}$$

Le produit d'un tenseur T d'ordre k par un tenseur $\mathbf{v}$ d'ordre 1 est noté $T\,.\,\mathbf{v}$. Ce produit est un tenseur U d'ordre $k-1$ défini par

$$\begin{aligned} T\,.\,\mathbf{v} &= U \\ &\text{avec} \\ U_{i_1,\cdots,i_{k-1}} &= \sum_{j=1}^{n} T_{i_1,\cdots,i_{k-1},j}\,\mathbf{v}_j \end{aligned} \tag{6.2}$$

Ce produit est le produit scalaire de deux vecteurs dans le cas d'un tenseur d'ordre 1, et le produit d'une matrice par un vecteur dans le cas d'un tenseur d'ordre 2.
Nous noterons aussi $T\,.\,\mathbf{v}^k = T \underbrace{.\,\mathbf{v}\,.\cdots.\,\mathbf{v}}_{k fois}$.

L'opérateur de dérivation $\mathcal{D}$ permet d'écrire le développement de Taylor de l'intensité d'une image dans une direction donnée :

Théorème 6 (Développement de Taylor) :

La variation locale de l'intensité de l'image u en un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et dans la direction d'un vecteur $\mathbf{v}$ s'écrit :

$$u(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) = u(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{m} \frac{h^k}{k!} \mathcal{D}^k u(\mathbf{x}) \, . \, \mathbf{v}^k + \mathrm{o}(h^m) \tag{6.3}$$

Nous définissons aussi la notion de dérivée directionnelle d'ordre k de l'image en un point $\mathbf{x}$ et dans une direction donnée par un vecteur unitaire $\mathbf{v}$:

Définition 16 (Dérivées directionnelles) :

Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une image, $\mathbf{x}$ un point de $\mathbb{R}^n$, et $\mathbf{v}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. La dérivée directionnelle de u dans la direction $\mathbf{v}$ à l'ordre k est définie par

$$u_{\mathbf{v}^k}(x) = f^{(k)}(0) \tag{6.4}$$

où $f_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction définie en tout point $\mathbf{x}$ et pour tout vecteur $\mathbf{v}$ par

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad f(h) = u(\mathbf{x} + h\mathbf{v})$$

et $f^{(k)}$ est la dérivée de f à l'ordre k.

Nous noterons les dérivées directionnelles aux ordres 1 et 2 par $u_{\mathbf{v}}$, $u_{\mathbf{vv}}$.

Propriété 4 (Dérivées n-ièmes directionnelles) :

Les dérivées première et seconde de l'image dans une direction $\mathbf{v}$ et en un point $\mathbf{x}$ s'expriment en fonction du gradient ∇u et du hessien Hu de l'image :

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{v} \, . \, (\nabla u)(\mathbf{x}) && (6.5) \\ u_{\mathbf{vv}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{v}^t \, . \, (Hu)(\mathbf{x}) \, . \, \mathbf{v} && (6.6) \\ u_{\mathbf{v}^n}(\mathbf{x}) &= (\mathcal{D}^n u)(\mathbf{x}).\mathbf{v}^n && (6.7) \end{aligned}$$

6.1.2 Cas d'une diffusion scalaire

Il est intéressant de réécrire l'équation de diffusion de Perona et Malik en dimension 2 en fonction de $u_{\xi\xi}$ et de $u_{\eta\eta}$ qui sont les dérivées secondes directionnelles de $u(\mathbf{x})$ dans la direction du gradient $\xi = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ et dans la direction η orthogonale au gradient [Deriche et Faugeras, 1996; Aubert et Vese, 1997; Charbonnier, 1994].

Nous montrons d'abord diverses propriétés de ξ, puis nous réécrivons l'équation (5.2) page 69 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(g(| \nabla u |)\nabla u)$$

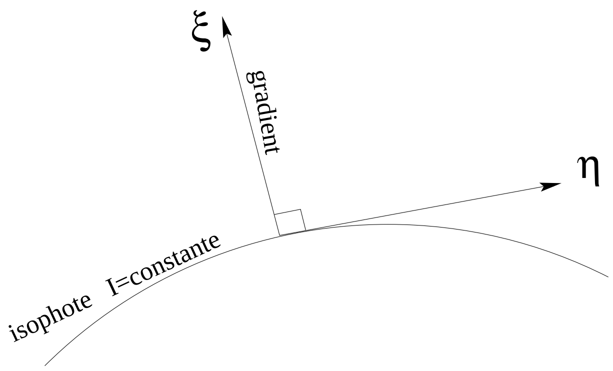


FIG. 6.1 – *Illustration des directions ξ et η par rapport aux isophotes.*

en l'équation (5.11) page 75 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Phi''(\mid \nabla u \mid) u_{\xi\xi} + \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid} u_{\eta\eta}$$

avec $\frac{\Phi'(x)}{x} = g(x)$ et nous généralisons ce résultat en dimension n.

PROPRIÉTÉ 5 (GRADIENT DU PRODUIT SCALAIRE) *:*

Soient $\mathbf{a}$ *et* $\mathbf{b}$ *deux champs de vecteurs,*

$$\mathcal{D}(\mathbf{a}\ .\ \mathbf{b}) = \mathcal{D}(\mathbf{a})\ .\ \mathbf{b} + \mathcal{D}(\mathbf{b})\ .\ \mathbf{a} \tag{6.8}$$

Cette relation découle directement de la dérivée d'un produit de fonctions.

PROPRIÉTÉ 6 (DÉRIVÉE D'UN VECTEUR NORMÉ) *:*

Soit $\mathbf{v}$ *un champ de vecteurs normés, alors*

$$\mathcal{D}\mathbf{v}\ .\ \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{6.9}$$

Démonstration :

Le vecteur $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ étant normé, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}\ .\ \mathbf{v} = 1$, donc en utilisant l'équation (6.8) :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{v}\ .\ \mathbf{v}) &= \mathcal{D}(1) \\ 2\,\mathcal{D}\mathbf{v}\ .\ \mathbf{v} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

■

Dans le cas particulier de la dérivée seconde dans la direction du gradient $\xi = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$, la dérivée seconde de l'image dans la direction du gradient est égale au gradient de la norme du gradient scalaire la direction du gradient.

PROPRIÉTÉ 7 (DÉRIVÉE DE LA NORME DU GRADIENT DANS LA DIRECTION DU GRADIENT) *:*

$$\nabla\left(\mid \nabla u \mid\right) . \frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid} = u_{\xi\xi} \tag{6.10}$$

Démonstration :

En effet

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\mid \nabla u \mid\right).\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid} &= \mathcal{D}\left(\frac{\nabla u.\nabla u}{\mid \nabla u \mid}\right).\xi \\
&= \mathcal{D}\left(\mathcal{D}u \,.\, \xi\right).\xi \\
&\overset{[\,6.8\,]}{=} \left(\mathcal{D}^2 u \,.\, \xi \;+\; \mathcal{D}\xi \,.\, \mathcal{D}u\right).\xi \\
&\overset{[\,6.9\,]}{=} \left(\mathcal{D}^2 u \,.\, \xi \;+\; 0\right).\xi \\
&\overset{[\,6.6\,]}{=} u_{\xi\xi}
\end{aligned}$$

■

La propriété 8 énonce que la divergence du champ de vecteurs correspondant au gradient normé, noté ξ, est la courbure moyenne de l'isosurface au point considéré. Cette courbure moyenne a été introduite dans le chapitre 2, dans l'interprétation géométrique du théorème 1, et est utilisée dans l'analyse multi-échelle morphologique invariante par transformation euclidienne (équation (2.4), paragraphe 2.2.4). Dans l'annexe C, nous montrons que la relation suivante entre les dérivées secondes directionnelles dans les directions de courbure principales k_i et les courbures principales e_i associées :

$$u_{e_i e_i} \;=\; -\mid \nabla u \mid .\, k_i$$

où le signe $-$ vient du choix de l'intérieur de l'isosurface comme étant la direction du gradient.

Propriété 8 (Divergence du vecteur gradient normé) *:*

Pour une image $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si $(\xi, \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{n-1})$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, et $\xi = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ est la direction du gradient, alors :

$$div\,(\xi) \;=\; \frac{1}{\mid \nabla u \mid}(\Delta u - u_{\xi\xi}) \;=\; \frac{1}{\mid \nabla u \mid}\sum_{i=1}^{n-1} u_{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i} \tag{6.11}$$

Démonstration :

Le laplacien peut s'écrire dans la base $(\xi, \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{n-1})$:

$$\Delta u \;=\; u_{\xi\xi} + \sum_{i=1}^{n-1} u_{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i} \tag{6.12}$$

Nous rappelons l'égalité suivante (où α est un réel et $\mathbf{v}$ un vecteur)

$$div(\alpha\, \mathbf{v}) \;=\; \alpha\, div(\mathbf{v}) + \nabla\alpha \,.\, \mathbf{v} \tag{6.13}$$

ainsi que

$$\nabla\left(f(s)\right) \;=\; f'(s)\nabla s \tag{6.14}$$

où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et s une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
div\,(\xi) &= div\left(\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}\right) \\
&\overset{[\,6.13\,]}{=} \frac{1}{\mid \nabla u \mid} div\,(\nabla u) + \nabla\left(\frac{1}{\mid \nabla u \mid}\right).\nabla u \\
&\overset{[\,6.14\,]}{=} \frac{1}{\mid \nabla u \mid}\Delta u - \nabla\,(\mid \nabla u \mid)\,\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid^2} \\
&\overset{[\,6.10\,]}{=} \frac{1}{\mid \nabla u \mid}\,(\Delta u - u_{\xi\xi}) \\
&\overset{[\,6.12\,]}{=} \frac{1}{\mid \nabla u \mid}\sum_{i=1}^{n-1} u_{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i}
\end{aligned}$$

■

Le terme de droite de l'équation de diffusion anisotrope s'interprète comme la somme de dérivées secondes directionnelles pondérées par des coefficients qui dépendent de la fonction de diffusion.

Propriété 9 (Interprétation directionnelle) *:*

$$div\left(\Phi'(\mid \nabla u \mid)\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}\right) = \Phi''(\mid \nabla u \mid)u_{\xi\xi} + \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid}\sum_{i}^{n-1} u_{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i} \tag{6.15}$$

$$\overset{en\ dimension\ 2}{=} \Phi''(\mid \nabla u \mid)u_{\xi\xi} + \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid}u_{\eta\eta} \tag{6.16}$$

Démonstration :

Nous pouvons réécrire :

$$div\left(\Phi'(\mid \nabla u \mid)\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}\right) \overset{[\,6.13\,]}{=} \Phi'(\mid \nabla u \mid)div\left(\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}\right) + \nabla\,(\Phi'(\mid \nabla u \mid)).\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}$$

Le deuxième terme s'écrit :

$$\begin{aligned}
\nabla\,(\Phi'(\mid \nabla u \mid)).\xi &\overset{[\,6.14\,]}{=} \Phi''(\mid \nabla u \mid)\;\nabla\,(\mid \nabla u \mid)).\xi \\
&\overset{[\,6.10\,]}{=} \Phi''(\mid \nabla u \mid)\;u_{\xi\xi}
\end{aligned}$$

Le premier terme s'écrit :

$$\Phi'(\mid \nabla u \mid)div\left(\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}\right) \overset{[\,6.11\,]}{=} \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid}\,(\Delta u - u_{\xi\xi}) = \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid}\sum_{i}^{n-1} u_{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i}.$$

■

Le résultat obtenu en dimension 2 (équation (6.16)) est classique et est présenté dans de nombreux travaux [Deriche et Faugeras, 1995; Aubert et al., 1994; Alvarez et al., 1993], et la relation en dimension 3 avait été vérifiée dans [Teboul et al., 1998].

Cependant, l'écriture de ce résultat en dimension quelconque a été présentée pour la première fois par l'auteur dans son travail de stage de DEA [Krissian, 1996]. L'équation (6.15) traduit une diffusion toujours isotrope dans l'hyperplan orthogonal au gradient de l'intensité.

6.1.3 Cas d'une diffusion matricielle

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'interprétation de la diffusion anisotrope utilisant une matrice de diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(D\nabla u).$$

En particulier, nous cherchons à exprimer la diffusion anisotrope matricielle à l'aide des dérivées secondes directionnelles de l'intensité dans les directions des vecteurs propres de la matrice D. Cette réécriture permettra de justifier l'interprétation de la diffusion anisotrope matricielle comme une diffusion dans les directions des vecteurs propres de la matrice de diffusion, pondérée par les valeurs propres associées. De plus, elle permettra de comparer cette interprétation avec celle de la diffusion anisotrope scalaire présentée dans le paragraphe précédent.

6.1.3.1 Changement de repère dans la base des vecteurs propres de D

Soit D le tenseur de diffusion, il peut se diagonaliser dans une base de ses vecteurs propres :

$$D = B^{-1}AB \tag{6.17}$$

avec $B^{-1} = B^T$. Considérons le changement de base $R_0 = (\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ en $R_1 = (\mathbf{e_0},\mathbf{e_1},\mathbf{e_2})$ et la matrice de passage B, telle que

$$\mathbf{v}^{R_1} = B\mathbf{v}^{R_0} \tag{6.18}$$

et

$$\mathbf{v}^{R_0} = B^t\mathbf{v}^{R_1} \tag{6.19}$$

La matrice de passage B est une fonction des coordonnées $B(x,y,z)$, et $\mathbf{e_0}$,$\mathbf{e_1}$, et $\mathbf{e_2}$ sont les vecteurs propres du tenseur de diffusion :

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Ainsi, en remplaçant le vecteur $\mathbf{v}$ par les vecteurs de R_1 dans l'équation (6.19), nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{e_0} &= b_{11}\mathbf{i} + b_{12}\mathbf{j} + b_{13}\mathbf{k} \qquad (6.20) \\ \mathbf{e_1} &= b_{21}\mathbf{i} + b_{22}\mathbf{j} + b_{23}\mathbf{k} \\ \mathbf{e_2} &= b_{31}\mathbf{i} + b_{32}\mathbf{j} + b_{33}\mathbf{k} \end{aligned}$$

R_0 et R_1 sont des bases orthogonales normées, donc $B^t = B^{-1}$, et $A = BDB^t$ avec

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

Nous notons $u_{\mathbf{v}} = \partial_{\mathbf{v}}(u) = \mathbf{v} \,.\, \nabla u$ la dérivée directionnelle de l'image u dans la direction d'un vecteur $\mathbf{v}$. Le gradient peut s'écrire dans n'importe quelle base :

$$\nabla u \;=\; u_{\mathbf{i}}\mathbf{i} + u_{\mathbf{j}}\mathbf{j} + u_{\mathbf{k}}\mathbf{k} \;=\; u_{\mathbf{e_0}}\mathbf{e_0} + u_{\mathbf{e_1}}\mathbf{e_1} + u_{\mathbf{e_2}}\mathbf{e_2}$$

NOTATION 2 *Nous notons*

$$\nabla^{R_0} u \;=\; \begin{pmatrix} u_{\mathbf{i}} \\ u_{\mathbf{j}} \\ u_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \quad et \quad \nabla^{R_1} u \;=\; \begin{pmatrix} u_{\mathbf{e_0}} \\ u_{\mathbf{e_1}} \\ u_{\mathbf{e_2}} \end{pmatrix}$$

La notation $\nabla u = \nabla^{R_0} u$ est choisie par défaut.

Ces deux vecteurs sont liés par la relation :

$$\boxed{\nabla^{R_1} \;=\; B\nabla^{R_0}} \tag{6.22}$$

Démonstration :

Cette relation est obtenue de manière évidente :

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{e_0}} &= \mathbf{e_0} \,.\, \nabla u \\ &\overset{[\,6.20\,]}{=} (b_{11}\mathbf{i} + b_{12}\mathbf{j} + b_{13}\mathbf{k}) \,.\, \nabla u. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{e_1}} &= (b_{21}\mathbf{i} + b_{22}\mathbf{j} + b_{23}\mathbf{k}) \,.\, \nabla u \\ u_{\mathbf{e_2}} &= (b_{31}\mathbf{i} + b_{32}\mathbf{j} + b_{33}\mathbf{k}) \,.\, \nabla u \end{aligned}$$

■

NOTATION 3 *Notons l'opérateur de divergence d'un vecteur $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)^t$ dans une base orthogonale normée $R = (\mathbf{x_1},\mathbf{x_2},\mathbf{x_3})$ de la manière suivante :*

$$div^R(\mathbf{v}) \;=\; div^R \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \;=\; \partial_{\mathbf{x_1}} v_1 + \partial_{\mathbf{x_2}} v_2 + \partial_{\mathbf{x_3}} v_3 \;=\; (\partial_{\mathbf{x_1}}\ \partial_{\mathbf{x_2}}\ \partial_{\mathbf{x_3}})\ \mathbf{v}$$

et par défaut $div = div^{R_0}$.

Nous avons alors la relation suivante :

$$\boxed{div^{R_0}(B^t\mathbf{v}^{R_1}) \;=\; div^{R_1}(\mathbf{v}^{R_1}) \;+\; \begin{pmatrix} div^{R_0}(\mathbf{e_0}) \\ div^{R_0}(\mathbf{e_1}) \\ div^{R_0}(\mathbf{e_2}) \end{pmatrix} \,.\, \mathbf{v}^{R_1}} \tag{6.23}$$

Démonstration :

Par définition,

$$div^{R_0}(B^t\mathbf{v}^{R_1}) \;=\; \partial_{\mathbf{i}}(B^t\mathbf{v}^{R_1})^{\mathbf{i}} + \partial_{\mathbf{j}}(B^t\mathbf{v}^{R_1})^{\mathbf{j}} + \partial_{\mathbf{k}}(B^t\mathbf{v}^{R_1})^{\mathbf{k}}.$$

En développant les termes $(B^t\mathbf{v}^{R_1})^{\{\mathrm{i,j,k}\}}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
div^{R_0}(B^t\mathbf{v}^{R_1}) &= \partial_\mathrm{i}(b_{11}v^{\mathbf{e_0}} + b_{21}v^{\mathbf{e_1}} + b_{31}v^{\mathbf{e_2}}) \;+ \\
&\quad \partial_\mathrm{j}(b_{12}v^{\mathbf{e_0}} + b_{22}v^{\mathbf{e_1}} + b_{32}v^{\mathbf{e_2}}) \;+ \\
&\quad \partial_\mathrm{k}(b_{13}v^{\mathbf{e_0}} + b_{23}v^{\mathbf{e_1}} + b_{33}v^{\mathbf{e_2}}) \\
&= \partial_\mathrm{i}(b_{11}v^{\mathbf{e_0}}) + \partial_\mathrm{j}(b_{12}v^{\mathbf{e_0}}) + \partial_\mathrm{k}(b_{13}v^{\mathbf{e_0}}) + \\
&\quad \partial_\mathrm{i}(b_{21}v^{\mathbf{e_1}}) + \partial_\mathrm{j}(b_{22}v^{\mathbf{e_1}}) + \partial_\mathrm{k}(b_{23}v^{\mathbf{e_1}}) + \\
&\quad \partial_\mathrm{i}(b_{31}v^{\mathbf{e_2}}) + \partial_\mathrm{j}(b_{32}v^{\mathbf{e_2}}) + \partial_\mathrm{k}(b_{33}v^{\mathbf{e_2}})
\end{aligned}$$

or $\mathbf{e_0} = (b_{11}, b_{12}, b_{13})^t$, donc

$$\begin{aligned}
\partial_\mathrm{i}(b_{11}v^{\mathbf{e_0}}) + \partial_\mathrm{j}(b_{12}v^{\mathbf{e_0}}) + \partial_\mathrm{k}(b_{13}v^{\mathbf{e_0}}) &= \mathbf{e_0}.\nabla(v^{\mathbf{e_0}}) + (\partial_\mathrm{i}b_{11} + \partial_\mathrm{j}b_{12} + \partial_\mathrm{k}b_{13}).v^{\mathbf{e_0}} \\
&= \mathbf{e_0}.\nabla(v^{\mathbf{e_0}}) + div^{R_0}(\mathbf{e_0}).v^{\mathbf{e_0}}
\end{aligned}$$

$div^{R_0}(B^t\mathbf{v}^{R_1})$ s'écrit donc

$$\begin{aligned}
div^{R_0}(B^t\mathbf{v}^{R_1}) &= \mathbf{e_0}.\nabla(v^{\mathbf{e_0}}) + div^{R_0}(\mathbf{e_0}).v^{\mathbf{e_0}} + \\
&\quad \mathbf{e_1}.\nabla(v^{\mathbf{e_1}}) + div^{R_0}(\mathbf{e_1}).v^{\mathbf{e_1}} + \\
&\quad \mathbf{e_2}.\nabla(v^{\mathbf{e_2}}) + div^{R_0}(\mathbf{e_2}).v^{\mathbf{e_2}} \\
&= \mathbf{e_0}.\nabla(v^{\mathbf{e_0}}) + \mathbf{e_1}.\nabla(v^{\mathbf{e_1}}) + \mathbf{e_2}.\nabla(v^{\mathbf{e_2}}) + \begin{pmatrix} div^{R_0}(\mathbf{e_0}) \\ div^{R_0}(\mathbf{e_1}) \\ div^{R_0}(\mathbf{e_2}) \end{pmatrix} . \mathbf{v}^{R_1} \\
&= div^{R_1}(\mathbf{v}^{R_1}) \;+\; \begin{pmatrix} div^{R_0}(\mathbf{e_0}) \\ div^{R_0}(\mathbf{e_1}) \\ div^{R_0}(\mathbf{e_2}) \end{pmatrix} . \mathbf{v}^{R_1}
\end{aligned}$$

■

6.1.3.2 Interprétation directionnelle de la diffusion tensorielle

THÉORÈME 7 (INTERPRÉTATION DIRECTIONNELLE DE LA DIFFUSION TENSORIELLE) *:*

Soit $\mathbf{e_0}$,$\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$ les vecteurs propres de la matrice de diffusion $D(\mathbf{x})$, pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, et λ_0,λ_1,λ_2 les valeurs propres associées, alors l'équation de diffusion anisotrope s'écrit

$$\begin{aligned}
u_t &= div(D\nabla u) \\
&= \sum_{i=0}^{2} \partial_{\mathbf{e_i}}(\lambda_i \, u_{\mathbf{e_i}}) + \lambda_i div(\mathbf{e_i})u_{\mathbf{e_i}} \qquad (6.24) \\
&= \sum_{i=0}^{2} \lambda_i \, u_{\mathbf{e_i}\mathbf{e_i}} + \lambda_i \, (\mathcal{D}\mathbf{e_i} \, . \, \mathcal{D}u).\mathbf{e_i} + \partial_{\mathbf{e_i}}(\lambda_i) \, u_{\mathbf{e_i}} + \lambda_i div(\mathbf{e_i})u_{\mathbf{e_i}}. \qquad (6.25)
\end{aligned}$$

Démonstration :

L'équation de diffusion s'écrit :

$$\begin{aligned} u_t &= div^{R_0}(D\nabla^{R_0}u) \\ &\overset{[\ 6.17\ ]}{=} div^{R_0}(B^tAB\nabla^{R_0}u) \\ &\overset{[\ 6.22\ ]}{=} div^{R_0}(B^tA\nabla^{R_1}u) \\ &\overset{[\ 6.23\ ]}{=} div^{R_1}(A\ \nabla^{R_1}u) + \begin{pmatrix} div(\mathbf{e_0}) \\ div(\mathbf{e_1}) \\ div(\mathbf{e_2}) \end{pmatrix} .\ (A\ \nabla^{R_1}u) \end{aligned}$$

$$u_t \overset{[\ 6.21\ ]}{=} \partial_{\mathbf{e_0}}(\lambda_0 u_{\mathbf{e_0}}) + \partial_{\mathbf{e_1}}(\lambda_1 u_{\mathbf{e_1}}) + \partial_{\mathbf{e_2}}(\lambda_2 u_{\mathbf{e_2}}) + \begin{pmatrix} div(\mathbf{e_0}) \\ div(\mathbf{e_1}) \\ div(\mathbf{e_2}) \end{pmatrix} .\ (A\ \nabla^{R_1}u)$$

soit

$$u_t = \sum_{i=0}^{2} \partial_{\mathbf{e_i}}(\lambda_i\ u_{\mathbf{e_i}}) + \lambda_i div(\mathbf{e_i})u_{\mathbf{e_i}}.$$

Cette dernière égalité est l'équation (6.24). En développant le terme $\partial_{\mathbf{e_i}}(\lambda_i\ u_{\mathbf{e_i}})$, nous obtenons :

$$\partial_{\mathbf{e_i}}(\lambda_i\ u_{\mathbf{e_i}}) = \partial_{\mathbf{e_i}}(\lambda_i)u_{\mathbf{e_i}} + \lambda_i\partial_{\mathbf{e_i}}(u_{\mathbf{e_i}}),$$

or pour tout vecteur $\mathbf{n}$ normé,

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{n}}\ (u_{\mathbf{n}}) &= \mathbf{n}.\mathcal{D}(\mathbf{n}\ .\ \mathcal{D}u) \\ &\overset{[\ 6.8\ ]}{=} \mathbf{n}.(\mathcal{D}^2u\ .\ \mathbf{n} + \mathcal{D}\mathbf{n}\ .\ \mathcal{D}u) \\ &= u_{\mathbf{nn}} + (\mathcal{D}\mathbf{n}\ .\ \mathcal{D}u).\mathbf{n}. \end{aligned}$$

Nous avons donc l'égalité $\partial_{\mathbf{e_i}}(\lambda_i\ u_{\mathbf{e_i}}) = \lambda_i\ u_{\mathbf{e_i}\mathbf{e_i}} + \lambda_i\ (\mathcal{D}\mathbf{e_i}\ .\ \mathcal{D}u).\mathbf{e_i} + \partial_{\mathbf{e_i}}(\lambda_i)\ u_{\mathbf{e_i}}$,
et par conséquent l'équation (6.25).
Cette dernière égalité se généralise en dimension quelconque. ■

L'égalité (6.25) fait intervenir les dérivées secondes directionnelles de l'image dans les directions des vecteurs propres de la matrice de diffusion D, pondérées par les valeurs propres associées. Cependant, les trois autres termes de cette somme ne sont en général pas négligeables. Le résultat obtenu peut s'interpréter dans les cas particuliers d'une matrice constante et d'une matrice dont un des vecteurs propres est le gradient de l'image, c'est-à-dire le cas de l'équation de Perona et Malik.

Cas d'une matrice de diffusion constante Il est clair que dans le cas d'une matrice D constante, cette diffusion correspond à la somme des diffusions dans les directions des vecteurs propres et pondérées par les valeurs propres associées, puisque les valeurs propres et les vecteurs propres sont constants : $\mathcal{D}\mathbf{e_i} = 0$, $\partial_{\mathbf{e_i}}(\lambda_i) = 0$ et $div(\mathbf{e_i}) = 0$.

$$u_t = \lambda_0\ u_{\mathbf{e_0e_0}} + \lambda_1\ u_{\mathbf{e_1e_1}} + \lambda_2\ u_{\mathbf{e_2e_2}}$$

Cas d'une fonction de diffusion La diffusion anisotrope n'a d'intérêt que si la matrice de diffusion dépend des propriétés locales de l'image, et cette matrice n'est donc plus homogène dans l'image. Le cas où le vecteur propre $\mathbf{e_0}$ a l'orientation du gradient de l'image correspond en fait à la diffusion anisotrope avec une fonction de diffusion :

$$D\nabla u \;=\; \lambda_0 \; \nabla u.$$

En utilisant l'équation (6.24), nous déduisons facilement que les termes associés à $i = 1$ et $i = 2$ sont nuls. Pour $i = 1$ par exemple, $u_{\mathbf{e_1}} = 0$ donc $\partial_{\mathbf{e_1}}(\lambda_1 u_{\mathbf{e_1}}) \;=\; 0$ et $\lambda_1 div(\mathbf{e_1}) u_{\mathbf{e_1}} \;=\; 0$.
Il reste donc $\partial_{\mathbf{e_0}}(\lambda_0 u_{\mathbf{e_0}}) + \lambda_0 div(\mathbf{e_0}) u_{\mathbf{e_0}}$. En outre, dans ce cas, $u_{\mathbf{e_0}} div(u_{\mathbf{e_0}}) = \sum_{i=1}^{n-1} u_{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i} = u_{\mathbf{e_1}\mathbf{e_1}} + u_{\mathbf{e_2}\mathbf{e_2}}$ d'après l'équation (6.11), $\partial_{\mathbf{e_0}} \; u_{\mathbf{e_0}} \;=\; u_{\mathbf{e_0}\mathbf{e_0}}$ d'après l'équation (6.10), l'équation de diffusion devient alors

$$u_t \;=\; \lambda_0 u_{\mathbf{e_0}\mathbf{e_0}} + \lambda_0 (u_{\mathbf{e_1}\mathbf{e_1}} + u_{\mathbf{e_2}\mathbf{e_2}}) + (\lambda_0)_{\mathbf{e_0}} u_{\mathbf{e_0}}$$

Si $\lambda_0 \;=\; \lambda_0(u_{\mathbf{e_0}})$ comme dans le cas de la diffusion anisotrope définie par Perona et Malik, alors $(\lambda_0)_{\mathbf{e_0}} u_{\mathbf{e_0}} \;=\; \partial_{\mathbf{e_0}}(u_{\mathbf{e_0}}) \; {\lambda_0}' u_{\mathbf{e_0}} \;=\; {\lambda_0}' u_{\mathbf{e_0}} u_{\mathbf{e_0}\mathbf{e_0}}$ et ce qui donne une équation équivalente à l'équation (6.15).

Interprétation dans le cas général ? L'interprétation directe de l'équation (6.24) (ou de l'équation (6.25)) semble difficile, et le choix des vecteurs propres de la matrice D dépend généralement des caractéristiques locales de l'image. Une interprétation basée sur le flux est donnée dans le paragraphe suivant.

6.2 Interprétation de la diffusion par le flux

L'écriture de la diffusion anisotrope sous la forme d'une divergence fait de cette équation aux dérivées partielles une loi de conservation. La stabilité du schéma numérique est alors plus facile à assurer tout en assurant un rehaussement des contours (chapitre 2, partie 1). Dans ce chapitre, nous proposons une interprétation géométrique de la diffusion anisotrope dans le cas d'un flux multi-directionnel, basée sur l'application du théorème de divergence le long des contours. Nous introduisons alors une nouvelle équation de diffusion, que nous comparons à celle proposée par Weickert.

6.2.1 Équation de Perona et Malik : flux dirigé par le gradient

Nous rappelons l'équation de la diffusion anisotrope avec une fonction de diffusion scalaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; div\left(\Phi'(\mid \nabla u \mid) \, \frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid} \right) \;=\; div(\; \mathbf{F} \;). \tag{6.26}$$

Le champ de vecteur

$$\boxed{\mathbf{F} \;=\; \varphi(\mid \nabla u \mid)\xi \;=\; \varphi(u_\xi)\xi} \tag{6.27}$$

est appelé le flux associé à la diffusion, où la fonction φ est égale à Φ'. La courbe correspondant au contour est approchée localement à l'ordre 2 par un cercle de rayon R et de centre O.

Propriété 10 (Flux dirigé par le gradient) *:*

La conservation de l'intensité, exprimée par le théorème de divergence, permet d'obtenir la relation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\varphi(|\ \nabla u\ |)}{R} + \partial_\xi(\varphi(|\ \nabla u\ |)).$$

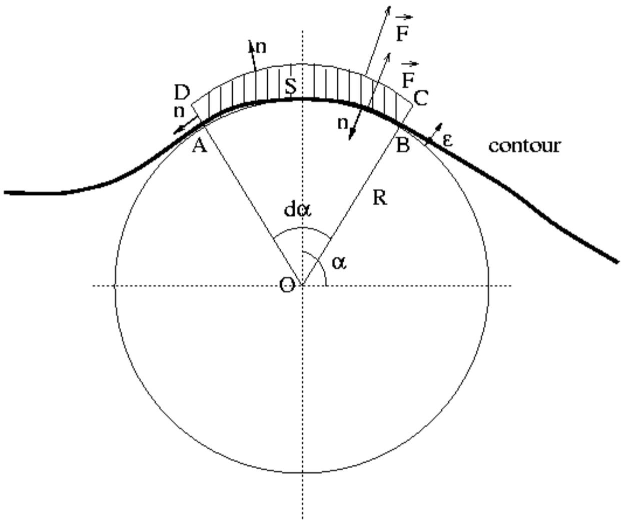


Fig. 6.2 – *Transfert d'intensité dans un élément de surface le long du contour au cours de la diffusion anisotrope.*

Démonstration :

L'élément de surface dS est défini par une portion du contour de largeur ε, et compris entre 2 arcs de cercle de centre O, d'angle $d\alpha$ petit et de rayons R et $R+\varepsilon$ (voir la figure 6.2). Le bord de la surface dS est délimité par la courbe $\mathcal{C} = A \to B \to C \to D \to A$. L'aire de la surface dS est $dS = d\alpha R\varepsilon$ En intégrant l'équation (6.26) sur la surface dS, et en utilisant le théorème de la divergence (section 5.2 page 70) , nous obtenons :

$$\int_{dS} \frac{\partial u}{\partial t} = \int_{dS} div(\ \mathbf{F}\ ) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\ .\ \mathbf{n}\ dC.$$

En décomposant le long du contour $\mathcal{C}$,

$$\int_{dS} \frac{\partial u}{\partial t} = \int_{A\to B} \mathbf{F}\ .\ \mathbf{n}\ dC + \underbrace{\int_{B\to C} \mathbf{F}\ .\ \mathbf{n}\ dC}_{0} + \int_{C\to D} \mathbf{F}.\mathbf{n}\ dC + \underbrace{\int_{D\to A} \mathbf{F}\ .\ \mathbf{n}\ dC}_{0}.$$

Il reste donc

$$\begin{aligned}
\int_{dS} \frac{\partial u}{\partial t} &= \int_{A \to B} \mathbf{F} \,.\, \mathbf{n} \, dC + \int_{C \to D} \mathbf{F} \,.\, \mathbf{n} \, dC \\
&= \int_{\theta=\alpha-d\alpha/2}^{\alpha+d\alpha/2} \varphi(\mid \nabla u \mid)(\theta,\, R+\varepsilon) \;\; (R+\varepsilon) \, d\theta - \int_{\theta=\alpha-d\alpha/2}^{\alpha+d\alpha/2} \varphi(\mid \nabla u \mid)(\theta,\, R) \;\; R \, d\theta.
\end{aligned}$$

Nous réécrivons $\varphi(\mid \nabla u \mid)(\theta,\, R+\varepsilon)\; (R+\varepsilon)$ en $\varepsilon\varphi(\mid \nabla u \mid)\; (\theta,\, R+\varepsilon) + \varphi(\mid \nabla u \mid)(\theta,\, R+\varepsilon)\; R$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\int_{dS} \frac{\partial u}{\partial t} &= \int_{\theta=\alpha-d\alpha/2}^{\alpha+d\alpha/2} \varepsilon\varphi(\mid \nabla u \mid)(\theta,\, R+\varepsilon) \; d\theta \\
&\quad + \int_{\theta=\alpha-d\alpha/2}^{\alpha+d\alpha/2} \left(\varphi(\mid \nabla u \mid)(\theta,\, R+\varepsilon) - \varphi(\mid \nabla u \mid)(\theta,\, R)\right) \;\; R \, d\theta \\
&= \int_{\theta=\alpha-d\alpha/2}^{\alpha+d\alpha/2} \left[\, \varepsilon\varphi(\mid \nabla u \mid)(\theta,\, R) \; + \; \mathrm{o}(\varepsilon) \,\right] \; d\theta \\
&\quad + \int_{\theta=\alpha-d\alpha/2}^{\alpha+d\alpha/2} \left(\varepsilon \;\; \frac{\partial\varphi(\mid \nabla u \mid)}{\partial R}(\theta,\, R) \; + \; \mathrm{o}(\varepsilon)\right) \;\; R \, d\theta
\end{aligned}$$

Le premier terme traduit une variation de l'intensité liée à la valeur du flux au point considéré, et le deuxième terme une variation liée à la dérivée partielle du flux dans la direction normale au contour.

$$\int_{dS} \frac{\partial u}{\partial t} \;=\; \varepsilon \; d\alpha \; \varphi(\mid \nabla u \mid)(\theta,\, R) + \int_{\theta=\alpha-1/2\; d\alpha}^{\alpha+1/2\; d\alpha} \varepsilon \;\; \frac{\partial\varphi(\mid \nabla u \mid)}{\partial R}(\theta,\, R) \; R \; d\theta + d\alpha \mathrm{o}(\varepsilon)$$

En prenant la limite lorsque $d\alpha \to 0$ et $\varepsilon \to 0$, en en divisant par dS, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} dS &= \varepsilon \; d\alpha \; R \left(\frac{\varphi(\mid \nabla u \mid)}{R} + \partial_\xi(\varphi(\mid \nabla u \mid))\right) + \mathrm{o}(dS) \qquad (6.28)\\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\varphi(\mid \nabla u \mid)}{R} + \partial_\xi(\varphi(\mid \nabla u \mid)).
\end{aligned}$$

■

D'une part, $\frac{1}{R}$ n'est autre que la courbure κ du contour (isosurface) et s'exprime aussi par $\frac{1}{|\nabla u|} u_{\eta\eta}$. D'autre part, l'expression $\partial_\xi(\varphi(\mid \nabla u \mid))$ qui est la dérivée du flux dans la direction radiale (ou encore la direction du gradient) vaut $\varphi'(\mid \nabla u \mid)\; u_{\xi\xi}$. Nous retrouvons donc l'expression de l'équation (6.16) de la diffusion anisotrope sous la forme de somme pondérée de dérivées secondes directionnelles.

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; \varphi(\mid \nabla u \mid)\; \kappa + \varphi'(\mid \nabla u \mid)\; u_{\xi\xi} \qquad (6.29)$$

La propriété 10 est aussi un cas particulier du théorème 7. Si cette propriété n'introduit pas un résultat nouveau, elle permet d'interpréter géométriquement le transfert de matière lié à la diffusion anisotrope. Le flux dans la direction tangente au contour étant nul, nous dirons qu'il n'y a pas d'échange d'information le long du contour, mais que la courbe associée au contour est lissée par un terme de courbure moyenne : le premier terme s'écrit $\frac{\varphi(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\kappa \mid \nabla u \mid$. Dans le paragraphe suivant, nous nous intéressons à un flux de diffusion décomposé dans une base correspondant à une estimation plus robustes du contour, et avec un flux tangentiel non nul.

6.2.2 Décomposition du flux dans la base (ξ^*,η^*) associée à l'image lissée : flux multi-directionnel

Nous notons ξ^* le vecteur gradient normalisé de l'image lissée : $\xi^* = \frac{\nabla u^*}{|\nabla u^*|}$, et η^* le vecteur normalisé tangent aux isophotes de l'image lissée : $\eta^* \perp \xi^*$, si bien que (ξ^*,η^*) est une base orthogonale normée de $\mathbb{R}^2$. Nous supposerons en outre que le lissage est une convolution des composantes du vecteur par un noyau gaussien avec un écart-type donné. Nous introduisons le flux suivant :

$$\boxed{\mathbf{F} = \varphi_1(u_{\xi^*})\xi^* + \varphi_2(u_{\eta^*})\eta^*} \tag{6.30}$$

Ce flux est une généralisation du flux proposé par Perona et Malik et donné par l'équation (6.27). Il prend en compte deux champs de vecteurs unitaires, la direction du gradient lissé ξ^* et la direction tangente aux isophotes lissées η^*, avec des fonctions de diffusion φ_1 et φ_2. L'idée est de rendre les directions du flux plus robuste au bruit, il est donc possible de choisir d'autres orientations comme par exemple les vecteurs propres du tenseur de structure. Le flux proposé présente aussi l'originalité d'utiliser les dérivées directionnelles de l'intensité dans les directions des vecteurs ξ^* et η^* comme paramètres respectifs des fonctions de diffusion dans les directions ξ^* et η^*. Ainsi, lorsque nous diffusons le long des lignes de flot définies par un champ de vecteurs, nous ne nous intéressons qu'à la variation d'intensité dans la direction de ce champ, contrairement à des fonctions dépendant de la norme du gradient de l'image.
À chaque champ de vecteurs unitaires, nous associons un rayon de courbure correspondant au rayon de courbure d'une courbe normale en tout point au champ de vecteurs. Nous notons R^*_ξ le rayon de courbure associé à ξ^*, et κ^*_ξ la courbure associée. De même, nous notons R^*_η et κ^*_η le rayon de courbure et la courbure associés à η^*.
La démonstration de la propriété 10 ne dépend pas du choix particulier de l'isophote comme estimation du contour. En utilisant donc cette propriété pour chacun des flux $\mathbf{F_1} = \varphi_1(u_{\xi^*})\xi^*$ et $\mathbf{F_2} = \varphi_2(u_{\eta^*})\eta^*$, nous obtenons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} div(\mathbf{F_1}) &= \varphi_1(u_{\xi^*})\,\kappa^*_\xi + \partial_{\xi^*}(\varphi_1(u_{\xi^*})) \\ div(\mathbf{F_2}) &= \varphi_2(u_{\eta^*})\,\kappa^*_\eta + \partial_{\eta^*}(\varphi_2(u_{\eta^*})). \end{aligned}$$

Ce qui donne l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi_1(u_{\xi^*})\,\kappa^*_\xi + \partial_{\xi^*}(\varphi_1(u_{\xi^*})) + \varphi_2(u_{\eta^*})\,\kappa^*_\eta + \partial_{\eta^*}(\varphi_2(u_{\eta^*})). \tag{6.31}$$

Avec $\partial_{\xi^*}(\varphi_1(u_{\xi^*})) = \varphi_1{}'\,[u_{\xi^*\xi^*} + (\mathcal{D}\xi^*.\mathcal{D}u).\xi^*]$ et $\partial_{\eta^*}(\varphi_2(u_{\eta^*})) = \varphi_2{}'\,[u_{\eta^*\eta^*} + (\mathcal{D}\eta^*.\mathcal{D}u).\eta^*]$.
Ce schéma peut être interprété comme une diffusion dans le sens de ξ^* avec une fonction de diffusion φ_1 (à comparer avec la fonction Φ'), une diffusion le long de l'isophote de l'image lissée u^* avec une fonction de diffusion φ_2, et deux termes de lissage assurant la conservation de l'intensité et dépendant des courbures κ^*_ξ et κ^*_η. L'équation (6.31) peut être comparée à l'équation (6.25) du théorème 7 en dimension $n = 2$, avec $e_0 = \xi^*$, $\lambda_0 = \frac{1}{u_{\xi^*}}\,\varphi_1(u_{\xi^*})$, et $div(e_0) = \frac{1}{u_{\xi^*}}\,\kappa^*_\xi$, et de même pour e_1, λ_1 et $div(e_1)$ en fonction de η^*.

Nous pouvons alors interpréter le processus de lissage proposé par Weickert dans ce formalisme [Weickert, 1994; Weickert, 1998]. Si la matrice de diffusion D se décompose dans une base orthogonale de vecteurs propres $(\mathbf{e_0},\mathbf{e_1})$ avec des valeurs propres associée λ_0 et λ_1, le gradient s'écrit $\nabla u = u_{\mathbf{e_0}}\mathbf{e_0} + u_{\mathbf{e_1}}\mathbf{e_1}$ et le flot s'écrit

$$\mathbf{F} = D\nabla u = \lambda_0\, u_{\mathbf{e_0}}\mathbf{e_0} + \lambda_1\, u_{\mathbf{e_1}}\mathbf{e_1}.$$

Weickert [Weickert, 1995; Weickert, 1997a; Weickert, 1997d] utilise des fonctions λ_0 et λ_1 fonctions d'une notion de cohérence locale, le flux n'est plus sous la forme donnée par l'équation (6.30). Cependant, si le valeurs propres sont des fonctions des dérivées premières dans les directions des vecteurs propres respectifs, alors la diffusion anisotrope est sous la forme donnée par l'équation (6.30) :

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \lambda_0(u_{\mathbf{e_0}})\\ \lambda_1 &= \lambda_1(u_{\mathbf{e_1}}),\end{aligned}$$

et la relation entre les valeurs propres et les fonctions φ_1 et φ_2 est donnée par :

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= x\lambda_0(x)\\ \varphi_2(y) &= y\lambda_1(y).\end{aligned}$$

Le paragraphe suivant propose une approche variationnelle en relation avec le flux de diffusion que nous avons proposé.

6.3 Écriture variationnelle

L'approche variationnelle de la diffusion anisotrope consiste à minimiser l'énergie suivante :

$$\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)\, d\Omega$$

Cette énergie ne fait pas intervenir de gradient lissé ou même de critère robuste au bruit. Considérons donc le problème plus général de la minimisation de la fonctionnelle suivante

$$E(u) = \int_\Omega \Phi(\nabla u,\nabla u^*)\, d\Omega \tag{6.32}$$

ou plus particulièrement, pour faire un parallèle avec la diffusion anisotrope, la minimisation de

$$E(u) = \int_\Omega \Phi(\nabla u\, .\, \nabla u^*)\, d\Omega \tag{6.33}$$

où ∇u^* est le gradient lissé, nous supposerons que le lissage est un produit de convolution avec une fonction gaussienne d'écart-type constant. L'intérêt de minimiser cette énergie est de réduire les variations d'intensité dans une direction particulière. De plus, nous recherchons à interpréter l'équation de diffusion proposée (équation (6.30)) comme un processus de minimisation d'énergie.

6.3.1 Minimisation d'une énergie fonction de $\nabla u \,.\, \nabla u^*$

Nous montrons ci-dessous que le gradient de l'énergie définie par l'équation (6.33) peut s'exprimer facilement.

Propriété 11 (gradient d'une énergie avec un terme de lissage) *:*

Le gradient de l'énergie définie par l'équation (6.33) est donné par

$$\nabla E \;=\; -div\left(\; \Phi'(\nabla u \,.\, \nabla u^*)\; \nabla u^* \;+\; \left[\; \Phi'(\nabla u \,.\, \nabla u^*)\; \nabla u \;\right]^* \;\right). \tag{6.34}$$

Démonstration :

Pour calculer le gradient de cette énergie, nous reprenons la démarche utilisée pour la démonstration des équations d'Euler-Lagrange. Nous notons

$$u_\varepsilon(x) \;=\; u + \varepsilon h$$

en reprenant le mêmes notations qu'au paragraphe 5.3.2.1.

Notons A la forme bilinéaire suivante

$$A(u,v) \;=\; \nabla u \,.\, \nabla v^*$$

et

$$B(u,h) \;=\; A(u,h) + A(h,u) \;=\; \nabla u \,.\, \nabla h^* + \nabla u^* \,.\, \nabla h.$$

$$\begin{aligned} F(\varepsilon) \;&=\; \int_\Omega \Phi\left(A(u+\varepsilon,u+\varepsilon)\right)\; d\Omega \\ &=\; \int_\Omega \Phi\left(A(u,u) \;+\; \varepsilon\, B(u,h) \;+\; \mathrm{o}(\varepsilon)\right)\; d\Omega \end{aligned}$$

En dérivant F, on obtient la dérivée de E dans la direction h.

$$\begin{aligned} F'(\varepsilon) \;&=\; \int_\Omega B(u,h)\; \Phi'(\; A(u+\varepsilon,\, u+\varepsilon)\;)\; d\Omega \\ F'(0) \;&=\; \int_\Omega (\nabla u \,.\, \nabla h^* + \nabla u^* \,.\, \nabla h)\;\; \Phi' \;\; d\Omega \\ &\quad \text{où}\;\; \Phi' \;\; \text{désigne}\;\; \Phi'(\; A(u,\, u)\;) \\ F'(0) \;&=\; \int_\Omega \Phi'\; \nabla u^* \,.\, \nabla h \;\; d\Omega + \int_\Omega \Phi'\; \nabla u \,.\, \nabla h^* \;\; d\Omega \end{aligned}$$

Or l'opérateur de lissage est le produit de convolution avec une fonction gaussienne d'écart-type σ, son adjoint est donc égal à lui-même :

$$\int_\Omega a \,.\, b^*\, d\Omega \;=\; \int_\Omega b \,.\, a^*\, d\Omega \tag{6.35}$$

Donc

$$F'(0) \;=\; \int_\Omega \{\Phi'\; \nabla u^* \;+\; [\Phi'\; \nabla u]^*\} \,.\, \nabla h \;\; d\Omega$$

En outre, si la fonction h est nulle sur la frontière $\partial\Omega$, la relation suivante est vérifiée pour tout champ de vecteurs $\mathbf{V}$

$$\int_\Omega \mathbf{V} \, . \, \nabla h \, d\Omega \; = \; \int_\Omega -div(\mathbf{V}) \; h \; d\Omega \tag{6.36}$$

Dans le cas simple où $\Omega = [0,a] \times [0,b]$, cette relation est facile à vérifier, en décomposant l'intégrale de $\mathbf{V} \, . \, \nabla h$ en la somme de deux intégrales de $v_1 \; h_x$ et de $v_2 \; h_y$, avec $\mathbf{V} = (v_1 \; , v_2)^t$. Après une intégration par parties, $v_1 \; h_x = [v_1 \; h]_x - (v_1)_x \; h$. h étant nulle sur la frontière, il reste l'intégrale du deuxième terme. ∎

Un cas particulier de cette propriété est le cas limite où le lissage est nul, c'est-à-dire $\nabla u = \nabla u^*$. Dans ce cas, nous obtenons que le gradient de l'énergie $E(u) = \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid^2) d\Omega$ est égal à

$$\nabla E \; = \; -div(2\Phi'(\mid \nabla u \mid^2) \; \nabla u),$$

ce qui est en accord avec l'équation de diffusion anisotrope si

$$\Phi(\nabla u \, . \, \nabla u) \quad = \quad \Phi_1(\sqrt{\nabla u \, . \, \nabla u}) \; = \; \Phi_1(\mid \nabla u \mid),$$

puisque $\Phi(x) = \Phi_1(\sqrt{x})$ et $\Phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Phi_1'(\sqrt{x})$, et nous retrouvons le premier terme de l'équation (5.8) page 74.
Cette minimisation introduit en outre un terme non présent dans l'équation de Perona et Malik, et qui correspond à la divergence du flux lissé :

$$\left[\Phi'(\nabla u \, . \, \nabla u) \; \frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}\right]^* .$$

Cependant, le premier terme de l'opérateur divergence, $\Phi'(\nabla u \, . \, \nabla u^*) \; \nabla u^*$, n'est pas tout à fait égal à notre choix du flux dans la direction du gradient lissé, introduit par l'équation (6.30). Nous considérons dans le paragraphe suivant le cas plus général d'une énergie fonction de deux champs de vecteurs.

6.3.2 Cas plus général d'une énergie fonction de deux champs de vecteurs

Afin d'obtenir un terme de flux égal à $\Phi'(u_{\xi^*})\xi^*$, considérons le gradient de l'énergie plus générale donnée par :

$$E(u) \; = \; \int_\Omega \Phi(\mathbf{v_1}(u),\mathbf{v_2}^*(u)) \; d\Omega \tag{6.37}$$

où $\mathbf{v_1}$ et $\mathbf{v_2}^*$ sont deux champs de vecteurs unitaires, qui dépendent de l'image u. Nous définissons $\partial_1\Phi$ comme un champ de vecteurs tel que :

$$\Phi(\mathbf{v_1}(u+\varepsilon h),\mathbf{v_2}^*(u)) \; = \; \Phi(\mathbf{v_1}(u),\mathbf{v_2}^*(u)) + \varepsilon\partial_1\Phi \, . \, \nabla h + \mathrm{o}(\varepsilon),$$

et de même $\partial_2\Phi$ par :

$$\Phi(\mathbf{v_1}(u),\mathbf{v_2}^*(u+\varepsilon h)) \; = \; \Phi(\mathbf{v_1}(u),\mathbf{v_2}^*(u)) + \varepsilon\partial_2\Phi \, . \, \nabla h^* + \mathrm{o}(\varepsilon).$$

où ε est un réel proche de zéro, h une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, ∇h^* est le gradient de h lissé par une convolution avec un noyau gaussien. Le gradient de l'énergie de l'équation (6.37) vérifie alors la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 12 (GRADIENT D'UNE ÉNERGIE FONCTION DE DEUX CHAMPS DE VECTEURS) *:*

Le gradient de l'énergie définie par l'équation (6.37) est donné par

$$\nabla E \;=\; -div\,(\;\partial_1 \Phi \;+\; [\;\partial_2 \Phi\;]^*\;)\,. \tag{6.38}$$

Démonstration :

Nous reprenons les termes de la démonstration précédente.

$$\begin{aligned} F(\varepsilon) &= \int_\Omega \Phi\left(\mathbf{v_1}(u+\varepsilon h), \mathbf{v_2}^*(u+\varepsilon h)\right)\right) \; d\Omega \\ F'(\varepsilon) &= \int_\Omega \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \; d\Omega \\ &= \int_\Omega \partial_1 \Phi \,.\, \nabla h \;+\; \partial_2 \Phi \,.\, \nabla h^* \;+\; \mathrm{o}(1) \;\; d\Omega \end{aligned}$$

ce qui donne directement

$$F'(0) \;=\; \int_\Omega (\partial_1 \Phi \;+\; [\partial_2 \Phi]^*) \;.\, \nabla h \;\; d\Omega$$

et donc, par le même raisonnement que dans la démonstration précédente, nous obtenons l'égalité de l'équation (6.38). ■

Nous appliquons cette propriété à deux cas particuliers.

Cas particulier, propriété 11 Le premier cas particulier est celui de la propriété 11, c'est-à-dire $\mathbf{v_1}(u) \;=\; \nabla u$ et $\mathbf{v_2}(u) \;=\; \nabla u^*$. Dans ce cas, $\Phi(\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}^*) = \Phi(\nabla u \,.\, \nabla u^*)$, et

$$\begin{aligned} \partial_1 \Phi &= \Phi' \; \nabla u^* \\ \partial_2 \Phi &= \Phi' \; \nabla u. \end{aligned}$$

Et nous retrouvons bien l'égalité de la propriété 11.

Deuxième cas particulier Considérons le cas de l'énergie suivante :

$$E(u) \;=\; \int_\Omega \Phi(\nabla u \,.\, \xi^*) d\Omega \;=\; \int_\Omega \Phi(u_{\xi^*}) d\Omega,$$

où $\xi^* \;=\; \frac{\nabla u^*}{|\nabla u^*|}$. Nous avons dans ce cas

$$\begin{aligned} \mathbf{v_1} &= \nabla u \\ \mathbf{v_2}^* &= \frac{\nabla u^*}{\mid \nabla u^* \mid}. \end{aligned}$$

Les valeurs des dérivées partielles sont alors les suivantes :

$$\begin{array}{rcl}\partial_1\Phi & = & \Phi'(u_{\xi^*})\ \xi^* \\ \partial_2\Phi & = & \left[\Phi'(u_{\xi^*})\ \left\{\dfrac{(\nabla u^*\ .\ \nabla u^*)\nabla u\ -\ (\nabla u\ .\ \nabla u^*)\nabla u^*}{\mid \nabla u^* \mid^3}\right\}\right]\end{array}$$

Le terme $\partial_1\Phi$ correspond bien au flux dans la direction du gradient introduit par l'équation (6.30). De plus, dans le cas limite où le lissage est nul, le terme $\partial_2\Phi$ devient nul et nous retrouvons l'équation de Perona et Malik.

Nous avons donc obtenu une équation de diffusion proche de la diffusion basée sur le flux proposée par l'équation (6.30), en minimisant l'énergie

$$E(u)\ =\ \int_\Omega \Phi(u_{\xi^*})\ d\Omega.$$

Il serait intéressant, dans des travaux futurs, de calculer le gradient de l'énergie (6.39), plus générale, et de comparer le flux obtenu avec celui de l'équation (6.30) :

$$E(u)\ =\ \int_\Omega \Phi_1(\nabla u\ .\ \xi^*)\ +\ \Phi_2(\nabla u\ .\ \eta^*)d\Omega \tag{6.39}$$

6.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre des nouveaux résultats permettant de mieux comprendre et d'interpréter la diffusion anisotrope. Dans un premier temps, nous avons exprimé l'équation de Perona et Malik en terme de *dérivées secondes directionnelles* pour une image de dimension quelconque. Nous avons ensuite généralisé ce résultat pour une diffusion anisotrope utilisant une *matrice de diffusion*. Une *interprétation géométrique* de la diffusion nous a conduit à proposé un *flux de diffusion multi-directionnel* qui s'exprime de manière plus naturelle que la diffusion tensorielle. Finalement, ce flux a été comparé à une *approche variationnelle* prenant en compte un lissage de l'image.

Dans les chapitres suivants, nous utilisons le flux de diffusion multi-directionnel dans le cadre de la diffusion anisotrope des vaisseaux dans des images tridimensionnelles.

Chapitre 7

Diffusion Anisotrope Directionnelle de structures tubulaires

Dans un premier temps, nous présentons une équation de diffusion privilégiant la diffusion dans la direction de plus faible courbure, c'est-à-dire le long de l'axe des vaisseaux. Cette équation est basée sur la pondération des dérivées secondes directionnelles. Partant de la même idée, nous définissons un flux de diffusion multi-directionnel privilégiant la direction de courbure minimale, et permettant une conservation de l'intensité au cours de la diffusion, une plus grande stabilité du processus, et un rehaussement des contours dans la direction du gradient.

7.1 Diffusion anisotropique directionnelle appliquée aux vaisseaux

Nous rappelons dans ce paragraphe les principes de la diffusion anisotrope proposée dans [Krissian et al., 1997]. Ce travail est présenté en annexe C, paragraphe C.2.1 page 218. L'idée directrice de la méthode proposée est de favoriser la diffusion le long de la direction de courbure minimale afin de mieux préserver les structures tubulaires. Le principe se base sur l'interprétation en termes de dérivées secondes directionnelles de l'équation de Perona et Malik (propriété 9 page 90) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Phi''(|\nabla u|)u_{\xi\xi} + \frac{\Phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}(\Delta u - u_{\xi\xi}) \tag{7.1}$$

Cette équation agit de manière isotrope dans l'hyperplan orthogonal au gradient.
Dans le domaine du traitement d'images médicales, notre **motivation** est de préserver les petites structures allongées qui correspondent en général à des vaisseaux sanguins. Pour cela, nous nous plaçons dans le repère orthogonal et normé (ξ,$\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$) de $\mathbb{R}^3$, où $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ représentent respectivement les directions de courbure maximale et minimale. Le deuxième terme de l'équation précédente s'écrit alors $\frac{\Phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}(\Delta u - u_{\xi\xi}) = \frac{\Phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}(u_{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1} + u_{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2})$.
Cette équation est transformée en une équation plus générale dans laquelle chaque dérivée seconde possède un coefficient de pondération différent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_\xi(|\nabla u|)u_{\xi\xi} + C_{\mathbf{e}_1}(|\nabla u|, |k_1|)u_{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1} + C_{\mathbf{e}_2}(|\nabla u|, |k_2|)u_{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2} \tag{7.2}$$

où k_1 et k_2 représentent les courbures maximale et minimale. Afin de privilégier la direction de courbure minimale, le coefficient $C_{\mathbf{e}_2}$ est choisi plus grand que le coefficient $C_{\mathbf{e}_1}$. La figure 7.1

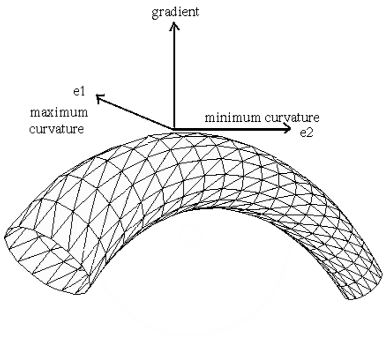


FIG. 7.1 – *Illustration du gradient et des directions principales de courbure.*

illustre ces directions pour une structure de type tubulaire et traduit l'idée intuitive de lisser *plus* dans la direction de l'axe des vaisseaux, donnée par la direction de courbure minimale. La nouvelle équation proposée inclut celle de Perona et Malik et est plus générale. Elle propose d'effectuer une réelle diffusion anisotrope tridimensionnelle. D'autres travaux proposent l'extension de schémas d'évolution de courbes en 3D [Niessen et al., 1996], ou l'utilisation de la courbure moyenne [Grayson, 1989; Sethian, 1985] ou gaussienne [Chopp et Sethian, 1993] . Des travaux récents utilisent des level sets et une équation basée sur la courbure minimale pour détecter les vaisseaux [Lorigo et al., 1999], ou étudient les propriétés de différentes équations aux dérivées partielles en fonction des courbures principales [Caselles et al., 1997b; Caselles et Sbert, 1996; Caselles et al., 1997a]. Le calcul des courbures principales est expliqué en annexe C.

Choix des fonctions de diffusion Afin de réduire l'importance du bruit dans l'estimation des paramètres pour les différentes fonctions de diffusion C_ξ, $C_{\mathbf{e}_1}$ and $C_{\mathbf{e}_2}$, les paramètres $\mid \nabla u \mid$, k_1 et k_2 peuvent être calculés sur l'image lissée (convoluée ici par une fonction gaussienne d'écart-type σ) et notés $\mid \nabla u^* \mid$,k_1^* et k_2^* [Nitzberg et Shiota, 1992; Catte et al., 1992]. Ce qui donne la nouvelle équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_\xi(\mid \nabla u^* \mid) u_{\xi\xi} + C_{\mathbf{e}_1}(\mid \nabla u^* \mid, \mid k_1^* \mid) u_{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1} + C_{\mathbf{e}_2}(\mid \nabla u^* \mid, \mid k_2^* \mid) u_{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2} \tag{7.3}$$

Afin de comparer le processus avec celui de Perona et Malik, la norme du gradient non lissé a été utilisée. Le choix des trois fonctions de diffusion est basé sur les plusieurs critères. Un seuil κ sur la norme du gradient lissé est choisi comme dans le cas de l'équation de Perona et Malik. Nous supposons donc que $\mid \nabla u \mid > k$ dans les régions de contours entre les différentes structures et $\mid \nabla u \mid < k$ à l'intérieur des structures anatomiques. Les critères suivants ont donc été choisis :

- lorsque $\mid \nabla u \mid < k$, la fonction choisie est celle de Green qui assure des bonnes propriétés de stabilité :

$$\begin{aligned} C_\xi &= \Phi''(\mid \nabla u \mid) \\ C_{\mathbf{e}_1} = C_{\mathbf{e}_2} &= \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid} \end{aligned}$$

- lorsque $\mid \nabla u \mid > k$, les valeurs des courbures principales de l'image lissée k_1^* et k_2^* sont calculées et avec les coefficients suivants :

$$\begin{aligned} C_\xi &= \Phi''(\mid \nabla u \mid) \\ C_{\mathbf{e}_1} &= \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid} h_1(\mid k_1^* \mid, \mid k_2^* \mid) \\ C_{\mathbf{e}_2} &= \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid} h_2(\mid k_1^* \mid, \mid k_2^* \mid) \end{aligned}$$

  où h_1 et h_2 sont des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} \forall k_1,k_2 \in \mathbb{R} \text{ avec } k_1 > k_2, \qquad & h_1(k_1,k_2),h_2(k_1,k_2) \in [0,1] \\ \text{et} \qquad & h_2(k_1,k_2) > h_1(k_1,k_2) \end{aligned}$$

Expériences Dans les expériences présentées (voir annexe C), les fonctions h_1 et h_2 ont été fixées respectivement aux valeurs constantes 0 et 1 afin d'assurer l'arrêt de la diffusion dans la direction de courbure maximale près de la frontière des vaisseaux. Les expériences effectuées montrent le meilleur comportement de cette équation pour préserver les petites structures tubulaires tout en réduisant le bruit de l'image. Cependant, le schéma proposé a l'inconvénient de ne pas s'écrire sous la forme d'une divergence, ce qui entraîne une instabilité du schéma numérique et le choix de fonctions de diffusion qui ne rehaussent pas les contours. Afin de résoudre ces problèmes, nous proposons une nouvelle équation qui permet la conservation de l'intensité. Cette équation est décrite dans le paragraphe ci-dessous.

7.2 Flux de diffusion multi-directionnel adapté aux structures tubulaires

Dans le paragraphe 6.2.2, nous avons présenté le choix d'un nouveau flux de diffusion ainsi qu'un parallèle avec la diffusion matricielle proposée par Weickert. Nous combinons ici les idées présentées dans le paragraphe précédent avec ce type de flux. Le repère choisi pour la caractérisation locale des structures de l'image est $(\xi^*,\mathbf{e}_1^*,\mathbf{e}_2^*)$ où ξ est un vecteur normé dans la direction du gradient et $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ sont les directions de courbure maximale et minimale. Le flux de diffusion s'écrit alors

$$\boxed{\mathbf{F} \;=\; \varphi_1(u_{\xi^*})\;\xi^* + \varphi_2(u_{\mathbf{e}_1^*})\;\mathbf{e}_1^* + \varphi_3(u_{\mathbf{e}_2^*})\;\mathbf{e}_2^*} \tag{7.4}$$

l'équation de diffusion anisotrope étant

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= div(\mathbf{F}) \\ u(x,0) &= u_0. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Chaque terme peut s'interpréter comme une diffusion anisotrope le long les lignes de flot associées au vecteur. Le flux de diffusion de l'équation de Perona et Malik s'écrit

$$\mathbf{F} \;=\; \varphi(u_\xi)\xi \;=\; \varphi(\mid \nabla u \mid)\,\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}.$$

Ce flux est toujours orienté dans la direction du gradient (non lissé ici). La fonction φ est donc liée à la fonction de diffusion Φ de l'approche variationnelle ou à la fonction g introduite par Perona et Malik :

$$\varphi(x) \;=\; \Phi'(x) \;=\; x\,g(x).$$

Comme nous l'avons remarqué dans le paragraphe 6.2.2, ce schéma peut s'écrire sous la forme d'une diffusion anisotrope matricielle, avec une matrice de diffusion D qui se diagonalise dans la base $(\xi^*,\mathbf{e}_1^*,\mathbf{e}_2^*)$ pour donner la matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} g_1(u_{\xi^*}) & 0 & 0 \\ 0 & g_2(u_{\mathbf{e}_1^*}) & 0 \\ 0 & 0 & g_3(u_{\mathbf{e}_2^*}) \end{bmatrix},$$

avec $g_i(x) = \varphi_i(x)/x$, pour $i \in \{1,2,3\}$. Cependant, nous trouvons l'écriture sous la forme d'un flux plus intuitive. La nouveauté de notre approche est donc d'une part dans le choix particulier du repère associé à la diffusion, et d'autre part dans les paramètres des fonctions de diffusion. En effet, pour une direction donnée par un vecteur $\mathbf{v}$, $u_\mathbf{v}$ est la dérivée de l'intensité dans la direction $\mathbf{v}$. Lorsque nous diffusons le long des lignes de flot définies par un champ de vecteurs, nous ne nous intéressons donc qu'à la variation d'intensité dans la direction de ce champ.

Choix des fonctions φ_i associées aux flux directionnels Les fonctions φ_i pour $i \in \{1,2,3\}$ peuvent être choisies parmi les fonction de diffusion Φ' proposées en annexe A. L'interprétation géométrique donnée dans le paragraphe 6.2 permet de mieux comprendre l'effet de la diffusion en termes de transfert d'intensité, pour un flux $\varphi_i(.)\,\mathbf{v_i}$:

- la dérivée φ_i' de la fonction φ_i joue un rôle particulier, puisqu'elle traduit la variation d'intensité (c'est-à-dire la différence entre l'intensité transmise et l'intensité reçue) en un point dans la direction $\mathbf{v_i}$. Si $\varphi_i' > 0$, l'intensité transmise est supérieure à l'intensité reçue et la fonction agit comme une lissage, si par contre $\varphi_i' < 0$, la fonction agit comme un rehaussement de l'intensité.
- la fonction φ_i pondère une diffusion liée à la courbure de la ligne de flot associée au champ de vecteurs $\mathbf{v_i}$. La diffusion est alors proportionnelle à la courbure de ces lignes de flot, et agit comme une courbure moyenne.

Il semble alors naturel de faire dépendre la fonction $\varphi_i(.)$ de $u_{\mathbf{v_i}}$ dans le cas d'un rehaussement des contours dans la direction de $\mathbf{v_i}$: ce rehaussement ne doit pas dépendre des variations d'intensité dans les autres directions.

Nous proposons donc le choix suivant pour les fonctions φ_i :

- φ_1 doit avoir un effet de rehaussement des contours, nous choisirons donc φ_1 parmi les fonctions suivantes du tableau A.1 : Perona et Malik 1, Perona et Malik 2, ou Geman;
- φ_2 et φ_3 sont des fonctions de diffusion uniquement, avec une diffusion privilégiée dans la direction de courbure minimale. Dans les expériences, nous avons choisi $\varphi_2 = 0$ et $\varphi_3(u_{\mathbf{e}_2^*}) = u_{\mathbf{e}_2^*}$, mais des choix plus évolués peuvent être envisagés, tels que :

$$\begin{aligned}
\varphi_2(u_{\mathbf{e}_1^*}) &= \varphi_{Green}(u_{\mathbf{e}_1^*})\frac{(k_2^*)^2}{(k_1^*)^2+(k_2^*)^2} \\
\varphi_3(u_{\mathbf{e}_1^*}) &= \varphi_{Green}(u_{\mathbf{e}_2^*})\frac{(k_1^*)^2}{(k_1^*)^2+(k_2^*)^2}
\end{aligned}$$

  où φ_{Green} est la fonction de Green définie dans le tableau A.1 en annexe. Ce choix devient équivalent à $\varphi_2 = 0$ et $\varphi_3 = \varphi_{Green}(u_{\mathbf{e}_2^*})$ dans le cas d'une courbure minimale nulle.

Un aspect important du processus est aussi la convergence de celui-ci vers une image segmentée. En combinant un phénomène de lissage dans une direction et de rehaussement dans une autre direction, ces deux phénomènes se compensent et doivent permettre de converger vers une image segmentée. Ce dernier point reste cependant à étudier, notamment vis-à-vis des fonctions de diffusion qui jouent un rôle important pour cette convergence.

Schéma numérique Weickert a proposé des schémas semi-implicites récursifs et séparables pour la diffusion anisotrope tensiorelle [Weickert, 1997c; Weickert, 1999]. Un des principaux avantages de cette technique est la stabilité du processus et la possibilité de choisir des pas de temps bien plus élevés. Dans un soucis de précision et afin de rehausser le contraste de l'image et de réduire les effets de volume partiel, nous avons mis en œuvre un schéma explicite avec un pas de temps dt relativement faible pour l'écriture de la diffusion sous forme d'un flot.

Pour une image de dimension n, la dérivée partielle de l'intensité par rapport au temps t s'exprime par :

$$div(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}. \tag{7.6}$$

où $\mathbf{F}$ s'exprime par le vecteur $(F_1,\ldots,F_n)$. Le flot $\mathbf{F}$ est estimé entre deux points voisins (pixels en 2D, voxels en 3D), et la discrétisation suivante de l'équation (7.6) est proposée :

$$div(\mathbf{F})(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i(\bar{x} + 1/2dx_i) - F_i(\bar{x} - 1/2dx_i)}{dx_i}. \tag{7.7}$$

Pour chaque itération, n images scalaires J_i, $i \in [1,n]$ sont donc calculées et correspondent aux valeurs de F_i entre deux pixels voisins dans la direction x_i. Ensuite le transfert d'intensité est effectué. Cette méthode est relativement simple et assure la conservation de l'intensité dans le cas discret. Des schémas numériques similaires ont été proposés dans des travaux antérieurs [Koller et al., 1995; Nitzberg et Shiota, 1992], où la possibilité de faire intervenir un voisinage de points plus important est aussi envisagé. La méthode requiert aussi à chaque itération le calcul des dérivées premières (gradient lissé) et secondes (calcul des courbures principales) au point étudié. Ce calcul est effectué à l'aide de filtres gaussiens récursifs [Deriche, 1993].

7.3 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une nouvelle approche de la diffusion anisotrope, discuté de ces avantages, et comparé cette approche avec l'équation de Perona et Malik, et avec l'approche matricielle utilisée par Weickert. Le chapitre suivant présente quelques expériences sur des images à la fois synthétiques et réelles, contenant en particulier des réseaux vasculaires tridimensionnels, et montrant l'intérêt de notre méthode.

Chapitre 8

Expériences

Nous présentons dans ce chapitre des expériences de diffusion anisotrope. Dans un premier temps, différentes équations de diffusion sont testées sur une image synthétique. Ensuite, nous présentons des résultats de notre équation de diffusion sur des images de réseaux vasculaires tridimensionnels issues de différentes modalités (scanner, IRM) et représentant différents organes (foie, cerveau).

8.1 Image synthétique

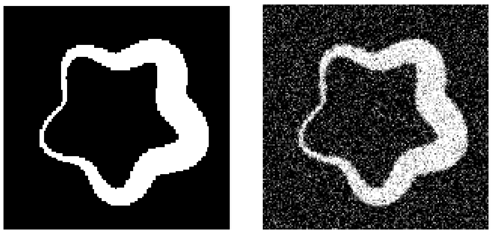


FIG. 8.1 – *Image synthétique. L'intensité de fond est 0 et celle de l'objet est 50. À gauche, l'image initiale et à droite l'image bruitée.*

La figure 8.1 présente une image synthétique bruitée. Cette image possède les caractéristiques suivantes, qui la rendent intéressante dans le cadre de l'étude des structures allongées : elle contient une structure allongée de taille et de courbure variables. Nous proposons donc d'étudier l'effet de différents types de diffusion anisotrope sur cette image bruitée, et de les comparer.

8.1.1 Équation de Perona et Malik

Rappelons l'équation de diffusion de Perona et Malik :

$$\begin{cases} u(x,0) & = & u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t} & = & div(g(\mid \nabla u \mid)\nabla u). \end{cases}$$

où g est une fonction de diffusion.

Les figures 8.2, 8.3, 8.4 présentent l'évolution d'une diffusion anisotrope bidimensionnelle sur l'image synthétique bruitée de la figure 8.1. Trois fonctions de diffusion sont comparées avec des paramètres identiques : pas d'évolution $dt = 0.05$; nombre d'itérations 50, 100, ou 200 ; et seuil $\kappa =$ 10. Nous constatons une différence importante dans le processus de diffusion qui traduit l'influence de la fonction de diffusion sur le processus. Chaque fonction se comporte de manière identique dans les zones de gradients forts et faibles :

$$g(0) \; = \; 1 \quad \text{et} \quad g(+\infty) \; = \; 0.$$

Nous expliquons l'effet des fonctions de diffusion étudiées sur le processus.

Dans la figure 8.2, la fonction de diffusion choisie est une fonction qui lisse les gradients inférieurs au seuil, mais rehausse les gradient proches du seuil κ. Cette fonction proposée par Perona et Malik, bien qu'elle rehausse les contours de l'objet, réduit difficilement les forts gradients liés au bruit : augmenter le seuil κ sur la norme du gradient ne résout pas le problème car le phénomène de diffusion s'accentue à travers les contours comme illustré par les deux images de la figure 8.2 pour κ = 15. Nous verrons dans le paragraphe suivant l'effet de l'équation proposée par Catté et al. avec la même fonction de diffusion.

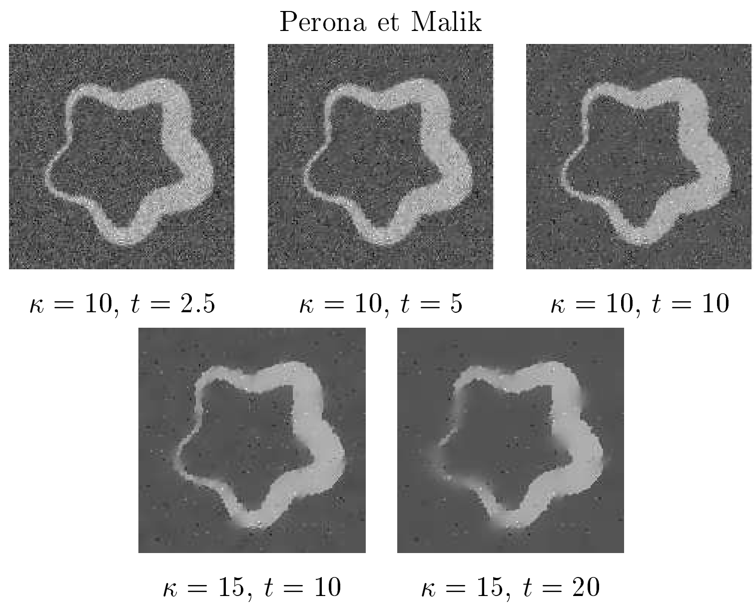


FIG. 8.2 – *Évolution de l'image, fonction de diffusion exponentielle proposée par Perona et Malik,* $dt = 0.05$.

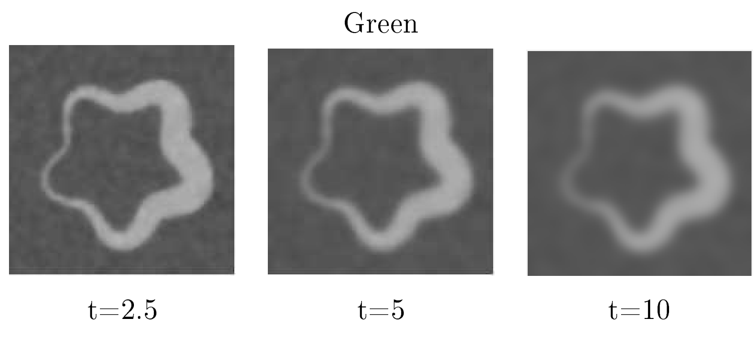


FIG. 8.3 – *Évolution de l'image, pour la fonction de diffusion de Green. Paramètres :* $dt = 0.05$ *et* $\kappa = 10$.

Dans la figure 8.3, la fonction de diffusion proposée par Green n'a pas d'effet de rehaussement des gradients, avec un lissage plus fort dans la direction des contours. Le résultat est un lissage efficace de l'image dès les premières itérations, cependant la diffusion converge vers une fonction de gradient nul, et les contours se “dissipent” pour un nombre élevé d'itérations, cela pose donc le problème de la sensibilité du résultat par rapport au temps de diffusion.

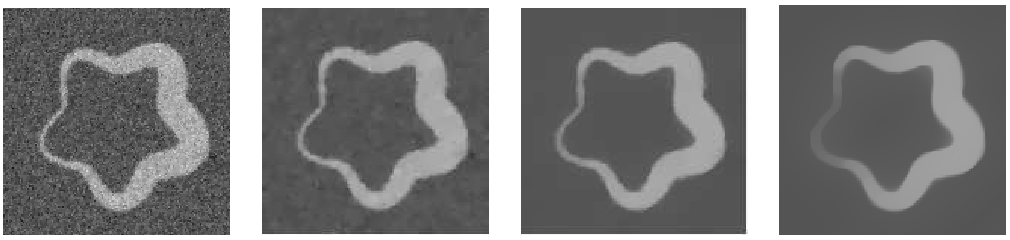


FIG. 8.4 – *Évolution de l'image, pour la fonction de diffusion de Rudin. Paramètres : $dt = 0.05$ et $\kappa = 10$.*

La figure 8.4 présente un résultat obtenu avec la fonction de Rudin. Après 400 itérations (t=20), le résultat obtenu est meilleur que celui des autres fonctions présentées. Cependant, l'équation de diffusion qui s'exprime par un terme de dérivée seconde dans la direction orthogonale au gradient pondéré par une fonction de la norme du gradient, nécessite beaucoup d'itérations. Cette diffusion possède aussi l'inconvénient de ne pas rehausser les contours.

8.1.2 Équation de Catté et al.

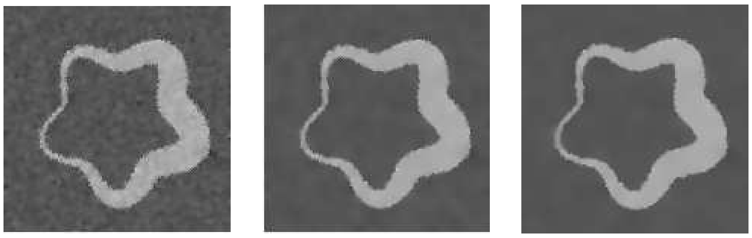
Rappelons l'équation de diffusion proposée par Catté et al. :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x,0) & = & u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t} & = & div(g(\mid \nabla_\sigma u \mid)\nabla u). \end{array}\right.$$

La variation proposée par Catté et al. est de faire dépendre la fonction de diffusion de la norme du gradient lissé, afin de rendre cette norme moins sensible au bruit et donc de rendre le processus plus efficace et plus stable. Cette idée était déjà présente dans les travaux de Nitzberg et Shiota [Nitzberg et Shiota, 1992].

La figure 8.5 présente l'évolution de l'image synthétique bruitée selon cette équation. Les *avantages* de cette équation sont une plus grande robustesse de la fonction de diffusion par rapport au bruit et une diffusion plus rapide au cours des premières itérations. Les *inconvénients* sont la lenteur introduite par le calcul du lissage, l'introduction d'un nouveau paramètre σ correspondant à l'écart-type de la fonction gaussienne utilisée pour le lissage du gradient, l'arrêt de la diffusion dans les zones de forts gradients qui entraîne une conservation du bruit près des contours.

Catté et al.



t=2.5 t=10 t=20

FIG. 8.5 – *Évolution de l'image, pour la fonction de diffusion exponentielle proposée par Perona et Malik, et l'équation de diffusion proposée par Catté et al. : utilisation de la norme du gradient lissé. Paramètres : $dt = 0.05$, $\kappa = 6$, $\sigma = 1$.*

8.1.3 Nouvelle équation basée sur le flux

Dans le cas bidimensionnel, le flux de diffusion s'écrit

$$\mathbf{F} = \varphi_1(u_{\xi^*})\xi^* + \varphi_2(u_{\eta^*})\eta^*$$

Afin de combiner deux opérations de restauration : la réduction du bruit par un lissage et le rehaussement des contours, la fonction φ_1 est choisie est équivalente à la fonction exponentielle proposée par Perona et Malik (avec un seuil $\kappa = 8$) :

$$\varphi_1(u_{\xi^*}) = u_{\xi^*}\, e^{-\left(\frac{u_{\xi^*}}{\kappa}\right)^2}, \tag{8.1}$$

et la fonction $\varphi_2(u_{\eta^*})$ choisie est égale à u_{η^*}. Dans la figure 8.6, nous présentons sur *la ligne du haut* l'effet séparé de chacun de flux de diffusion : à gauche, l'effet d'un flux $\mathbf{F} = \eta^*$ et à droite l'effet d'un flux $\mathbf{F} = \varphi_1(u_{\xi^*})\xi^*$. Le lissage des directions est effectué avec un produit de convolution gaussien. Le lissage dans le long de η^* possède une bonne propriété de conservation des contours, et le lissage avec rehaussement dans la direction du gradient lissé ξ^* est trop sensible au bruit pour restaurer seul l'image.

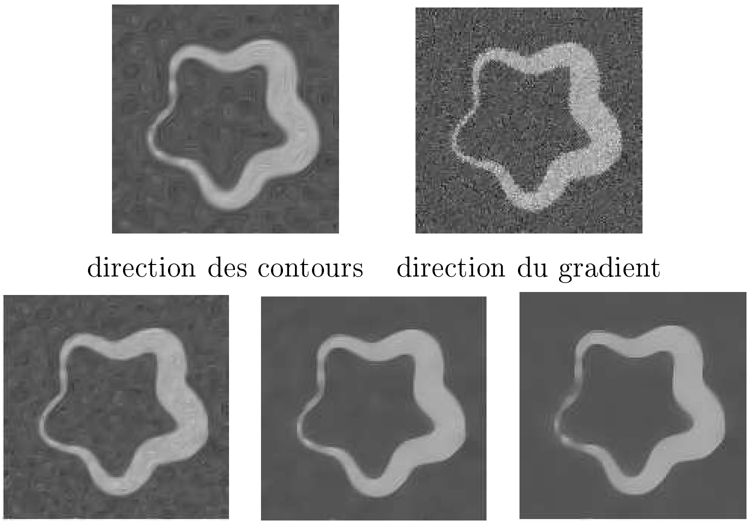
L'effet combiné de ces deux flux est présenté dans la ligne du bas, avec l'évolution de l'image à différents pas de temps. Nous constatons alors une bonne restauration de l'image par effet combiné de la diffusion dans la direction de η^* et du rehaussement des contours dans la direction de ξ^*. Cependant, la convergence du processus vers l'image segmentée reste à étudier, et le processus de diffusion prend le dessus pour des temps d'évolution élevés.

Nous proposons dans le paragraphe suivant d'étudier le processus tridimensionnel proposé dans le chapitre précédent sur des images réelles de vaisseaux.

8.2 Images réelles

Nous présentons dans cette section des résultats de restauration sur des images réelles tridimensionnelles contenant des réseaux vasculaires. L'équation de diffusion est l'équation (7.5) avec un

Krissian



direction des contours direction du gradient

t=2.5 t=10.0 t=20.0

FIG. 8.6 – *Évolution de l'image pour une diffusion avec un flux bidirectionnel : lissage le long des contours et rehaussement dans la direction du gradient.*

flux donné par l'équation (7.4). Nous avons testé la diffusion sur une angiographie par résonance magnétique et sur une image scanner du foie.

8.2.1 Angiographie par résonance magnétique

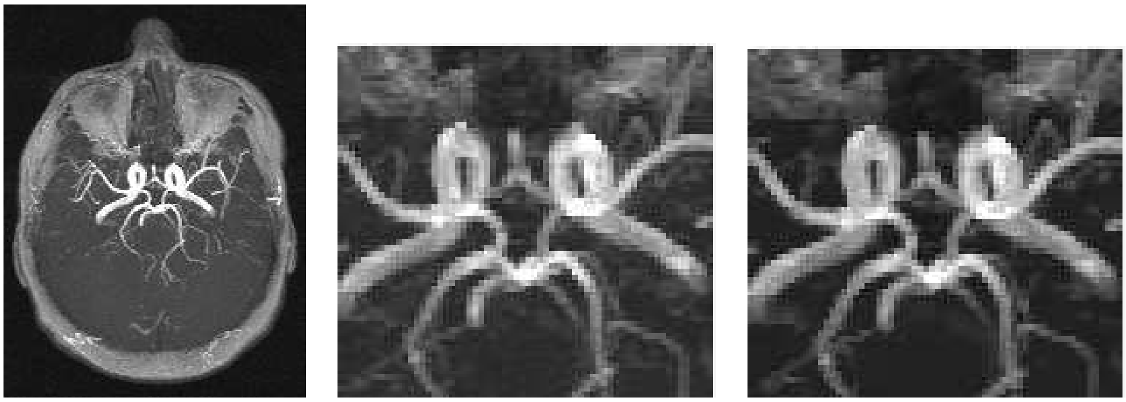


image initiale sous image extraite après diffusion

FIG. 8.7 – *Angiographie par Résonance Magnétique, vue MIP.*

La figure 8.7 présente des vues MIP (Maximum Intensity Projection) de l'image initiale à gauche, d'un sous-volume extrait de l'image initiale au milieu et de l'image filtrée à droite. Le sous-volume traité est de dimensions $136 \times 127 \times 60$ avec des voxels non isotropes : $0.47 \times 0.47 \times 0.7$. Les paramètres de la diffusion sont :

- les fonctions de diffusion : φ_1 est équivalente à la fonction exponentielle de Perona et Malik (voir équation (8.1)), $\varphi_2 = 0$ et $\varphi_3(x) = x$,
- l'écart-type du lissage gaussien $\sigma = 1$,
- le pas d'évolution $dt = 0.05$,
- le temps d'évolution $t = 2.5$ (50 itérations),
- le seuil sur les dérivées $\kappa = 80$.

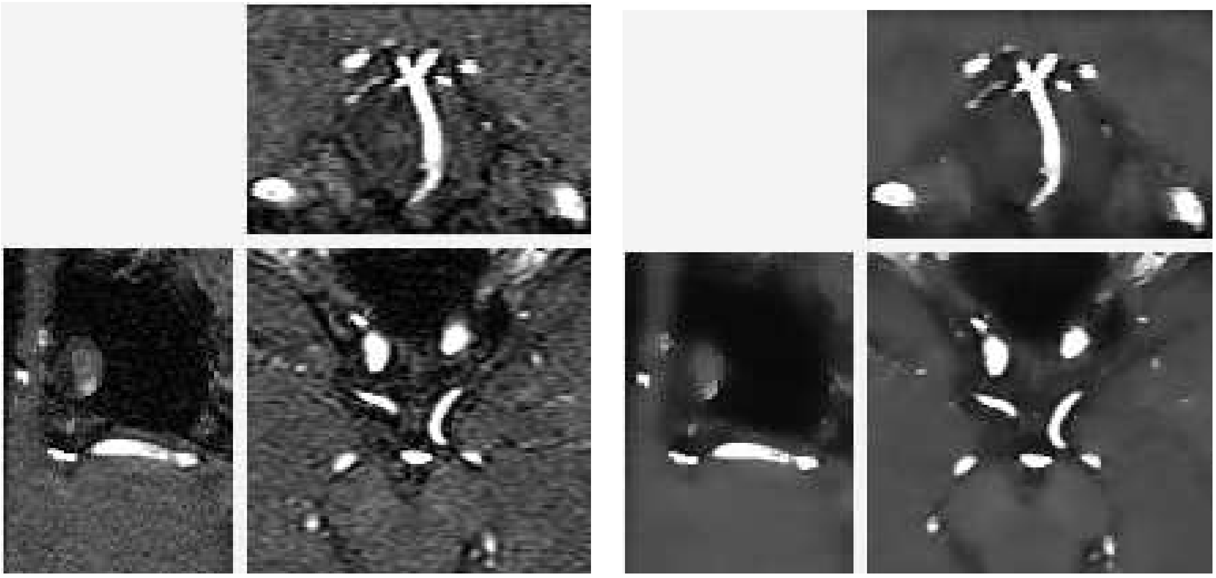


image initiale — image après diffusion

Fig. 8.8 – *Diffusion anisotrope sur une Angiographie par Résonance Magnétique, vue en coupe.*

La figure 8.8 montre le résultat du filtrage dans une vue en coupes de l'image, où l'effet de diffusion est mieux visible par rapport aux vues MIP, et les petits vaisseaux sont conservés. Cette diffusion est ensuite utile pour l'extraction des lignes centrales des vaisseaux dans la partie III, page 160.

8.2.2 Scanner du foie

L'étude et la segmentation des structures vasculaires de foie est utile dans le cadre des opérations chirurgicales de cet organe. La thèse de Luc Soler [Soler, 1998] s'intéresse à la reconnaissance automatique des segments du foie en huit régions, ou segments de Couinaud qui correspondent à la répartition des ramifications du réseau vasculaire porte et qui représentent l'unité d'intervention chirurgicale. Luc Soler propose un étiquetage automatique du réseau porte, en segmentant les réseaux vasculaires porte et cave. La méthode de segmentation utilisée se base sur une analyse de l'histogramme d'intensité du foie et la reconnaissance automatique de seuils correspondant aux intensité des vaisseaux, combinée ensuite avec des contraintes topologiques et géométriques liées aux connaissances anatomiques. L'utilisation d'une diffusion anisotrope améliore considérablement l'étape de seuillage global en réduisant l'aspect texturé du foie et en améliorant la qualité de l'histogramme d'intensité :

> *Elle réduit nettement la largeur du pic principal, c'est-à-dire la dispersion des intensités et dégage ainsi plus clairement ce pic des autres valeurs.*
> Luc Soler

Dans sa thèse, Luc Soler utilise une version précédente de notre programme de diffusion anisotrope, qui ne rehausse pas les contours liés aux vaisseaux. Il obtient cependant déjà de très bons résultats.
Les figures 8.9 et 8.10 présentent un résultat de diffusion anisotrope basée sur le flux de diffusion

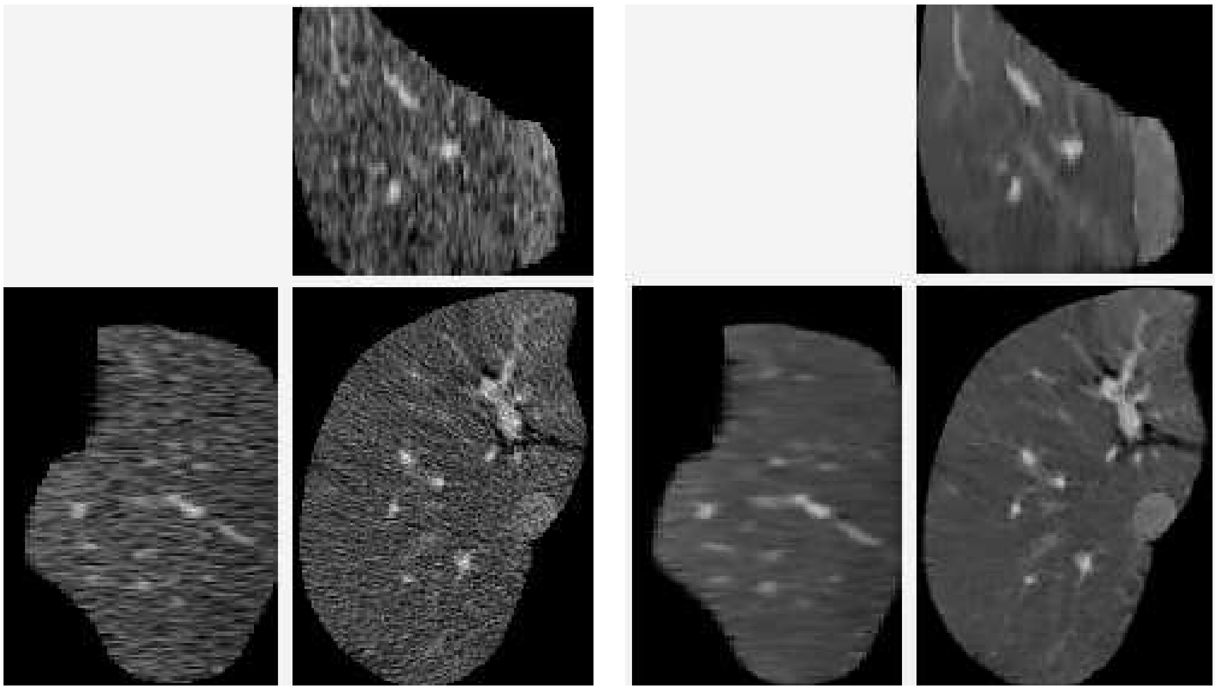


FIG. 8.9 – *Diffusion anisotrope sur une image scanner du foie, vue en coupes.*

multi-directionnel. La figure 8.9 présente une vue en coupes et la figure 8.10 un vue MIP (Maximum Intensity Projection) de l'image initiale et de l'image après la diffusion. Les paramètres utilisés sont :

- les fonctions de diffusion : φ_1 est équivalente à la fonction exponentielle de Perona et Malik (voir équation (8.1)), $\varphi_2 = 0$ et $\varphi_3(x) = x$,
- l'écart-type du lissage gaussien $\sigma = 2$,
- le pas d'évolution $dt = 0.1$,
- le temps d'évolution $t = 3$ (30 itérations),
- le seuil sur les dérivées $\kappa = 6$.

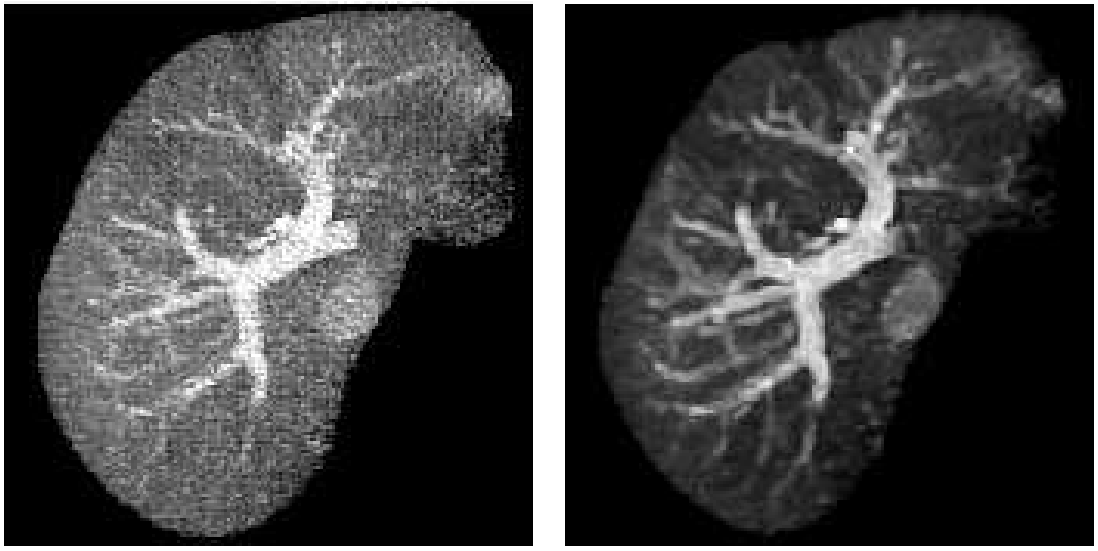


FIG. 8.10 – *Diffusion anisotrope sur une image scanner du foie, vue MIP.*

8.3 Conclusion

Nous avons comparé expérimentalement les équations de diffusion anisotrope de flux orienté dans la direction du gradient : Perona et Malik, Catté et al. avec l'équation de flux multi-directionnel proposée. Sur une *image synthétique*, nous avons montré la variation importante du résultat obtenu en fonction de la fonction de diffusion choisie, et montré comment le flux multi-directionnel permet de combiner un lissage le long des contours et un rehaussement des contours dans la direction du gradient. Sur des *images réelles* de différentes modalités, nous avons montré des résultats de diffusion anisotrope tridimensionnelle basée sur un flux multi-directionnel de diffusion et privilégiant la direction de courbure minimale. Ces résultats sont très encourageants et sont utilisés comme pré-traitement dans la segmentation des vaisseaux du foie ou dans la détection des lignes centrales et la segmentation du réseau vasculaire du cerveau dans les angiographies par résonance magnétique.

Troisième partie

Détection multi-échelle des lignes centrales de structures tubulaires

Notations

In this part, the following notations will be used:

Notations relative to the models:

- I_0 is the initial image;
- σ_0 denotes the radius of the initial vessel model which is also the standard deviation of a Gaussian;
- G_σ is a Gaussian function with standard deviation σ;
- H is the Hessian Matrix of the image, H' is a simplified matrix proportional to H;
- λ_1,λ_2,λ_3 are eigenvalues of the Hessian matrix with $\mid \lambda_1 \mid \geq \mid \lambda_2 \mid \geq \mid \lambda_3 \mid$;
- $\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{1}$,$\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{2}$,$\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{3}$ are the associated eigenvectors;

Notations relative to the multiscale analysis:

- t denotes the current scale;
- $M(\bar{x})$ denotes a point in the definition domain of the image I_0, $\bar{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;
- $L(\bar{x},t) = I_0(\bar{x}) * G_{\sqrt{t}}$ is the image at a scale t;
- $R_t(\bar{x})$ is the response for a scale t and at a given location $\bar{x}$;
- R_t^n is the normalized response for a scale t;
- γ is a normalization parameter;
- t_{max} is the scale at which the normalized response is maximal;

Chapitre 9

Introduction

« il y a les bons et les mauvais tuyaux ... »
Krisse Krissian

L'extraction des lignes centrales des vaisseaux est une étape importante dans l'étude de ces structures. Les lignes centrales représentent une information simplifiée (de dimension 1) qui permet de caractériser l'arbre vasculaire. Bien qu'elles ne correspondent à aucune réalité physique, ces informations sont très utiles pour permettre de quantifier la section des vaisseaux, la longueur des vaisseaux, ou les ramifications de l'arbre vasculaire. Dans cette partie, nous proposons une méthode d'extraction des lignes centrales utilisant une analyse multi-échelle linéaire.

The detection of vessels centerlines is an important stage in the study of these structures. Centerlines represent a simplified information (of dimension 1) that allows to characterize the vascular network. Although it doesn't correspond to a physical reality, this information is essential for the quantification of the vessels sections, of their length, or of their connexity. In this part, we propose a method of extracting centerlines by the use of a linear multiscale analysis.

9.1 Motivation

In this third part, we present a new method for segmentation and detection of tubular structures in 3D images [Krissian et al., 1999a; Krissian et al., 1999b]. Although the proposed method can be applied to any kind of 3D image, it is especially useful for detection of vascular network in medical images. An accurate detection of the vascular network in medical images from various organs (liver, lungs, brain) can help physicians in the planning of surgical operations. Thus, quantification tools are needed because the understanding of 3D images is difficult and visualization tools are not always sufficient to provide the necessary information. Those quantification tools can be obtained by detection of vessels centerlines and segmentation of vascular networks.

This chapter presents a state of the art on methods that use linear multiscale analysis for improving the visualization of vessels or for extracting the vessels centerlines.

9.2 Previous work

A challenge in processing of vascular images is to detect vessels of different sizes and of different intensities. A way to take into account the varying size of vessels in the image is to apply a multiscale analysis. Multiscale analysis allows to detect structures of various sizes according to the scale at which they give a maximal response. We successively present the notions of linear scale-space, of medialness and ridge, and previous work dedicated to vessel detection.

9.2.1 Linear Scale-Space

The linear scale-space was introduced in chapter 4. We recall here some essential properties of this multiscale analysis.

When applying a multiscale analysis to an image, the use of the convolution product with a Gaussian kernel and its linear partial derivatives has been shown to be the only way to ensure the following properties:

- linearity,
- invariance under translation (spatial shift invariance),
- invariance under rotation (isotropy),
- invariance under rescaling [Koenderink, 1984; Lindeberg, 1994; Florack et al., 1992].

Florack et al. [Florack et al., 1992] show that the evolution through scales can be written using two dimensionless variables L/L_0 and x/σ by the means of the Pi-theorem which states that *a function that relates physical observables must be independent of the choice of dimensional units.* σ denotes the standard deviation of the Gaussian kernel, L_0 is the response obtained from the initial image and L is the response obtained at a scale $t = \sigma^2$ (see section 4.1 for more details).

In his works on scale-space theory [Lindeberg, 1994; Lindeberg, 1996], Lindeberg shows the necessity of normalizing the derivatives of the image in the multiscale analysis. He introduces the notion of γ-normalized derivatives (introduced in section 4.5):

$$\partial_{x,\gamma-norm} = t^\gamma \partial_x$$

When the parameter γ equals one, the normalization ensures invariance under image rescaling, which is compatible with the dimensionless variable $u = x/\sigma$:

$$\frac{\partial I}{\partial u} = \frac{\partial I}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} = \sigma \frac{\partial I}{\partial x}$$

However, for certain specific task (extraction of 2D blob, of edges, of 2D ridges), Lindeberg studied on analytical models the relationship between the scale at which an object is detected (gives the maximal response), the normalization parameter γ, and the object size, which can lead to choose other values for γ (presented in section 4.5.2).

In the following, we will implicitly suppose that the scale-space used is linear and obtained from Gaussian convolution of the image and its derivatives.

9.2.2 Medialness

Pizer et al [Pizer et al., 1994] uses the notion introduced by Blum [Blum, 1967; Blum et Nagel, 1978] in order to characterize the shape of an object by the means of medial axis containing width information. In 2D images, Blum defined the medial axis as the locus of centers of disks of maximal fit within an object. Making use of the *boundariness* which measures the presence of contours, Pizer et al. define the medial axis, and then the multiscale medial axis (MMA) which defines both the central axis and the width of objects. *Medialness* at a given point and scale $M(x_A,\sigma_A)$ measures the degree of belonging of the point x_A to the medial axis of the object. In [Pizer et al., 1994], it is defined as the integration over space, scale and direction of a weighted boundariness $W(x_A,x_B,\sigma_A,\sigma_B,u_B)B(x_B,\sigma_B,u_B)$, where the weight W is maximum when

- x_B is at a distance from x_A proportional to σ_B (with a constant of proportionality k),
- σ_A is proportional to σ_B (with a constant of proportionality c),
- u_B has the same orientation and direction as $x_B - x_A$.

In a more recent work [Pizer et al., 1998], he generalized this notion. The medialness can be defined as a convolution product of the initial image with a kernel $K(x,\sigma)$:

$$M(x,\sigma) = I(x) * K(x,\sigma)$$

To ensure the properties of invariance under rotation, translation, and rescaling, K is based on normalized Gaussian derivatives of intensity, computed at a distance from x proportional to σ and at positions that are rotationally invariant relative to x.

He classifies medialness function in two ways: first, central or offset medialness; second, linear or adaptive medialness. On one hand, **central** medialness is obtained by local information, using spatial derivatives of the image at a point x and a scale σ. **Offset** medialness uses the localization of boundaries by averaging spatial information about x over some region whose average radius is proportional to σ. On the other hand, medialness is said to be **linear** when K is radially symmetric and data-independent; and **adaptive** when K is data-dependent.

9.2.3 Ridges of medialness

The different definitions of ridges and their invariance properties were reviewed by Eberly et al. [Eberly et al., 1994]. They also propose an extension of the concept of ridges of dimension d in n dimensional images:

Définition 17 (ridges of dimension d in n dimensional images) *:*

$I(\bar{x})$ is a real-valued function defined for $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, and $H(\bar{x})$ is the Hessian matrix of I at $\bar{x}$. Assume that the eigenvalues of $H(\bar{x})$ are ordered as $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ with associated eigenvectors $(v_i)_{i\in[1,n]}$, and assume that $1 \leq d \leq n$:

$$\bar{x} \text{ is a ridge point of type } n-d \text{ if and only if } [v_1 \dots v_d]^t \nabla I(\bar{x}) = 0 \text{ and } \lambda_d < 0.$$

In the context of multiscale analysis, ridges can be extracted in a space including the spatial and scale dimensions. The *Multiscale Medial Axis* [Pizer et al., 1994; Morse et al., 1994; Fritsch et al., 1994] or also called *core* is an example. Extraction of such ridges requires specific algorithms [Lindeberg, 1996; Fritsch et al., 1995; Furst et Pizer, 1998; Pizer et al., 1998] as for example the so-called Marching Lines [Thirion et Gourdon, 1992; Thirion et Gourdon, 1993] derived from the Marching cubes [Lorensen et Cline, 1987] and applied for multiscale crest lines extraction in medical images [Fidrich, 1997; Fidrich et Thirion, 1997].

9.2.4 Works dedicated to vessel detection and interpretation of the Hessian matrix

We concentrate here on works using multiscale analysis for vessel detection, especially in 3D, and proposing different response functions (or medialness). Of course, other works that do not use this analysis can be found. For example [Verdonck, 1996] that fits a model of the vessels contours to the image or [Székely et al., 1994; Gerig et al., 1993] that proposes a symbolic description of the vessels network and show results on MRA.

The work of Koller et al. [Koller et al., 1995] proposes a multiscale response in order to detect linear structures in 2D images. The response function uses eigenvectors of the Hessian matrix of the image to define at each point M an orientation $\mathcal{D}$ orthogonal to the axis of a potential vessel that goes through M. From this direction, the two points located at equal distance of M in the direction $\mathcal{D}$ are noted M_1 and M_2. The response at M is defined by the minimum of $\mid \overrightarrow{MM_i}.\nabla I(M_i) \mid / \mid \overrightarrow{MM_i} \mid$ for $i \in \{1,2\}$. The authors put the emphasis on the discrimination between contours and vessels centers. They propose also an extension to 3D, but without recommending a particular response because in this case, they are not two points equidistant to M but a circle.

Following this work, Lorenz et al. [Lorenz et al., 1997] decided to use further information from the Hessian matrix: its eigenvalues. Indeed, after a Taylor expansion to second order of the image intensity (equation (9.1)), the eigenvalues of the Hessian matrix, when the gradient is weak, express the local variation of the intensity in the direction of the associated eigenvectors.

$$I(M + h\vec{v}) = I(M) + h\,\nabla I\,\vec{v} + \frac{h^2}{2}\vec{v}^{\,t}\,H(I)\,\vec{v} + \mathcal{O}(h^3) \tag{9.1}$$

Thus, for white structures on dark background, a **linear** structure has two negative and high eigenvalues and a third one which is low in absolute value, and a **planar** structure has only one negative and high eigenvalue and two other low eigenvalues. Moreover, the eigenvector of the lowest eigenvalue of a linear structure gives the direction of the vessel axis, whereas the two other eigenvectors give a basis in the plane of the cross-section, as shown by figure 9.2.4. This noting leads them to

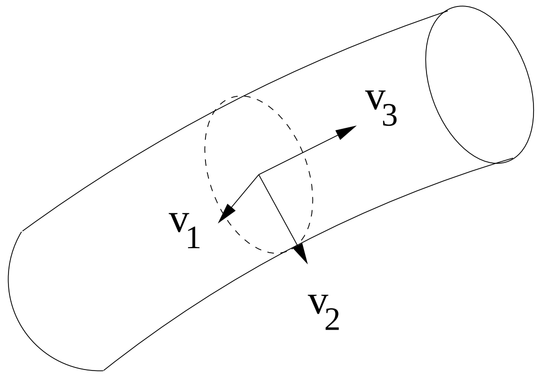


FIG. 9.1 – *Illustration of the Hessian matrix eigenvectors.*

define a response function which depends on the eigenvalues of the Hessian matrix. However, the authors show only a single result on a three dimensional image which contains only two tubular structures.

A more recent work done by Sato et al. [Sato et al., 1998b; Sato et al., 1997] also proposes to choose a response function based exclusively on the eigenvalues of the Hessian matrix. The choice of the response function which combines the three eigenvalues is heuristic and is based on an experimental study on various cases (curved vessels, junctions of vessels). The interest of their work is to show that a single method can given results on several modalities : MRA, CT and still describing different anatomical structures : vessels in brain, bronchi or liver. Their approach is to provide a visual help in the interpretation of the image after filtering. However, the images used in their experiments seem to have a higher spatial resolution than usual images used in clinical practice, and their algorithm, which uses very few discrete scales, doesn't detect vessel axes and doesn't seem suitable for an accurate estimation of vessel size. In the same state of mind, Frangi et al. [Frangi et al., 1998] propose another response function by interpreting geometrically the eigenvalues of the Hessian matrix.

Using the classification of Pizer et al described in section 9.2.2, all those works present different choices of medialness that are *adaptive* because they depend on the Hessian matrix in a non-symmetric way, and are either *central* [Lorenz et al., 1997; Sato et al., 1998b; Frangi et al., 1998] or *offset* [Koller et al., 1995].

9.3 Contributions and organization

The contributions of this part, based on previous works [Krissian et al., 1998b; Krissian et al., 1998c; Krissian et al., 1998a], are twofold. First, we propose a new adaptive medialness measure for detection of tubular structures in 3D images. The adaptive property of the medialness is based on the characteristics of the Hessian matrix of the image, its eigenvectors and eigenvalues. The analytic study of those characteristics on different models of vessels including elliptical cross-sections and vessel axis curvature show that eigenvectors and gradient are more stable than eigenvalues. This leads us to choose an offset rather than central medialness response. Second, we use a simple model of cylindrical vessel with circular Gaussian cross-section to guide our detection. The analytic computation allows a scale-selection in the same way as Lindeberg [Lindeberg, 1996]. We then express the relationship between the normalization parameter γ, the selected scale, and the structure width and choose those parameters according to the model. From this relationship, we make a full reconstruction of the vessels network. Other works do not use an explicit model to derive optimal parameters of their response function.

Chapter 10 describes a first cylindrical circular model and two derived models that are curved and with non-circular but elliptical cross-section. Those theoretical models are used to compute eigenvalues and eigenvectors of the Hessian matrix and to interpret their values and their sensitivity with respect to the position of the current point, the image intensity, the radius of the structure, the vessel curvature, the non-circular cross section.

Chapter 11 describes the proposed measure of medialness, and the automatic scale-selection based on the cylindrical circular model. It also gives the relationship between the size of the structure and its selected scale. Eventually, it explains the extraction of the local extrema and the reconstruction stages.

Experiments and results are detailed in chapter 12. Synthetic images are used to validate the analytical study and to show the behavior of the algorithm under different kinds of tubular structures. Experiments on a phantom image are done to validate our radius estimation. And an application on real images, that are 3D reconstruction of the brain vessels from 2D X-ray angiographies and a brain MRA, is also presented. The vessel network reconstruction is compared to usual isosurfaces rendering or MIP views.

Chapitre 10

Different models of tubular structures

« *To explain all nature is too difficult a task for any one man or even for any one age. It is much better to do a little with certainty, and leave the rest for others that come after you, than to explain all things.* »
Newton, Isaac (1642-1727).

Après les travaux de [Koller et al., 1995; Lorenz et al., 1997], d'autres chercheurs ont proposé d'améliorer la visualisation des vaisseaux par un traitement multi-échelle linéaire dont la fonction de réponse est essentiellement basée sur les valeurs propres de la matrice hessienne [Sato et al., 1998b; Frangi et al., 1998]. Afin de mieux comprendre le lien entre les valeurs propres de la matrice hessienne et la structure locale des images, nous calculons dans ce chapitre les expressions analytiques de ses valeurs propres sur différents modèles.

Following the work of [Koller et al., 1995; Lorenz et al., 1997], several articles have been dedicated to the visualization of vessels after a linear multiscale analysis, whose response is exclusively based on the eigenvalues of the image Hessian Matrix [Sato et al., 1998b; Frangi et al., 1998]. In order to better understand the link between the eigenvalues and the local structure of the image, we evaluate in this chapter the analytic expression of these eigenvalues for several theoretical models.

10.1 Introduction

The introduction of different models for tubular structures gives a mathematical framework for understanding and improving the signal processing methods involved in the recognition and the extraction of such structures.
When creating a model for tubular structures, we can distinguish the model of a *cross-section*, the model of the *global tubular shape*, and the model of *local variation* of either the shape or the cross-section.

- The cross-section model can be split into the *shape* model (circular, elliptical, ...), and the *intensity profile* model, (Gaussian, bar-like, ...).
- The global shape can be characterized by the shape of the central axis. Thus, it has the same features as a 3D curve : direction (tangent of the curve), curvature (toroidal model), and torsion (helical model).
- Local variations in the cross-section can represent a model of a vessel stenosis for example, and local variations in shape can represent junctions of vessels.

In this chapter, we present some models that were used either to compute the characteristics of the Hessian matrix near the vessel center, or to express analytically or compute numerically the result of our algorithm.

10.2 Different models of the cross-section intensity profile

We introduce different models of the cross-section intensity profile. Two standard models are generally considered : the Gaussian-like and the bar-like profiles. We introduce a new model which is more realistic and combine those two models : the convolved bar-like profile. This model is further used in section 12.1.2 for experiments and simulations, and also in the improvement of the stenosis quantification in section 13.4.

10.2.1 Gaussian-like cross-section

The Gaussian cross-section model is used for the models defined in sections 10.3.3, 10.3.2 and 10.3.1. It has good properties, described in section 10.3.3, that make it suitable for analytical calculation.

10.2.2 Convolved bar-like cross-section

We introduce a new vessel model of a bar-like cross-section convolved with Gaussian kernel with a constant and small standard deviation. In this cross-section model, the Gaussian kernel convolution acts like a partial volume effect and can lower the intensity of small vessel : big vessels are *bar-like* and small ones are *Gaussian-like*. Figure 10.1 and figure 10.2 show the effect of convolving the bar-like model with a Gaussian, for a 1D and a 2D model. Using this kind of model closer to real images, size estimation can be considerably improved. In 13.4, we study this model thoroughly and compare it to the real cross-section intensity profile of 3D reconstructed X-ray angiographies. An analytic expression of the model is given by :

$$I(x,y,z) \;=\; f_r(x,y) * G_{\sigma_p}(x,y) \tag{10.1}$$

where r is the radius of the vessel, σ_p is a constant, and f_r is defined by

$$\begin{aligned} f_r(x,y) \;&=\; 1 \text{ if } \sqrt{x^2+y^2} \leq r \\ &=\; 0 \text{ otherwise.} \end{aligned}$$

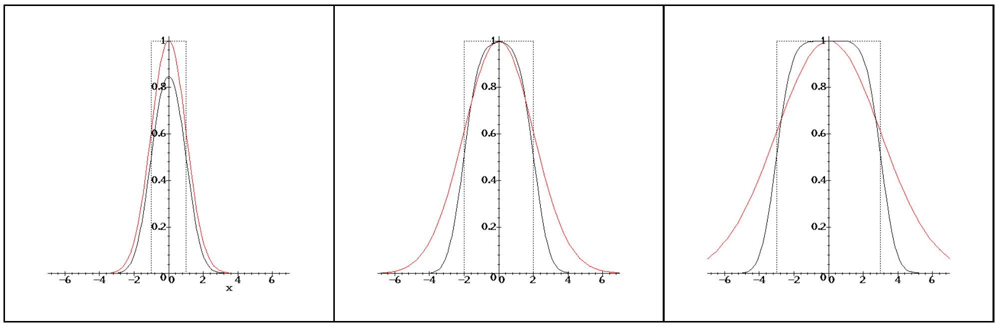


FIG. 10.1 – *Illustration of the 1D bar-like convolved model. From left to right : models for a 1D vessel with radii 1,2 and 3. In red, a normalized Gaussian model. In black, convolution of a bar-like model with a Gaussian of standard deviation 0.7.*

10.3 Mathematical tubular models

We introduce in this section three mathematical models. These models are used for calculation of the characteristics of the Hessian matrix in the next section. Each of this model has a Gaussian-like cross-section profile, the first is the simplest one and is also used for expressing the multiscale response in chapter 11. Although the introduced models are very simple compared to the reality of the vessels, the use of a linear multiscale analysis can justify this simplicity because the gaussian kernel will smooth both noise and the irregularity of the cross-section contours at a scale at which a vessel centerline is detected.

10.3.1 First model : cylindrical circular model with Gaussian cross-section

The first vessel model that we introduce is cylindrical where (Oz) is the vessel axis and the vessel section is a Gaussian blob :

$$\boxed{I_0(x,y,z) \;=\; C\, G_{\sigma_0}(x,y) \;=\; \frac{C}{2\pi{\sigma_0}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2{\sigma_0}^2}}}. \tag{10.2}$$

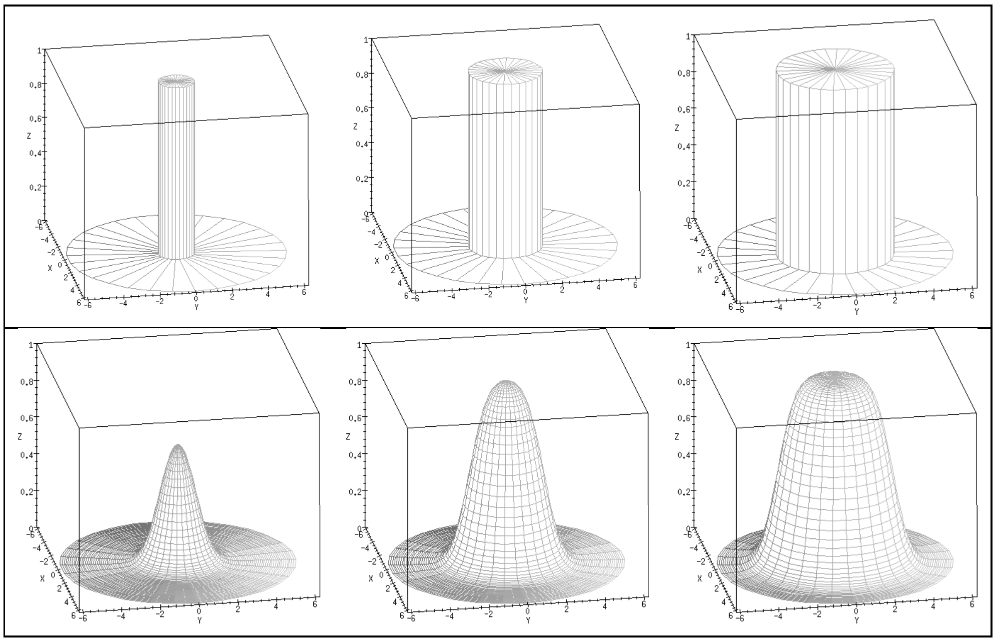


FIG. 10.2 – *Illustration of the cross-section of the 2D bar-like convolved model. At the top, representation of the bar-like cross-section with radii equal to 1, 2 and 3 from left to right. At the bottom, the same cross-sections after convolution with a 2D Gaussian of standard deviation 0.7.*

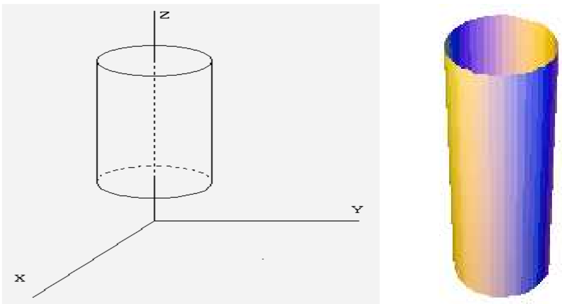


FIG. 10.3 – *Cylindrical circular model of a vessel.*

where C is a function of σ_0 and $\frac{C}{2\pi{\sigma_0}^2}$ represents the intensity at the center of the vessel (figure 10.3). C depends on the size of the vessel, this dependence is due to partial volume effect that decreases the small vessels intensity.
The model has the following properties :

- the frontier of the vessel is considered to be at the points where the first derivative in the gradient direction is maximum, i.e., for the points which verify $x^2 + y^2 = {\sigma_0}^2$, thus the vessel radius is σ_0.
- if the model is convolved with a Gaussian kernel of standard deviation σ, the resulting image is another vessel which matches our model but with a radius $\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma^2}$. This result can be directly deduced from the semi-group property.

In order to better take into account the reality of the vessels, we will study two variations of this model. The first one is a toroidal circular vessel which allows us to introduce a curvature of the vessel. The second one is a cylindrical vessel with an elliptical cross-section which introduces a variation in the circular shape of the vessel.

10.3.2 Toroidal circular model

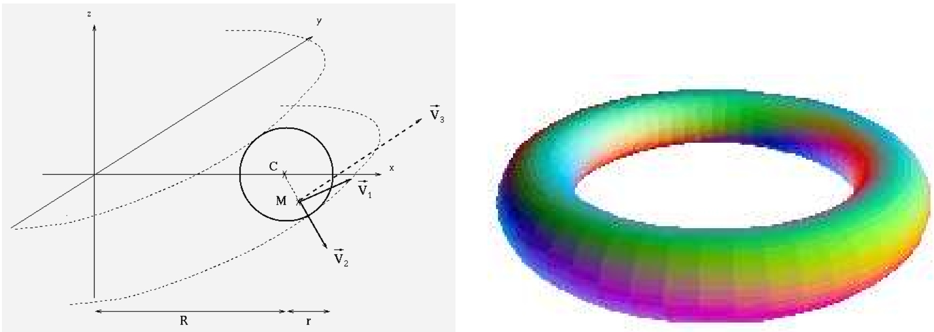


FIG. 10.4 – *Toroidal circular model of a vessel.*

The vessel model is a torus, with the big circle parallel to the plane XY and with a radius R and the small circle with a radius equal to r. The intensity function of the model is given by the expression :

$$\boxed{I_0(x,y,z) \ = \ Ce^{-\frac{\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2}{2\sigma_0^2}}}. \tag{10.3}$$

10.3.3 Cylindrical elliptical model

The elliptical section is defined by one standard deviation along the x axis, σ_x, and one standard deviation along the y axis, σ_y. The model is thus defined by :

$$\boxed{I_0(x,y,z) \ = \ Ce^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2+\left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2\right]}}. \tag{10.4}$$

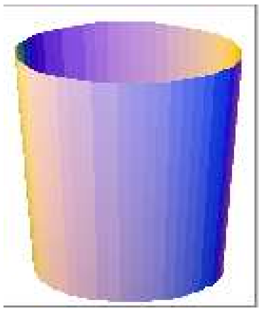


FIG. 10.5 – *Cylindrical elliptical model of a vessel.*

10.4 Study on the Hessian matrix for the different models

10.4.1 First model: Cylindrical circular model with Gaussian cross-section

Expression of eigenvalues and eigenvectors of the Hessian matrix The second derivatives of the intensity, given by equation (10.2), have the following expressions:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} &= \frac{I(x,y,z)}{\sigma^4}(x^2-\sigma^2)\\ \frac{\partial^2 I}{\partial xy} &= \frac{I(x,y,z)}{\sigma^4}xy\end{aligned}$$

Thus, the Hessian matrix can be expressed as $H = \frac{I_0}{{\sigma_0}^4}H'$ where

$$H' = \begin{bmatrix} x^2-{\sigma_0}^2 & xy & 0 \\ xy & y^2-{\sigma_0}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

and the eigenvalues and eigenvectors of H are

$$\begin{array}{lll} \lambda_3 = 0 & \lambda_2 = -\frac{I_0}{\sigma_0^2}\left[\frac{\sigma_0^2-(x^2+y^2)}{\sigma_0^2}\right] & \lambda_1 = -\frac{I_0}{\sigma_0^2} \\ \vec{\mathbf{v}}_3 = (0,0,1) & \vec{\mathbf{v}}_2 = (x,y,0) & \vec{\mathbf{v}}_1 = (-y,x,0) \end{array} \tag{10.5}$$

where $I_0 = I_0(x,y,z)$ is the initial image, and σ_0 is the radius of the initial blob. This means that our model has the following properties:

- Inside the vessel ($x^2+y^2 < {\sigma_0}^2$) we have two negative eigenvalues with eigenvectors in the plane orthogonal to the axis of the vessel.
- The third eigenvalue is null and the associated eigenvector is in the direction of the axis.
- The eigenvalues λ_1 and λ_2 are maxima in absolute value when $x = y = 0$ and are equal to $-\frac{I_0(x=0,y=0)}{{\sigma_0}^2}$, and λ_2 increases faster than λ_1 as a function of the distance to the center and becomes positive outside the vessel where $\sigma_0^2-(x^2+y^2)$ is negative.

For the multiscale process, the model is convolved with a Gaussian kernel of standard deviation σ and the results are still valid due to the semi-group property but σ_0 has to be replaced by $\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}$.

10.4.2 Toroidal circular model

Expression of eigenvalues and eigenvectors of the Hessian matrix In this case, the eigenvalues and eigenvectors are similar except that the third eigenvalue is not zero everywhere but only at the center of the vessel (see appendix D.1).
From the circular symmetry around the (Oz) axis, we can choose $y = 0$ and $x > 0$. Then the Hessian matrix H can be expressed as:

$$H = \frac{I_0(x,y,z)}{\sigma_0^4} H'$$

where

$$H' = \begin{bmatrix} (R-x)^2 - \sigma_0^2 & 0 & -z(R-x) \\ 0 & \frac{(R-x)\sigma_0^2}{x} & 0 \\ -z(R-x) & 0 & z^2 - \sigma_0^2 \end{bmatrix}.$$

The eigenvectors and eigenvalues of H are (see figure 10.4):

$$\begin{array}{lll} \lambda_3 = -\frac{I_0}{\sigma_0^2}\left[\frac{x-R}{x}\right] & \lambda_2 = -\frac{I_0}{\sigma_0^2}\left[\frac{\sigma_0^2 - CM^2}{\sigma_0^2}\right] & \lambda_1 = -\frac{I_0}{\sigma_0^2} \\ \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{3} = (0,1,0) & \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{2} = (x-R,0,z) & \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{1} = (z,0,R-x) \end{array} \tag{10.6}$$

In order to interpret the value of λ_3 depending on the curvature of the vessel $k = \frac{1}{R}$, we center the reference to the center C of the torus in the plane (Ox,Oy). With the new coordinate $x' = x - R$, we have

$$\lambda_3 = -\frac{I_0}{\sigma_0^2}\left[\frac{x'}{R+x'}\right] = -\frac{I_0}{\sigma_0^2}\left[\frac{kx'}{1+kx'}\right].$$

When the curvature is null, $\lambda_3 = 0$ as in the cylindrical case. Nevertheless, this result shows that a vessel curvature can lead to positive $(x > R)$ or negative $(x < R)$ values of λ_3 in the vicinity of the vessel center. Thus, the absolute value of λ_3 may not be negligible compared to the absolute value of the two other eigenvalues when the vessel curvature is high. we give a detailed calculation of the eigenvectors and the eigenvalues for this model in appendix D.1.

10.4.3 Cylindrical elliptical model

Expression of eigenvalues and eigenvectors of the Hessian matrix The Hessian matrix can be expressed as

$$H = \frac{I_0(x,y,z)}{\sigma_x^2\sigma_y^2} H'$$

where

$$H' = \begin{bmatrix} \sigma_y^2\left(X^2-1\right) & \sigma_x\sigma_y XY & 0 \\ \sigma_x\sigma_y XY & \sigma_x^2\left(Y^2-1\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

with $X = \frac{x}{\sigma_x}$ and $Y = \frac{y}{\sigma_y}$. The eigenvalues are (see appendix D.2 for more details):

$$\lambda_1 = \frac{I_0}{2\sigma_x^2\sigma_y^2}\left(E + G - \sqrt{(E+G)^2 + 4(F^2 - EG)}\right)$$

$$\lambda_2 = \frac{I_0}{2\sigma_x^2\sigma_y^2}\left(E + G + \sqrt{(E+G)^2 + 4(F^2 - EG)}\right)$$

TAB. 10.1 – *sign of the eigenvalues at the point M for the elliptical model.*

(1)	$(\frac{x}{\sigma_x})^2 + (\frac{y}{\sigma_y})^2 - 1 < 0$	M is *inside* the ellipse,	$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$
(2)	$(\frac{x}{\sigma_x})^2 + (\frac{y}{\sigma_y})^2 - 1 = 0$	M is *on* the ellipse,	$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 = 0$
(3)	$(\frac{x}{\sigma_x})^2 + (\frac{y}{\sigma_y})^2 - 1 > 0$	M is *outside* the ellipse,	$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$

TAB. 10.2 – *Expression of eigenvalues along x and y axis for the elliptical model.*

x axis (y = 0)	$\lambda_1 = -\frac{I_0}{\sigma_y^2}\left(1 - \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)$	$\lambda_2 = -\frac{I_0}{\sigma_x^2}$
y axis (x = 0)	$\lambda_1 = -\frac{I_0}{\sigma_y^2}$	$\lambda_2 = -\frac{I_0}{\sigma_x^2}\left(1 - \frac{x^2}{\sigma_x^2}\right)$
center (x = y = 0)	$\lambda_1 = -\frac{I_0}{\sigma_y^2}$	$\lambda_2 = -\frac{I_0}{\sigma_x^2}$

As $F^2 - EG = \sigma_x^2\sigma_y^2\left[(\frac{x}{\sigma_x})^2 + (\frac{y}{\sigma_y})^2 - 1\right]$, we can distinguish three cases depending on the position of $M(x,y)$, summarized in table 10.1. We can also study the eigenvalues along the x and y axis. In both cases, if we choose $\sigma_x > \sigma_y$, $\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{1} = (0,1,0)$ and $\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{2} = (1,0,0)$, table 10.2 gives the analytic expression of the eigenvalues. At the center of the elliptical vessel, one interesting property is that the ratio of the two main eigenvalues is equal to the inverse of the square of the ratio of the respective radii :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)^2$$

This means that a given variation on the radii ratio will lead to a higher variation of the eigenvalues ratio. figure 10.6 shows the section of an elliptical Gaussian vessel with $\sigma_x = 5$ and $\sigma_y = 3$, and the representation of the eigenvalues $\lambda_1(x,y)$ and $\lambda_2(x,y)$. Eigenvectors are given in equation (D.1) in appendix D.2. Figure 10.7 shows the curves which are tangent to the eigenvectors in the section of the vessel.

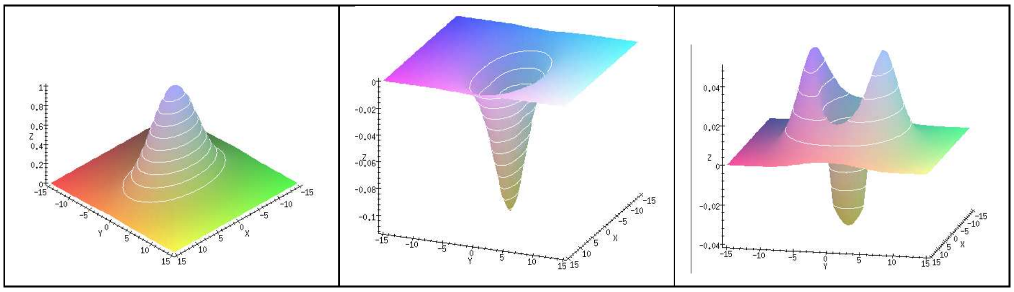


FIG. 10.6 – *Surface representation of the eigenvalues of the elliptical model. Left to right, surface of the Gaussian ellipse with $\sigma_x = 5$ and $\sigma_y = 3$, surface $z = \lambda_1(x,y)$, and surface $z = \lambda_2(x,y)$.*

10.4.4 Conclusion about the eigenvalues of the Hessian matrix

The three studied models have in common the following properties : at the vessel center one eigenvalue is null with the corresponding eigenvector in the direction of the vessel axis, and the two

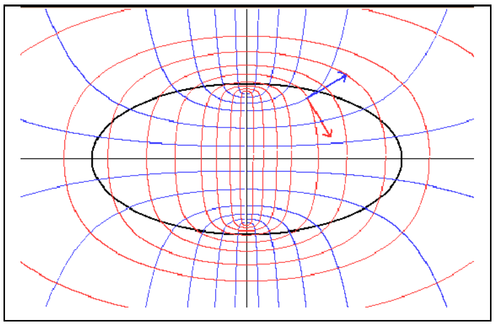


Fig. 10.7 – *Representation of the curves which are tangent to the eigenvectors for the cylindrical elliptical model. In red, the curves tangent to $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}$ and in blue the curves tangent to $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}}$.*

other eigenvalues are negative and equal if the section is circular, or approximatively equal if the section is an ellipse with $\sigma_x \approx \sigma_y$. The three following conditions express these properties :

$$\frac{-\lambda_1({\sigma_0}^2 + t)}{G_{\sqrt{t}} * I_0} \approx 1 \tag{10.7}$$

$$\lambda_1/\lambda_2 \approx 1 \tag{10.8}$$

$$\mid \lambda_1 \mid \gg \mid \lambda_3 \mid . \tag{10.9}$$

The equation (10.7) comes from the relation $\lambda_1 = -I_0/\sigma_0^2$. It expresses the relationship between the highest negative eigenvalue λ_1, the intensity of the vessel at the current scale $G_{\sqrt{t}} * I_0$, and the vessel radius. At a scale t, ${\sigma_0}^2 + t$ is the square of the vessel radius. However, as the value of σ_0 is not known, this relation is difficult to exploit and the simple criterion $\lambda_2 < 0$ which implies that λ_1 is also negative is used. Two main difficulties arise for using the previous criteria. The first one is the discrete representation of the image combined with the small size of vessels. Actually, vessels sizes are usually thinner than two or three voxels and the eigenvalues are not computed at the real vessel center but at the center of a voxel. The second one is the non-circular cross-section that increases the uncertainty on criterion (10.8). Thus, the vessel models presented in this section emphasize the difficulty in relying on eigenvalues of the Hessian matrix for an accurate detection of vessel center and size. For this reason, we propose to use eigenvalues of the Hessian matrix for the discrimination of vessel-like structures from other structures, and to use a gradient-based response function for the extraction of the vessel centerlines. This extraction is explained in the following chapter.

10.5 Conclusion

We presented in this chapter a few models, including convolved bar-like cross-section, elliptical cross-section, and toroidal models. In section 12.1, we also show some experiments on tangent vessels and junctions. Other works focus on the fitting of models to the image : [Moreau-Gaudry et al., 1998] propose a new branching model, and [Juhan et al., 1997] propose a model of Abdominal Aortic Aneurysm. These works, which use more complex models and a high number of parameters, are models of the contours of the vessels and don't include intensity profiles. Such models can be used for quantification when the region of interest is localized or for blood flow modeling.

Chapitre 11

Multiscale detection of the vessels central axes

Dans ce chapitre, nous présentons une analyse multi-échelle linéaire afin d'extraire les lignes centrales de structures tubulaires. Cette analyse multi-échelle utilise une estimation adaptative et distante de la position centrale d'un voxel par rapport aux contours des vaisseaux, qui est normalisée et calculée analytiquement à l'aide d'un modèle cylindrique circulaire. L'extraction de maxima locaux permet ensuite d'obtenir les lignes centrales avec une estimation de la taille des structures.

In this chapter, we present a linear multiscale analysis for extracting the centerlines of tubular structures. This multiscale analysis uses an adaptive offset medialness, which is normalized and calculated analytically on the cylindrical circular model. Next, the extraction of local maxima allows to obtain the centerlines with an estimation of the size of the structures.

11.1 Introduction

Our approach can be split into three steps. We first compute the multiscale response from responses computed at a discrete set of scales, we then extract the local maxima in this multiscale response in order to estimate the vessels centerlines. Vessels are then reconstructed using both the centerlines and the size information. In the first step, we use a model of the vessels both for interpreting the eigenvalues and the eigenvectors of the Hessian matrix and for choosing a good normalization parameter.

Computation of the *single scale response* requires different steps. First, a number of points are pre-selected using the eigenvalues of the Hessian matrix. These points are expected to be near a vessel axis. Then, for each pre-selected point, the response is computed at the current scale. The response function uses information from both eigenvectors of the Hessian matrix and gradient vectors located on a circle centered on the current point. Finally, this response is normalized in order to give a multiscale scale response that combines interesting features of each single scale response. These steps are detailed in the following paragraphs.

11.2 Pre-selection of candidates

In order to compute the response R_t at one scale t, we pre-select points that are expected to be near the vessel axis. This pre-selection is both a discrimination of non-tubular structures and a way to save computation time. In the first section, we studied properties of the eigenvectors and the eigenvalues of the Hessian matrix on different models of vessels. For this pre-selection, we use a weak version of the criteria given in equations (10.7,10.8,10.9) where we only test that λ_1 and λ_2 are negative.

11.3 Computation of the response R_t

A first choice for R_t can be a 3D extension of the 2D response proposed by Koller et al. [Koller et al., 1995]. For a point $\bar{x}$, the response is set to the minimum of the absolute value of the intensity's first order derivative computed at 4 points equidistant from $\bar{x}$. An advantage of this choice is to ensure that a high response results in a high probability of being at a vessel's center, but this medialness response is too sensitive to noise. It seems more natural to use information from the first derivative at every point of a circle than just four points. This circle $C(\bar{x},\theta\sqrt{t})$ is centered at the current point $\bar{x}$, has a radius $\theta\sqrt{t}$, and is located in the plane defined by $\bar{x}$ and the two eigenvectors $\vec{\mathbf{v_1}}$ and $\vec{\mathbf{v_2}}$. The proportionality constant θ will be chosen according to the model. This constant is the inverse of the constant $\rho = \frac{1}{\theta}$ already introduced in [Pizer et al., 1998]. We will see in section 11.4.3 how this constant can be chosen to optimize the response at the maximal scale.
We propose to use the following medialness response:

$$R_t(\bar{x}) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha=0}^{2\pi} -\nabla_t I_0\left(\bar{x}+\theta\sqrt{t}\,\vec{\mathbf{v}}_\alpha\right).\vec{\mathbf{v}}_\alpha d\alpha \tag{11.1}$$

with $\vec{\mathbf{v}}_\alpha = cos(\alpha)\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{1} + sin(\alpha)\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{2}$. This response is the mean of first order derivative information taken at the circle $C(\bar{x},\theta\sqrt{t})$. $\vec{\mathbf{v}}_\alpha$ is the radial direction and $\nabla_t I_0$ is the gradient vector of the initial image, computed at the scale t. To ensure a positive response for white structure on dark background, we take the opposite of the scalar product between the gradient and the radial direction.
In practice, we must compute this response for a discrete image. Thus, we use $N = E(2\pi\sqrt{t}+1)$ points along the circle $C(M,t)$, where $\forall n \in \mathbb{R}, E(n)$ is the integer part of n, it leads to the discrete formulation:

$$R_t(\bar{x}) \;=\; \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} -\nabla_t I_0\left(\bar{x} + \theta\sqrt{t}\,\vec{\mathbf{v}}_\alpha\right).\vec{\mathbf{v}}_\alpha, \quad \text{with} \quad \alpha = 2\pi i/N. \tag{11.2}$$

The value of the gradient vector at the point $\bar{x} + \theta\sqrt{t}\vec{\mathbf{v}}_\alpha$ is obtained by trilinear interpolation of the gradient vector, allowing a better boundary estimation (trilinear interpolation is defined in appendix F).

11.4 Computation of the multiscale response

11.4.1 Response normalization through scales

One difficulty with multiscale approach is that we want to compare the result of a response function at different scales while the intensity and its derivatives are decreasing functions of scale. Lindeberg [Lindeberg, 1994; Lindeberg, 1996] introduced the notion of normalized derivatives in order to deal with this problem. The scale t is defined as $t = \sigma^2$ where σ is the standard deviation of the Gaussian, and the γ*–normalized derivative* ∂_γ was defined by equation (4.14) in section 9.2.1. At a scale t, the cylindrical circular model with a constant $C > 0$ leads to

$$L(\bar{x},t) = I_0(\bar{x}) * G_{\sqrt{t}}(\bar{x}) = CG_{\sqrt{\sigma_0^2+t}}(\bar{x}).$$

The maximum of the normalized response R_t^n is given by equation (11.3). Details about this calculation are given in appendix E.1.

$$R_t^n \;=\; C\frac{\theta t^{\frac{\gamma+1}{2}}}{2\pi\,(t+\sigma_0^2)^2}\,e^{-\frac{\theta^2 t}{2(t+\sigma_0^2)}} \tag{11.3}$$

We find a relation of proportionality between the scale t_{max} that gives a maximal response and the initial radius of the vessel σ_0:

$$t_{max} \;=\; h(\gamma,\theta)\sigma_0^2 \tag{11.4}$$

where h is a function of the normalization parameter γ and the proportionality constant θ:

$$h(\gamma,\theta) = \frac{\sqrt{\Delta} + 2\gamma - 2 - \theta^2}{2(3-\gamma)} \quad \text{with} \quad \Delta = \left[\theta^2 - (2\gamma-2)\right]^2 + 16 - (2\gamma-2)^2 \tag{11.5}$$

Usually, γ is chosen to allow the response R_t to be maximal for a scale corresponding to the size of the structure we want to detect. To keep generality, we establish the relationship between the scale

t_{max} where the maximal response is reached and the initial radius σ_0 of the vessel. This relationship depends on both the normalization parameter γ and the distance coefficient θ. However, this relation still depends on the choice of the structure model. We will see in the experimental study (section 12.1.2) a comparison of this relation between the Gaussian cross-section model and other models.

11.4.2 Zoom-invariant criterion

The zoom-invariant property is the scale invariance defined in sections 2.1.3 and 4.4.1.
A criterion for normalization is to choose γ in order to ensure a zoom-invariant response function. This choice will avoid privileging vessels of certain radii in the multiscale integration, because the maximal response at the center of a tubular structure will not depend on its size. It will also help to handle interaction between vessels of different sizes. For example, if the maximum response at the center of a big vessel is higher than the maximum response at the center of a small vessel, and the two vessels are neighbours, the big vessel may create side effects which will disturb the extraction of the small vessel in the multiscale integration. Moreover, finding a single threshold to extract the centerlines of all vessels in the final image will be more difficult. Thus, we choose the value 1 for γ. This value is the only one that ensures a zoom-invariant property of our response function as shown in [Lindeberg, 1994].

11.4.3 Choice of the constant θ

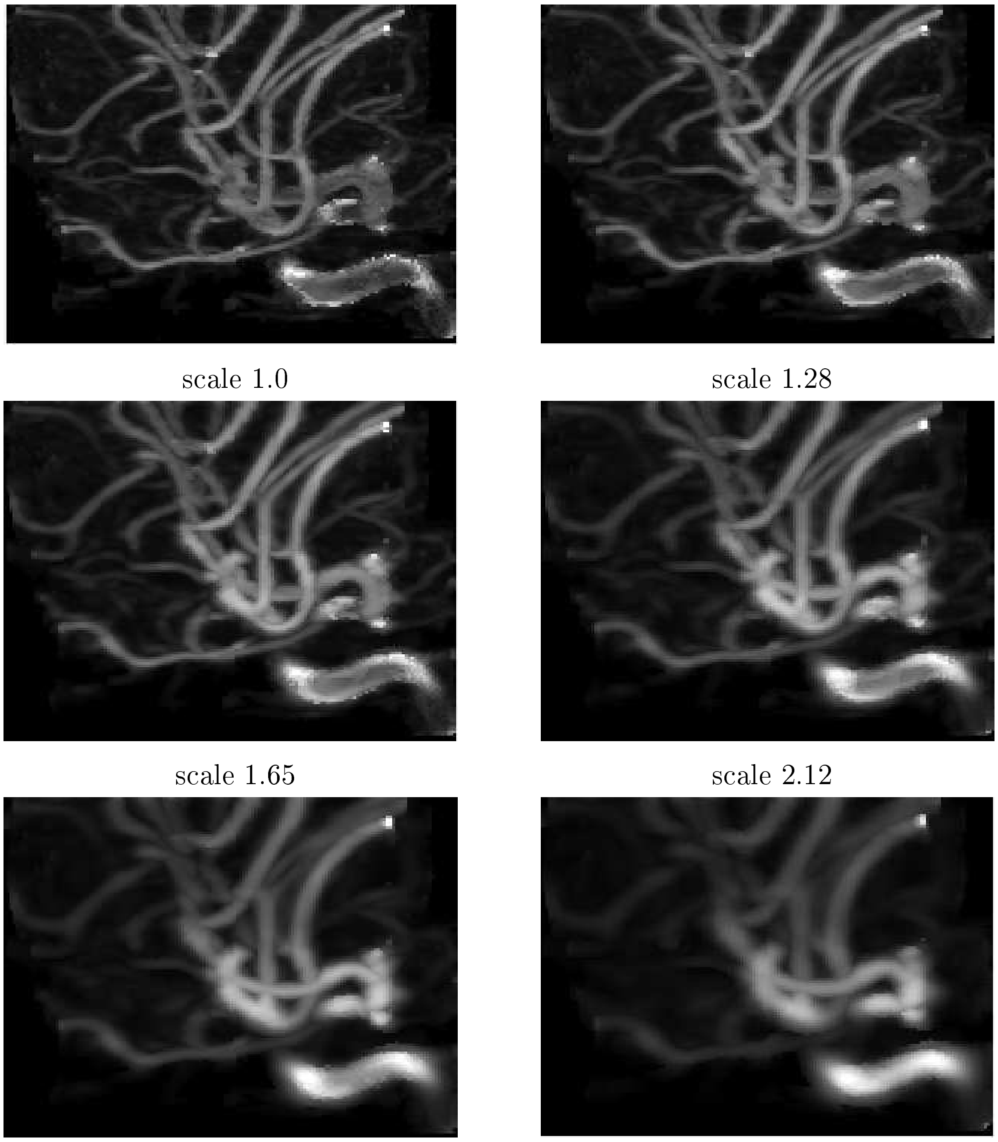
The purpose of introducing the parameter θ is to compute the boundariness at a distance which is equal to the frontier of the vessel at the maximal scale t_{max}. This can be achieved for our vessel model. At a given scale t, the frontier of the vessel is at a distance $\sqrt{\sigma_0^2 + t}$ from the vessel center. As the response uses the gradient at a distance $\theta\sqrt{t}$, we would like to have the following relation

$$\theta\sqrt{t_{max}} \;=\; \sqrt{\sigma_0^2 + t_{max}}$$

Introducing equation (11.4) and having set γ to the value 1, we find a solution to this relation given by $\theta = \sqrt{3}$.
Once we have chosen the two parameters γ and θ, two numerical relations can be deduced for our vessel model. The first one is proportional relation between the size of the vessel and the scale at which it is detected $t_{max} = h(\gamma,\theta)\sigma_0^2 = 0.5\ \sigma_0^2$. The second one is the value of the maximal response $R^n_{t_{max}}$:

$$R^n_{t_{max}} \;=\; \left[\frac{C}{2\pi\sigma_0^2}\right]\sigma_0^{\gamma-1}\frac{\theta\, h(\gamma,\theta)^{\frac{\gamma+1}{2}}}{(h(\gamma,\theta)+1)^2}\, e^{-\frac{\theta^2 h(\gamma)}{2(h(\gamma)+1)}} \approx 0.233\left[\frac{C}{2\pi\sigma_0^2}\right] \tag{11.6}$$

This value is proportional to the intensity of the vessel center when the background intensity is null. $R^n_{t_{max}}$ is approximatively equal to 0.233 times the intensity at the vessel center $\frac{C}{2\pi\sigma_0^2}$.



scale 1.0 | scale 1.28

scale 1.65 | scale 2.12

scale 2.72 | scale 3.5

FIG. 11.1 – *MIP views (Maximum Intensity Projections) of the responses obtained for 6 different scales.*

11.4.4 Multiscale response

The discrete scales range from t_l to t_h using a logarithmic scale in order to have more precision at low scales. Figure 11.1 shows Maximum Intensity Projections (MIP views) of the normalized responses computed on *image 1* of figure 12.13. Six scales were used for radii of vessels ranging from 1.0 to 3.5: $\{1.0, 1.28, 1.65, 2.12, 2.72, 3.5\}$. A vessel of radius r is detected at a scale $h(\gamma)r^2$, so we use the scales corresponding to a each radius for the multiscale processing.
A MIP view of the initial image is shown at the top left of figure 11.2, and a MIP view of the multiscale response which is the maximum response across the set of scales is shown beside.

11.5 Extraction of local maxima

Our definition of local extrema is a special case of the *Height ridge* definition [Furst et al., 1997]. Some recent work [Furst et al., 1996; Lindeberg, 1996; Fidrich, 1997] in ridge extraction use the "Marching Lines" algorithm [Lorensen et Cline, 1987; Thirion et Gourdon, 1993]. For each spatial point $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, we associate the *scale-space point* $M^t(x,y,z;t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$. We also define $\vec{\mathbf{t}}$ as a vector in the scale direction.
We define a local maximum in the scale-space normalized response as a point $(\bar{x};t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ which is locally maximal in the directions of $\vec{\mathbf{v_1}}(\bar{x};t)$, $\vec{\mathbf{v_2}}(\bar{x};t)$ and $\vec{\mathbf{t}}$. We can easily state that for every central point M of a vessel, its associated scale-space point $M^{t_{max}}$ is locally maximal in the scale-space response. If the converse is true, i.e. all the local maxima in the scale-space response are located at central points of a vessel, then detecting the centerlines is equivalent to extracting those local maxima. This assumption can be verified in the vicinity of the central points. This vicinity is obtained by pre-selection of candidates (paragraph 11.2). In practice, we use equation (11.7) as a characterization of the local extrema.

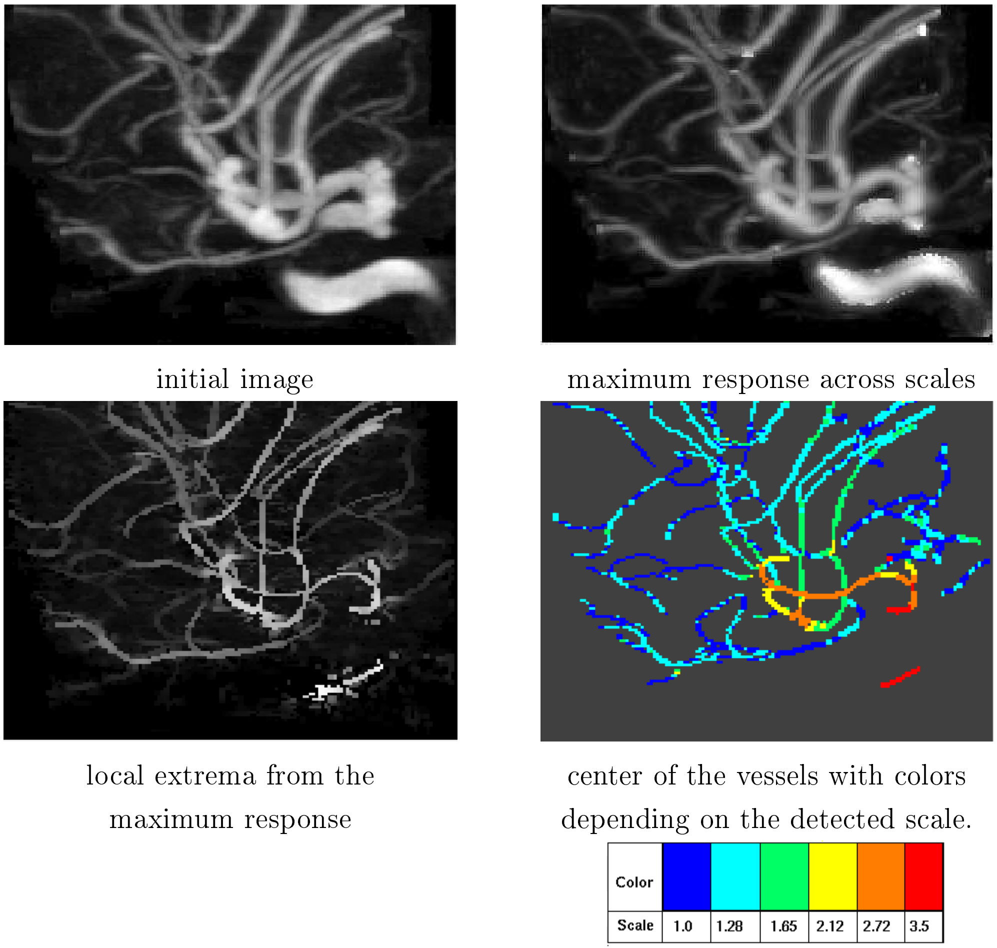
$$\begin{aligned}(\bar{x};t_i) \text{ is locally maximal} \iff\ & R^n_{t_i}(\bar{x}) \geq R^n_{t_i}(\bar{x} \pm \vec{\mathbf{v_1}}) \text{ and } R^n_{t_i}(\bar{x}) \geq R^n_{t_i}(\bar{x} \pm \vec{\mathbf{v_2}}) \\ & \text{and } R^n_{t_i}(\bar{x}) \geq R^n_{t_{i\pm1}}(\bar{x}) \qquad (11.7)\end{aligned}$$

Figure 11.2 shows at the bottom left a MIP view of the local extrema extracted from the upper left image.

11.6 Reconstruction and visualization

It is not an easy task to visualize the local extrema image in order to improve the interpretation of the original data image. For that purpose, we propose to extract some information from the local extrema image, to superimpose it into some 3D representation of the original data image (volume or surface rendering) or to use it for a vessel network reconstruction.

Line extraction The image of local maxima contains enhanced information on the vessels centerlines. However, all the extracted maxima are not centers of vessels, some of them with lower



initial image

maximum response across scales

local extrema from the maximum response

center of the vessels with colors depending on the detected scale.

FIG. 11.2 – *MIP views at different stages of the multiscale analysis.*

intensity value are detected due to noise or to the irregularity of the vessels frontiers. In order to obtain the centerlines from the local maxima image, we *first* create of binary image of the local extrema image by applying a hysteresis thresholding. *Second*, we thin this result to obtain a skeleton-like representation of the vessels. Thinning is achieved by deleting the simple points. These points are the ones whose removal does not change the topology of the image. More details of the skeletonization algorithm can be found in [Bertrand et Malandain, 1994]. The resulting skeleton is composed of pieces of curves, each of them representing a piece of vessel. *Third*, the skeleton is simplified by removing small pieces of curves. The criterion used for this removal is a threshold on the euclidian length of the curve. For a better visualization, the remaining curves are smoothed using an energy minimization including data attachment. The smoothing method is derived from [Delingette, 1994] and doesn't modify the localization of the extremities of each line. The result obtained is an image of the vessel axes.

Reconstruction The centerline image also contains information about the size of the vessel, which is proportional to the scale at which the current point has been extracted. The relation between a vessel size and the scale at which it was detected was given in paragraph 11.4.2. The bottom right image of figure 11.2 represents a MIP view of the centerlines obtained, where central points are colored according to the scale at which they have been extracted, six colors are used ranging from blue to red for the six single-scale responses shown in figure 11.1.
Each piece of vessel is described by a sequence of points $\{c_i\}$, each of them being associated with an estimated radius r_i. We reconstruct each segment $[c_i,c_{i+1}]$ independently. If the orthogonal projection c of a point M on the line c_ic_{i+1} is into the segment $[c_i,c_{i+1}]$, we estimate the radius in c, and deduce from it the intensity in M with equation (10.2). This way, we reconstruct a grey-level image and we visualize easily all the reconstructed vessels with an isosurface.

Visualization The usual means of visualizing the vessel network are not effective. On the one hand, MIP views can mislead the physicians because they don't contain information about the relative position of the vessels in depth. One can add depth-cueing to them but a high intensity vessel located behind a low intensity vessel may still appear to be in front of it, or hide it. On the other hand, an isosurface of the initial image can account for the the *relative position* of the vessels, but it contains *partial information* about the image which is insufficient. With a low threshold an isosurface contains the small vessels but they are hidden by the big vessels. With a high threshold, it contains only the thickest vessels as shown in figure 12.13.
In both cases, MIP view or isosurface, the superimposition of the detected 3D centerlines can help the interpretation of the real vessel network. Moreover, an isosurface of the reconstructed vessel network have the advantages of an initial image isosurface without having its drawbacks, because all vessels are reconstructed with the same centerline intensity. Thus, it can help to understand the local structure of the vessels network.

Chapitre 12

Experiments and results

Ce chapitre présente des résultats obtenus à la fois sur des images synthétiques, une image de fantôme, et sur des images réelles. Les expériences sur les images synthétiques sont réalisées dans le but de comprendre le comportement de notre algorithme face à des situations "difficiles" qui ne sont pas prises en compte dans les modèles mathématiques de vaisseaux : variation rapide de la taille des vaisseaux, tangence entre vaisseaux, jonctions, sections non gaussiennes, etc ...

This chapter presents some results obtained on synthetic images, on a phantom image, and on real images. Experiments on synthetic images were achieved with the aim of better understanding the behavior of our algorithm on "difficult" regions that are not included in the mathematical models of vessels: rapid variation of the vessel size, tangency between vessels, junctions, non-Gaussian sections, etc ...

12.1 Experimental study on synthetic images

In this section, we present some experiments made on synthetic images. The purpose is to estimate the sensitivity and to understand the limits of our method on several criteria: normalization, radius estimation, curvature, tangency of vessels, junctions. The created images have a Gaussian blob cross-section and their difference from the theoretical models lies in their discrete representation. This choice allows to check the expected results found by the analytic study. However, we also compare the response profile obtained for *bar-like* and *Gaussian-like* cross-sections on a cylindrical circular model. This study on synthetic images is not exhaustive, but we hope that it leads to a better understanding of problems arising in vessels segmentation. In the ideal case, the spirit of the work on synthetic images is *first* to find all the difficulties; *second* to create synthetic images that isolate each difficulty, to understand the behavior of the method on this problem and to try to improve it; *third* to expect that a single algorithm which handles each of these difficulties separately will give good results on real images.

12.1.1 Cylindrical circular vessels with Gaussian cross-section

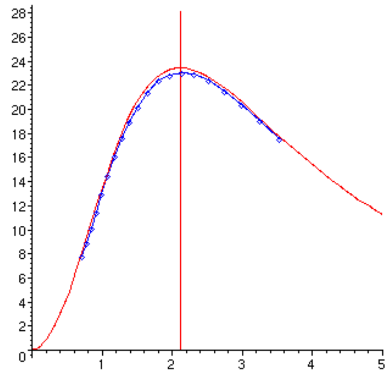


FIG. 12.1 – *Response obtained at the center of the vessel for different scales. In red, the theoretical profile, and in blue the obtained profile. The vertical line shows the theoretical scale for which the response is maximal.*

Response profile The response profile is the evolution of the medialness response as a function of scale, here taken at the vessel center. Figure 12.1 shows a comparison between the theoretical and the obtained profiles. The synthetic image contains a circular cylinder with a Gaussian blob cross-section, a radius of 3 voxels, and an intensity equal to 100 at the center. The theoretical response profile is given by equation 11.3 where $\sigma_0 = 3$, $\gamma = 1$, $\theta = \sqrt{3}$ and $C = 2\pi\sigma_0^2 \times 100$. The experimental response profile is obtained from twenty scales ranging from 0.7 to 3.5. This comparison shows that the two profiles match, and that the experimental profile is slightly lower than the theoretical one near the maximal scale. This difference is due to the discrete representation of the image compared to the continuous model used.

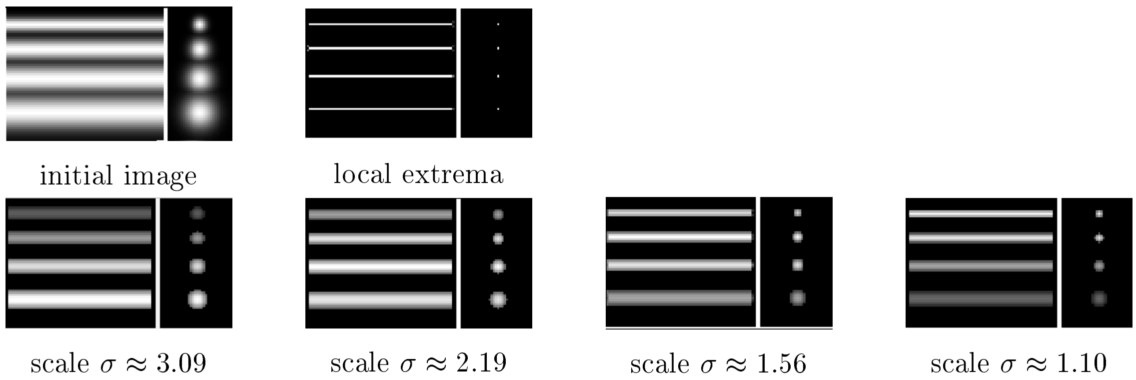


FIG. 12.2 – *Cylinder with circular Gaussian cross-section. Responses obtained for the optimal scales.*

Normalization The relationship between the vessel radius and the optimal scale is $t_{max} = h(\gamma,\theta)\sigma_0^2 = 0.5 s_0^2$ where s_0 is the radius of the vessel with Gaussian-like cross-section. The response at the optimal scale and at the vessel center should be zoom invariant and equal to $R^n_{t_{max}}$ times the intensity at the vessel center (see equation 11.6). The initial image of figure 12.2 contains four vessels with Gaussian blob cross-section and respective radii: 1.25, 1.75, 2.5, 3.5.

We apply the multiscale analysis on this image with 20 scales for vessels radii ranging from 1 to 4 voxels, the second row of table 12.1 presents the maximum intensity obtained at the center of each vessel. The difference between the obtained maximal response and the theoretical expected value 23.3 is stronger for small vessels and is probably due to the trilinear interpolation of the gradient vector during the response computation. This difference remains small, below 11%, which confirms the zoom invariant property of the normalization, and will allow an easy threshold of the local extrema image (figure 12.2).

Real vessel radius	1.25	1.75	2.5	3.5
Maximal reponse	20.8085	22.3763	22.7294	22.9052
Difference to the expected value	10.8667%	4.1510%	2.6385%	1.8855%
Estimated radius	1.55	1.79	2.58	3.46
Error in voxels	0.3	0.04	0.08	0.04

TAB. 12.1 – *Intensity obtained at the center of the vessels for a range of 10 scales, estimated sizes and error in the estimation. The theoretical expected maximal response is 23.3.*

Radius estimation Rows 3 and 5 of table 12.1 show radius estimation for the same image. Except for the vessel of size 1.25, the maximum response is obtained at the nearest scale associated to the size of the vessel. The error in size estimation is below 0.3 voxel and improves when the vessel size increases. This result shows that, due to discrete range of scales, we cannot hope to get an accurate subvoxel estimation of the size of small vessels, i.e. vessels of radius below 1.5 voxels.

12.1.2 A new cross-section model

These first tests set the problem of sensitivity to the cross-section model. In real images, there should not be high intensity variations inside the vessel. Two main reasons of intensity variation can be noise and partial volume effect. Concerning noise, the multiscale process that uses Gaussian kernel convolutions tends to reduce it, but depending on the acquisition modality, one can apply a pre-filtering technique like anisotropic diffusion. The partial volume effect disturbs the detection of small vessels and also reduces their intensity. In fact, big vessels can be considered as having a *bar-like* cross-section whereas small one have a *Gaussian-like* cross-section and a lower intensity caused by partial volume effect.

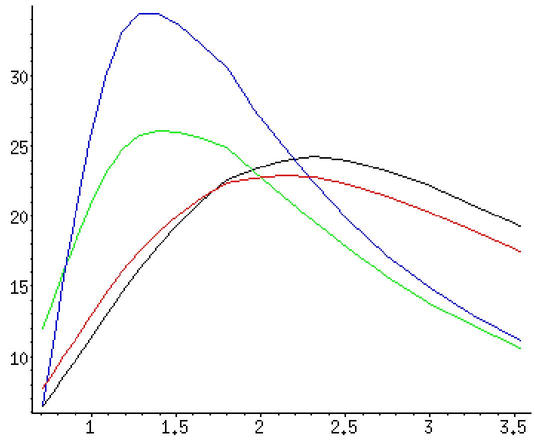


FIG. 12.3 – *Response profiles obtained for a Gaussian-like cross-section in red, for a bar-like cross-section in blue, for a bar-like cross-section convolved with a Gaussian $\sigma_p = 1$ in green, for a bar-like cross-section convolved with a Gaussian $\sigma_p = 3$ in black.*

Bar-like convolved cross-section The convolved bar-like cross-section model is defined in section 10.2.2.

Comparison of the response profiles Figure 12.3 shows response profiles for different cross-sections on a cylindrical circular vessel of radius 3. In red, the profile for a Gaussian-like cross-section, the same as in figure 12.1, and in blue the response profile for a bar-like cross-section. There are important variations between those two profiles, bar-like cross-sections have their maximum with a higher response value and at a lower scale. This result shows that our vessel size estimation can not be accurate without having a good model of the vessel cross-section. Figure 12.3 shows in green the profile response obtained for a bar-like cross-section of radius three and convolved with a Gaussian kernel of standard deviation 1, and in red the profile using a standard deviation equal to the vessel radius.

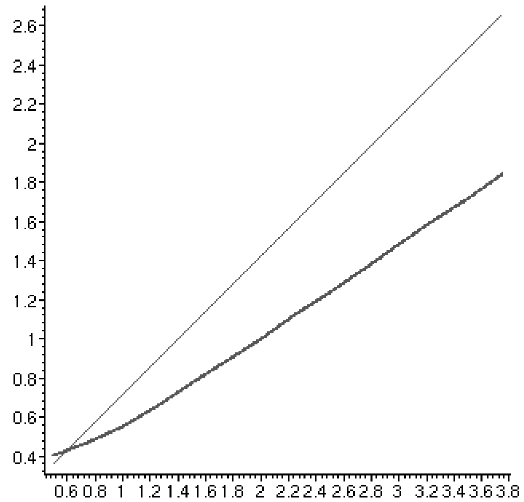


FIG. 12.4 – *Computation of the maximal scale $\sigma_{max} = \sqrt{t_{max}}$ as a function of the vessel radius. Comparison between the Gaussian cross-section model where $\sigma_{max} = \sqrt{0.5}\sigma_0$ and the bar-like model convolved with a Gaussian of standard deviation $\sigma_p = 0.5$, represented by the thick line.*

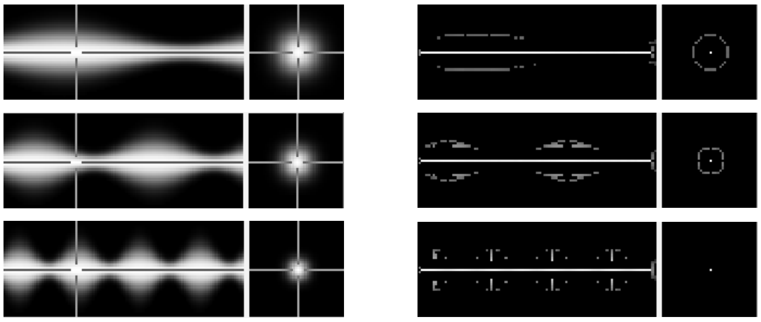
Radius estimation for the convolved bar-like model Using the program *Maple*, and the expressions of our response for the bar-like convolved model given by equation E.3 in appendix E.2, we computed the curve that represents the maximal scale $\sigma_{max} = \sqrt{t_{max}}$ as a function of the vessel radius. The result is represented in figure 12.4. Although the size estimation requires the use of more complex cross-section models, there is a increasing function s that links the maximal scale and the radius of a vessel. Simulation allows to estimate this function on a bar-like cross-section model convolved with a constant Gaussian. A vessel of a given radius is detected at a lower scale for a bar-like convolved model, thus, for a given maximal scale, the radius of the detected vessel is bigger for a bar-like convolved model than for a Gaussian-like model. Using this simulation, a better radius estimation can be achieved, and this result will be used in the next section on a phantom image.

12.1.3 One vessel with varying width

Figure 12.5 and figure 12.6 show experiments made on vessels with varying width. The vessel size of the images is a periodic sinusoid and the radius varies from 2 to 4 voxels with a period of $zsize/n$ voxels $n \in$ [1,2,4] and $zsize = 100$, along z axis. The equation of the vessel radius for $n = 1,2,4$ is:

$$R(z) = 4 + 2\sin\left(2\pi n \frac{z}{zsize}\right)$$

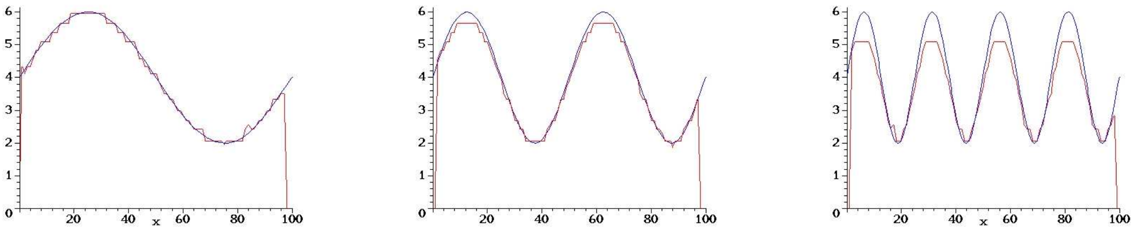
The local extrema in figure 12.5 show that the vessel center has been well detected and also that some extrema were detected near the vessel frontiers when the radius goes though a maximum. In this case, there are two negative eigenvalues in the plane tangent to the vessel contour, and local extrema may occur. Nevertheless, the response obtained at the vessel center is higher and the *false*



synthetic images local extrema

FIG. 12.5 – *Tests on a Gaussian cross-section vessel with varying radius.*

responses can be removed either by thresholding of the image of local extrema, or by removal of small connected components.



n=1 n=2 n=4

FIG. 12.6 – *Comparison of the real and the detected radii along z axis.*

Figure 12.6 shows the estimated radius (in red) along z axis compared to the real radius profile of the vessel (in blue). For smooth variations, on the left, the size is well estimated, but for fast variations of radius, on the right, in regions of maximum radius the size is under-estimated due to the Gaussian convolution at high scales that decreases the intensity near those frontiers, faster than in the cylindrical case.

12.1.4 Curved vessels

For a single torus with a Gaussian cross-section, the local extrema gives high response at the torus center where the intensity is higher than 18.00 and some response near the outside frontier of the torus. This second type of response is explained by the negative value of the third eigenvalue that becomes higher in absolute value than the second one (see section 10.4.2). However, it has an intensity lower than 9.0 and can easily be threshold. The bottom row of Figure 12.7 shows the threshold extrema superimposed on the initial image. The location of the vessel center doesn't have a subvoxel precision, but the voxels found for the vessel center contain the real vessel center independently of the curvature.

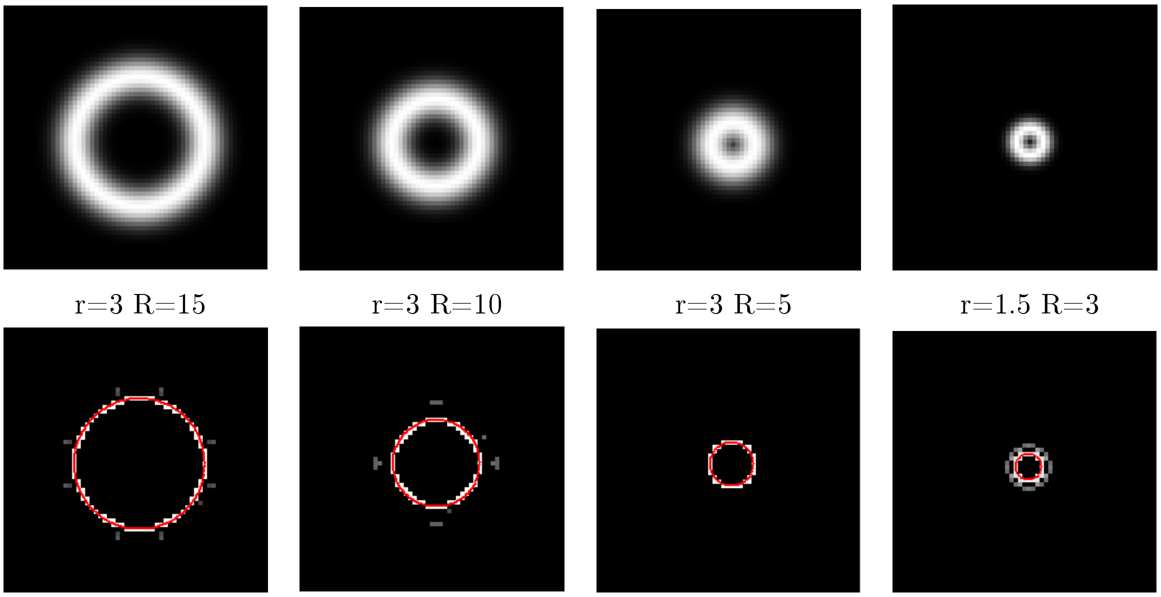
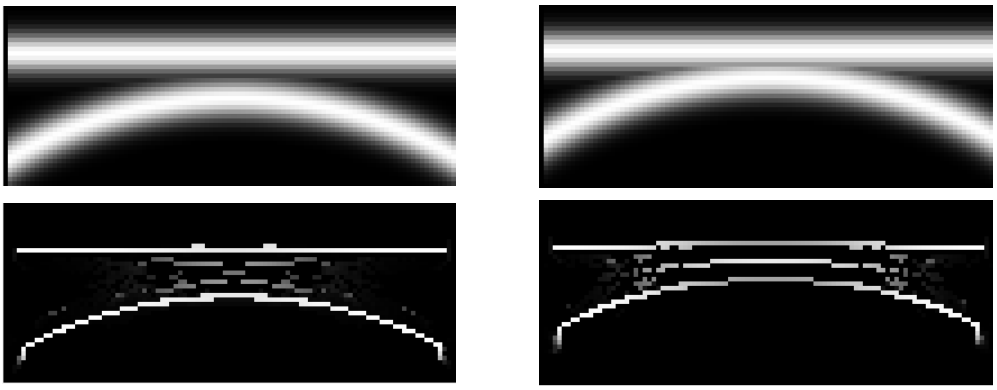


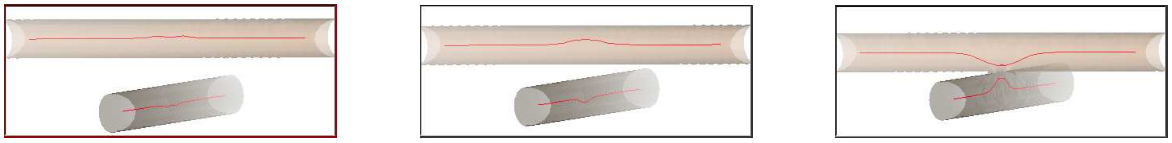
FIG. 12.7 – *Detection of torus with Gaussian cross-section and different curvatures. At the top, MIPs of the initial images. At the bottom, superimposition of the real torus center (in red) on the local maxima image.*

12.1.5 Tangent vessels



$d = 3$ voxels $d = 0$

FIG. 12.8 – *Tangent vessels, tangency parallel to the vessel axis ($\alpha = 0$).*



$d = 4$ voxels $d = 2$ voxels $d = 0$

FIG. 12.9 – *Tangent vessels, tangency orthogonal to the vessel axis ($\alpha = \pi/2$).*

We say that two vessels are tangent when their frontiers are enough close to disturb the estimation of the gradient. Generally, the tangency concerns two vessels but in some cases more vessels can be involved, or a vessel can be tangent to a non-vessel structure. We restrict the study to the case of two vessels. The tangency can be characterized by three parameters: 1) the minimal distance d between the two vessels frontiers compared to the size of the vessels; 2) the ratio between the two vessels radii; 3) the angle $\alpha \in [0,\pi/2]$ between the two vessels axis at the tangent locus. In our experiments, we set the ratio of the two vessels to 1 (their radius is three voxels) and tested the cases $\alpha = 0$ in figure 12.8 and $\alpha = \pi/2$ in figure 12.9. Figure 12.8 shows results on the first case $\alpha = 0$ where the distance d is equal to zero on the right and to the vessel radius i.e. three voxels on the left. When $d = 0$, a third line is detected between the two vessels and at a higher scale (bottom right), while the continuities of the two vessels centerlines are preserved. As the detected lines are not connected, it is possible to remove the "wrong" line by removing small connected components, but not by thresholding the local extrema image. On the bottom left image, the distance between the two vessels is equal to their radius and a thresholding of the local extrema image is sufficient for removing the "wrong" detected local extrema.

Figure 12.9 shows results for $\alpha = \pi/2$, where the distance d decreases from 4 voxels to 0. In this case, there is no third line created by the tangency, but the disturbance on the centerline position is more important. This important displacement of the vessel center for a vessel denoted $\vec{\mathbf{v}}_1$ at the right of figure 12.9 can be explain by the low curvature of the tangent surface of the other vessel $\vec{\mathbf{v}}_2$ in the direction orthogonal to $\vec{\mathbf{v}}_1$. This low curvature, equal to zero here, disturb the medialness response which integrate boundariness along a circle orthogonal to $\vec{\mathbf{v}}_1$ axis. In the same way, when a small vessel is tangent to a "bigger" one, we can expect disturbance in the small vessel axis detection due to the low curvature of the big vessel, even when vessels are parallel i.e. for low values of α. As a conclusion, when the boundaries of tangent vessels are not in contact, one can expect to keep the continuity of the vessels centers. Nevertheless, tangency of vessels have the following negative effects:

- it decreases the response function and makes the thresholding more difficult,
- it increases the estimated size of the vessel near the tangent area,
- it changes the location of centerlines.

One way to improve the detection of tangent vessels can be to make an iterative process. The information of the detected vessels can be used to localize the region of tangency and to discard the information of gradient in those regions for the next iteration.

12.1.6 Junctions

A junction in a vessels network is a branching of vessel, where one vessel divides into several branches, in general two. We restrict this experimental study to the case of two branches. Although our models of vessels don't include any vessels junction, some of them may be properly detected. Figure 12.10 shows experiments made on three synthetic junction images. The centerlines detection, obtained from the extraction of local maxima of the multiscale response, does not ensure the

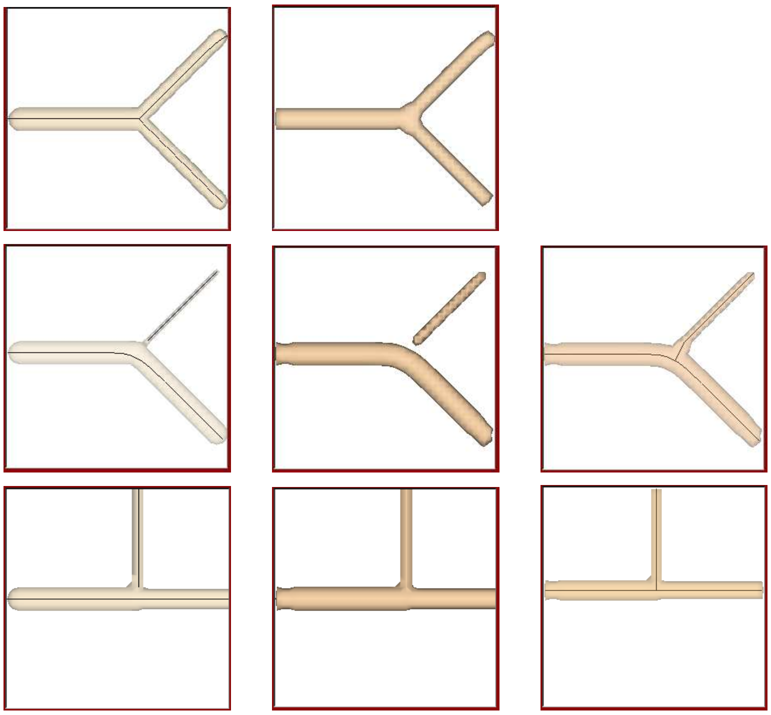
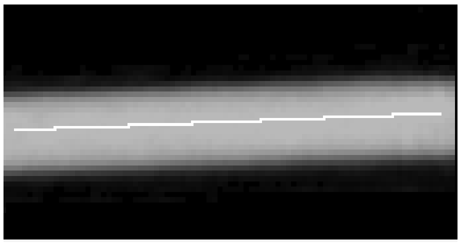


FIG. 12.10 – *Centerlines detection and reconstruction on three synthetic junction images. Left, initial image and the detected centerlines. Middle, reconstruction before junction connection. Right, centerlines and reconstruction after junction connection.*

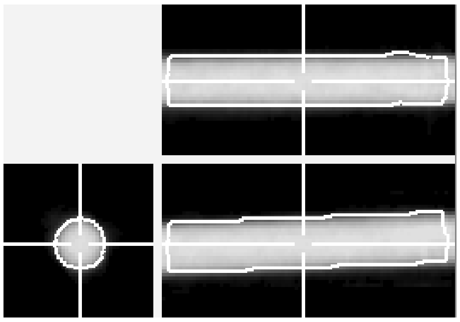
continuity of the junction detection. In the top image, the main vessel divides into two branches of the same size and the continuity is preserved, but in the middle and in the bottom image, the two branches don't have the same size and the junction continuity is not preserved by the centerlines. This discontinuity can still be present after the reconstruction (middle image). Disconnection disturbs the interpretation of the reconstruction and the characterization of the vascular tree topology. To solve this problem, the junctions can be connected using the centerlines and the radii information. Assuming that the bigger vessel keeps its continuity, a junction is restored when the distance between extremity E of a vessel v_1 and the axis of second vessel v_2 is lower than the radius of v_2:

$$d(E,v_2) < r(v_2) * \alpha + \beta \tag{12.1}$$

where α stands for the error in radius estimation and β is the sum of the error in the location of v_2 axis and in the location of the extremity E of v_1. To perform the junction connection, each extremity E of a vessel v_1 is projected on every segment of every vessel different from v_1 and located in the vicinity of E, and d is the distance to the nearest projected point P. We set $\alpha = 1.2$ and $\beta = 2$ voxels. Figure 12.10 shows the restored centerlines and the reconstruction from those centerlines for two junction images.



obtained centerline.



estimated contours of the vessel.

FIG. 12.11 – *Results on a selected sub-volume of the phantom image centered on the diameter E (see figure G.1).*

12.2 Image of a phantom

12.2.1 Characteristics of the phantom image

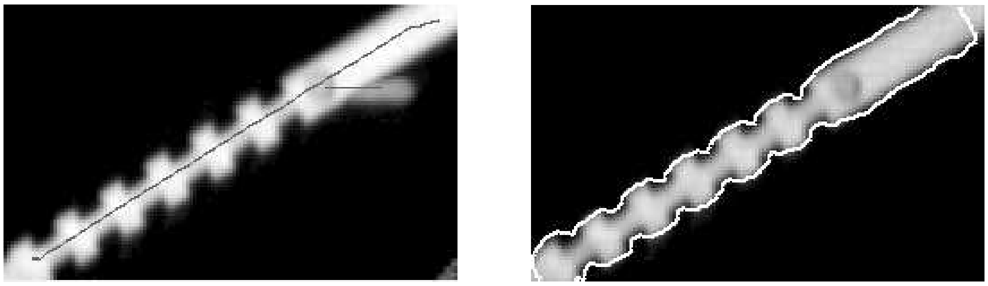
Figure G.1 in appendix G shows two Maximum Intensity Projections of this image compared with its map containing real sizes of some structures. This phantom image allows us to estimate the error made in the estimation of the vessel size. The Gaussian blob is not a good model for the section of the vessel and using this model leads to under-estimation of the size of structures. Thus, in the following experiments, we use the relation between the maximal scale and the radius of the structure for the bar-like convolved cross-section model presented in paragraph 12.1.2. This relation is a function represented in figure 12.4. The standard deviation of the Gaussian convolution is set to $\sigma_p = 1.5$ voxels.

12.2.2 Extraction of tubular structures and size estimation

Cylinder LW The size of LW is 2 mm, i.e. 3.744 voxels. From our multiscale analysis with 20 scales for radii ranging from 2 to 6 voxels, we estimated the radius at 3.778 voxels. The corresponding estimated diameter is 2.018 mm.

Cylinder E The cylinder named E in figure G.1 has a size of 4mm. From our multiscale analysis with 20 scales for radii ranging from 6 to 9 voxels, we estimated the radius at 7.270 or 7.427 voxels along the detected centerline. In fact, the responses for those two successive scales are very close. The corresponding estimated diameters in are 3.884 mm and 3.968 mm.

Cylinders LD **and** SD Figure 12.12 shows the results on the structure with varying width: LD=4 mm and SD=2 mm. The multiscale analysis was run on 20 scales ranging from sizes of 3 voxels to 9 voxels. The maximum radius found for LD is 3.6 mm and the minimum radius found for SD is 2.14 mm.



sub-image extracted $127 \times 77 \times 60$ contours of the reconstructed image

FIG. 12.12 – *Results on a sub-volume of the phantom image for the diameter SD and LD.*

12.3 Real images

12.3.1 Brain vessels from X-ray images

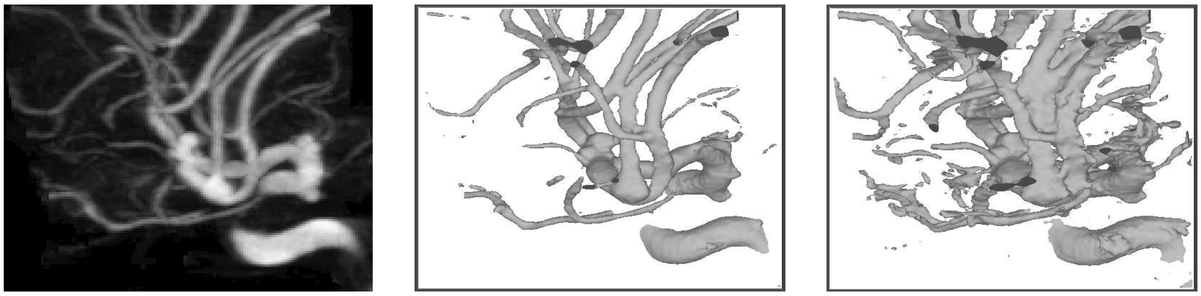


image 1 threshold=871 threshold=500

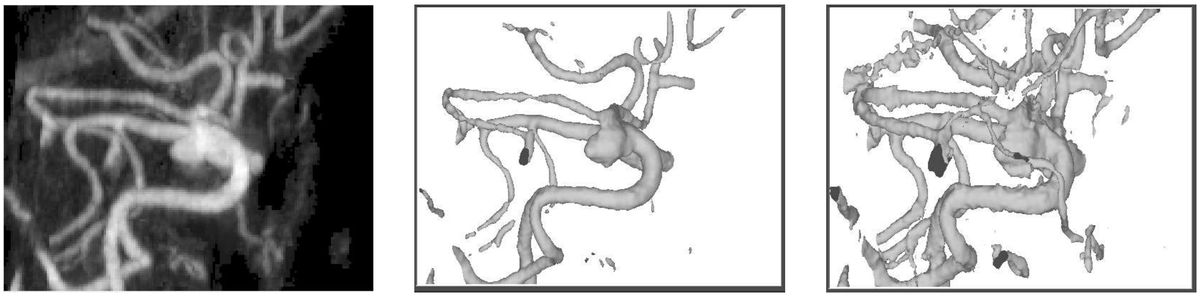


image 2 threshold=1600 threshold=1000

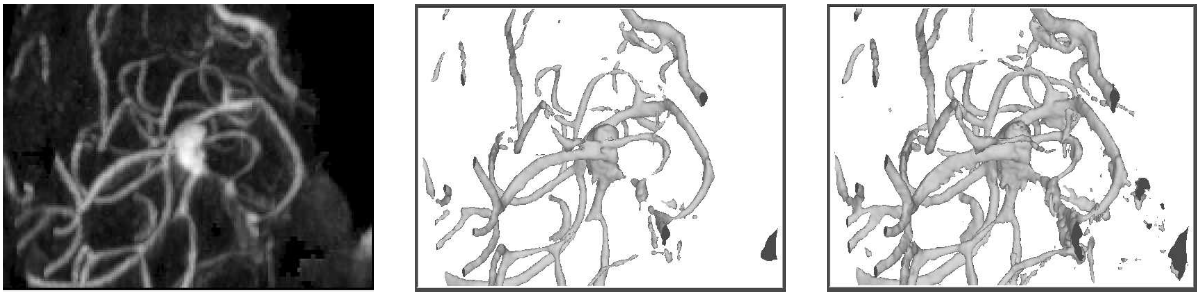


image 3 threshold=976 threshold=708

FIG. 12.13 – *MIP view and isosurfaces of three X-ray 3D images.*

Image acquisition Our algorithm was tested on a set of images produced by General Electric Medical Systems, Buc, France. They are obtained by 3D reconstruction of the vessels from 2D X-ray substracted angiographies. Details of the reconstruction scheme can be found in [Payot et al., 1996]. For other alternatives to this reconstruction scheme, we refer for example to [Bloch et al., 1995]. Compared to the other 3D acquisition modalities which are Magnetic Resonance Angiography and Scanner Angiography, this 3D reconstruction gives a high isotropic resolution over the whole reconstructed volume. However, it requires a good opacity of the vascular network obtained with an intra-arterial injection. The left images in figure 12.13 are MIP views of a typical sub-volume centered on an aneurysm. They contain different artefacts: noise, partial volume effect, consequences of the patient motion between different acquisitions and 3D reconstruction artefacts which lead to a non-homogeneity of the intensity of the vessels for different sizes of the vessel. The two right columns of figure 12.13 show isosurfaces of the images, where small vessels are only visible with a low threshold (surface holes in black are due to the image boundaries).

Choice of parameters We tested our algorithm on ten images $128 \times 128 \times 128$ of varying complexity. Because small vessels have a lower intensity than bigger ones, we used a parameter γ lower than 1 for the normalization. Decreasing the value of γ has the effect of enhancing small vessels compared to big ones, and helps to compensate for intensity variations. We used the value 0.75 for γ. The minimum and maximum scales are chosen according to the radii of the thinnest and the thickest vessels in the initial image. The algorithm was run with ten scales that detect vessels of radii ranging from 0.4 to 6 voxels. The computation time for obtaining the local maxima image is approximately 15 minutes on a Dec Alpha station 500, running at 400 MHz. Then, after manual thresholding, the centerlines extraction takes a few seconds.

Results Results on the three images of figure 12.13 are shown in figure 12.14. On the left, the detected centerlines are represented with an isosurface of the initial image and using transparency. On the right, a surface of the reconstructed network is represented, the reconstruction is based on the previous centerlines and the estimated radii. The following point are emphasized: *First image*, a separate detection of two tangent vessels. *Second image*, on the left, a continuous detection of a vessel with high curvature; on the right, the detection of a vessel in the vicinity of the aneurysm, the location of this vessel was difficult to understand in both MIPs and Isosurfaces. *Third image*, the detection of a vessel with low and decreasing intensity and several well-detected junctions.

12.3.2 Brain MRA

Figure 12.15 shows a brain MRA [1] $512 \times 512 \times 60$ with voxel dimensions $0.47 \times 0.47 \times 0.7$ mm^3. From this image we extracted a sub-volume $136 \times 127 \times 60$ shown at the top left of figure 12.16. Compared to previous X-ray images, vessel detection is more difficult because the intensity inside the vessels is less homogeneous, the voxels are not isotropic and noise is more important. A solution

1. We thank Marc Thiriet from INRIA Rocquencourt for providing the image.

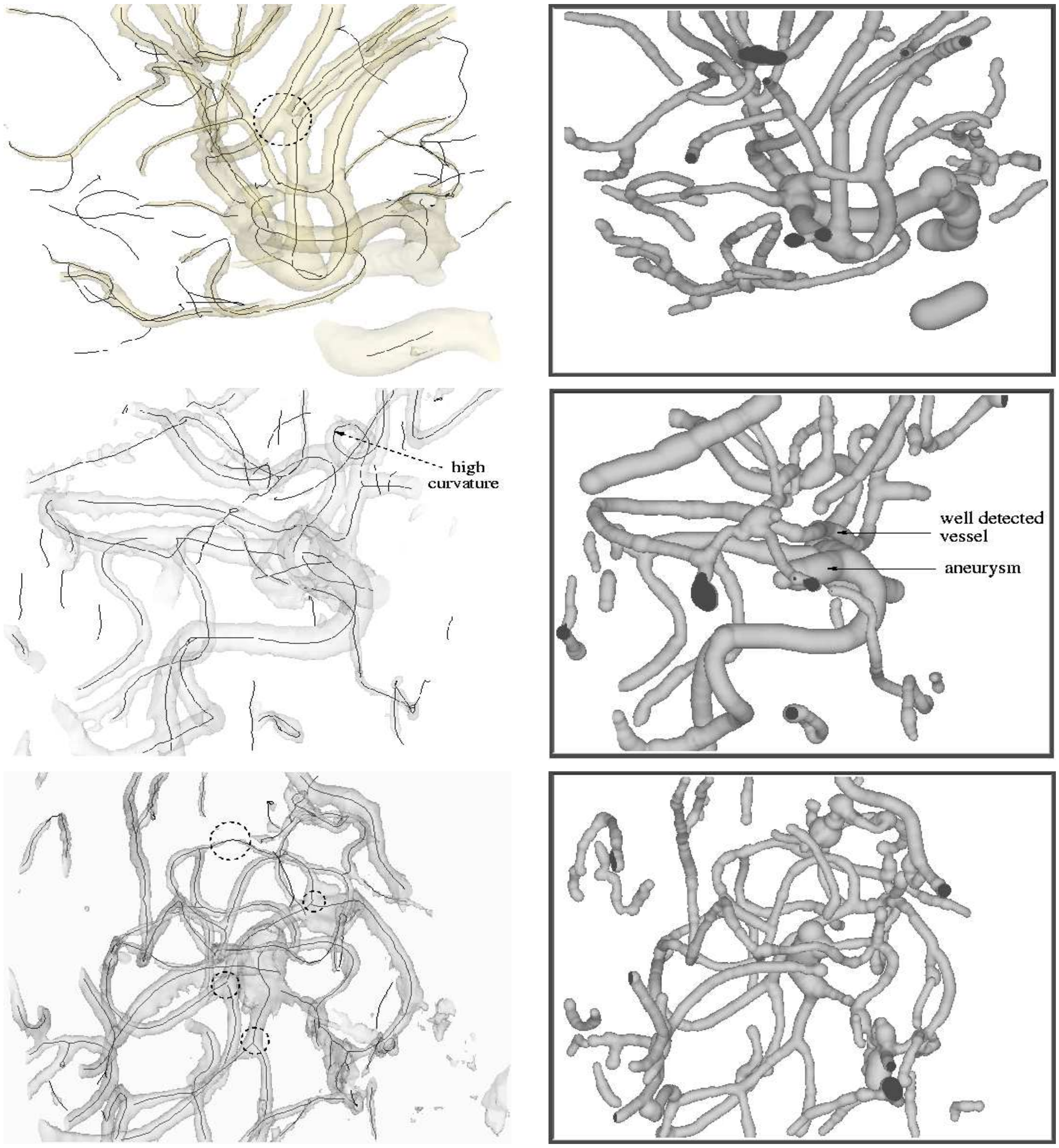


FIG. 12.14 – *Results on the images represented in figure 12.13. Left, detected centerlines superimposed on an isosurface of the initial image. Right, reconstruction of the vessels network from centerlines and radii estimation.*

Fig. 12.15 – *Initial MRA Image.*

to reduce noise and inhomogeneous intensity inside vessels is to apply a pre-filtering method like anisotropic diffusion. For anisotropic diffusion dedicated to 3D vessels, we refer to chapter 7.

Top right image of figure 12.16 shows the image after anisotropic diffusion where a threshold on the gradient norm is used to control the diffusion.

To deal with non-isotropic voxels, the program adapts the sizes of the Gaussian kernel convolution along x, y and z axes. Voxel dimensions are also used to estimate first and second derivatives in each direction and to convert spatial coordinates into image coordinates when computing the response function.

The bottom left image represents the local extrema extracted from the filtered image and the bottom right image represents a surface rendering of the vessels reconstruction.

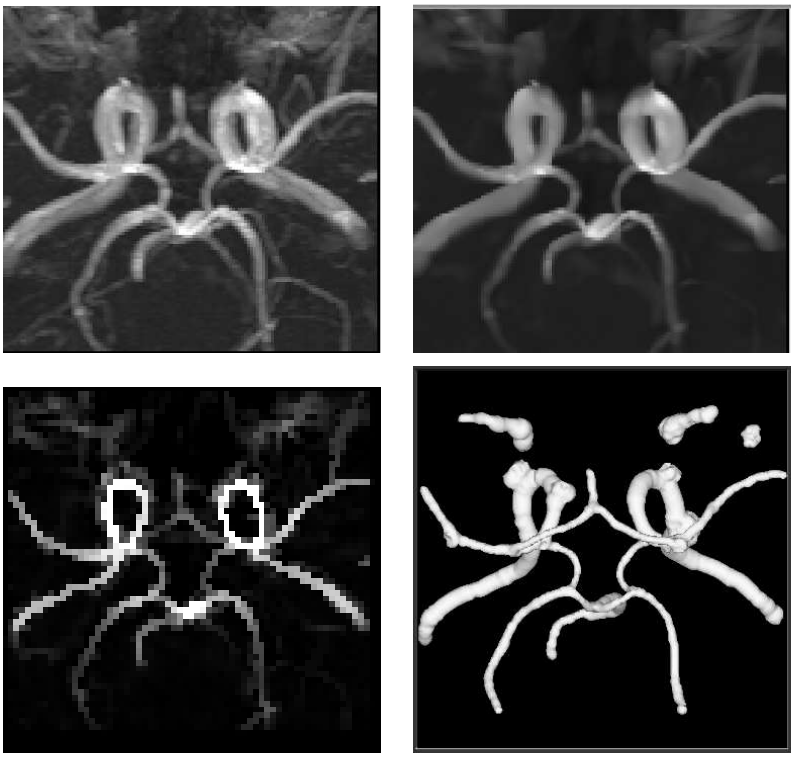


Fig. 12.16 – *MIP of a sub-image on the top left and the resulting image after anisotropic filtering on the top right. Bottom left, image of the local extrema; and bottom right, vessels reconstruction.*

Conclusion and discussion

We presented a multiscale approach for tubular structures detection in 3D images. Our approach uses gradient information at a given distance of the vessels centers. Based on different models of vessels, we expressed eigenvectors and eigenvalues of the Hessian matrix and showed their sensitivity to elliptical cross-section, to vessel curvature and to the distance of the point to the real vessel center. Using a cylindrical circular model with Gaussian blob cross-section, we found the optimal distance for computing gradient information at a given scale, and we also expressed the vessel radius as a function of the maximal scale.

Then, we proposed a method for extracting centerlines and reconstructing the whole vessels network. Experiments on synthetic images show the limits and the robustness of the algorithm according to radius variations, to curvature, and to junctions for vessels with Gaussian cross-sections. A bar-like convolved cross-section model was also introduced and we derived a new size estimation for this model with formal calculus simulations. Robustness of the size estimation was tested on a phantom image and results were presented on real X-ray and MRA images of brain vessels.

Several conclusions and research directions follow from this work. The first point is the importance of extracting the vessels centerlines, and ensuring their continuity to understand the topology of the vessels network. For this purpose, the variable intensity at the center of vessels of different sizes is still an important issue and has to be taken into account in the vessel model. This can lead for example to a specific response normalization. A second important issue is the discrimination between vessel and non-vessel structures. This discrimination is present in our method at the pre-selection stage based on Hessian matrix eigenvalues and also in the response function that enhances vessel centers. However, another discrimination of the local maxima may be necessary when the image contains non-vessel structures with high gradients or to remove wrong extrema obtained near the vessels frontiers. Finally, once a good detection of the centerlines is obtained, a second and more precise detection of the vessels contours may be done based on this information and without assuming a circular cross-section profile.

Quatrième partie

Applications et détection tridimensionnelle de contours

Chapitre 13

Quantification 3D de sténoses dans des reconstructions obtenues par rayons X

La variation du diamètre des vaisseaux est un élément clé dans le traitement des sténoses. Cette analyse est pour l'instant menée à partir d'acquisitions projectives 2D standard. Nous proposons une méthode automatique de quantification de la section des vaisseaux dans des reconstructions 3D vasculaires obtenues par rayons X. Dans un premier temps, une surface fermée et continue, correspondant au contour du vaisseau est calculée et sélectionnée à partir de la ligne centrale. Ensuite, l'aire des sections le long de l'axe est obtenue par intersection du contour avec le plan de chaque section. Un modèle des vaisseaux permet de corriger l'aire estimée. Une étude sur des images de fantômes donne une précision des rayons inférieure à 0.5 voxel. Des résultats sont aussi présentés sur une image réelle de vaisseaux contenant une sténose.

Variation in the diameter of vessels is a key information for treatment of stenosis. This information is usually obtained from standard 2D projective acquisitions. We propose an automatic method for the quantification of vessels sections in 3D vascular reconstructions from X-ray images. First, a closed continuous surface is extracted. This surface represents the vessels contours selected with a given centerline. Then, the area of the sections along the central axis is obtained by intersection of the contour and the plane of each section. A model of the vessels allows to correct the first estimation. Tests on phantom images give a precision of the vessels radius below 0.5 voxel. Results are also presented on real vessels containing stenosis.

13.1 Introduction

La variation du diamètre des vaisseaux entre les sections pathologiques et les sections normales est un élément clé pour le choix de la solution thérapeutique. En effet, selon le degré de pathologie, la solution peut varier entre aucun traitement pour les faibles pathologies et un traitement endo-vasculaire (angio-plastie ou placement de stents) à chirurgical pour les pathologies importantes. Dans l'état de l'art actuel, cette analyse est menée à partir d'acquisitions projectives standard [Reiber et van der Wall, 1996]. Dans la mesure où l'image correspond à une projection, il est difficile d'avoir une estimation de la taille réelle des vaisseaux et de la variation de cette taille. L'estimation du degré de pathologie est alors fortement dépendante du point de vue [Sato et al., 1998a]. L'utilisation de reconstruction 3D [Anxionnat et al., 1998] permet de s'affranchir de ces difficultés.

Nous décrivons une méthode permettant de calculer **automatiquement** l'aire des sections le long de l'axe d'un vaisseau.

Dans un premier temps, une détection des lignes centrales des vaisseaux est effectuée, à l'aide d'un algorithme multi-échelle développé et publié dans des travaux antérieurs [Krissian et al., 1998b; Krissian et al., 1999b], et décrit dans la partie III. La ligne centrale d'un vaisseau est ensuite sélectionnée pour la quantification des sections.

Deuxièmement, une détection 3D de tous les contours de l'image est effectuée, cette détection utilise les isosurfaces de valeur zéro dans l'image des dérivées secondes de l'intensité dans la direction du gradient. Sous l'hypothèse d'interpolation tri-linéaire des voxels [Lorensen et Cline, 1987], les surfaces obtenues sont continues, et fermées ou touchent le bord de l'image. Le faible niveau de bruit dans les images traitées (images reconstruites tridimensionnelles) permet d'effectuer une sélection automatique de la surface contenant l'axe du vaisseau et qui correspond aux contours du réseau vasculaire de l'image.

Troisièmement, un calcul de l'aire des sections du vaisseau le long de l'axe, donné par la ligne centrale, est effectué. Cette aire correspond à l'intérieur de l'intersection entre la surface du contour et le plan orthogonal à la ligne, pour une abscisse curviligne donnée.

Finalement, l'estimation de l'aire des sections est améliorée à l'aide d'un calcul des contours à différentes échelles et en se basant sur un modèle théorique de la section des vaisseaux.

Une estimation de la **précision** des résultats est effectuée en se basant à la fois sur des images synthétiques et sur des images de fantômes. Notre méthode a été testée sur une dizaines d'images dont huit acquisitions sur des carotides et deux acquisitions sur des vaisseaux de l'abdomen.

Nous présenterons le calcul de contours et de l'aire des sections ; l'amélioration de la précision à l'aide d'un modèle de vaisseau ; et finalement les résultats sur les images synthétiques, sur les fantômes et sur les images réelles.

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'une collaboration entre l'INRIA et General Electric Medical Systems, Buc, France, au cours d'un "stage industriel" d'un durée de trois mois [Krissian et al., 2000].

13.2 Détection du contour

Un calcul des isosurfaces à zéro de l'image $I_{\xi\xi}$ des dérivées secondes de l'intensité dans la direction du gradient permet de détecter les contours des vaisseaux. Les dérivées directionnelles sont définies page 87, définition 16. Les régions connexes de même signe sont extraites dans l'image $I_{\xi\xi}$ et permettent de sélectionner le contour qui contient la ligne centrale choisie. L'hypothèse de continuité tri-linéaire permet d'assurer la continuité des isosurfaces.
Nous présentons dans un premier temps le calcul et l'interprétation de l'image $I_{\xi\xi}$. Ensuite, nous définissons certaines propriétés des isosurfaces à zéro de cette image. Le parcours de régions connexes de même signe et le choix du contour sont traités dans une dernière partie.

13.2.1 Calcul de l'image $I_{\xi\xi}$

Dans un premier temps, nous calculons sur toute l'image la fonction $I_{\xi\xi}$, où $\xi = \frac{\nabla I}{|\nabla I|}$ est le vecteur gradient normalisé, calculé par une convolution avec la dérivée du noyau gaussien d'écart-type σ fixé. La valeur de σ dépend du niveau de bruit dans l'image mais aussi de la taille des structures à détecter. L'image obtenue possède la propriété de changer de signe lors d'un passage par un maximum de la norme du gradient. Ce changement de signe permet d'interpoler les surfaces d'intensité nulle en faisant une hypothèse de continuité à l'intérieur des cubes formés par 8 voxels voisins. $I_{\xi\xi}$ peut s'exprimer en fonction de la matrice hessienne de l'image par l'équation (13.1),

$$I_{\xi\xi} \quad = \quad \xi^t H \xi \tag{13.1}$$

mais aussi comme le produit scalaire du gradient de la norme du gradient avec la direction du gradient (voir la propriété 7, page 88) :

$$I_{\xi\xi} \quad = \quad \nabla(\mid \nabla I \mid) . \frac{\nabla I}{\mid \nabla I \mid} \tag{13.2}$$

Ces deux formes ont donc la même expression en fonction des dérivées de l'image par rapport aux axes du repère, donnée par l'équation (13.3).

$$\begin{aligned} & I_x * (I_{xx} I_x + I_{yx} I_y + I_{zx} I_z) \quad + \\ & I_y * (I_{xy} I_x + I_{yy} I_y + I_{zy} I_z) \quad + \\ & I_z * (I_{xz} I_x + I_{yz} I_y + I_{zz} I_z) \end{aligned} \tag{13.3}$$

Les structures blanches sur fond noir sont négatives au voisinage du contour (Fig. 13.1). Pour assurer un passage par un maximum de la norme du gradient, il faut vérifier aussi la contrainte $I_{\xi\xi\xi} < 0$, ce qui requiert le calcul de dérivées d'ordre 3 de l'image initiale.

13.2.2 Propriétés des passages par zéro

Dans cette partie, nous noterons $\Omega \in \mathbb{R}^3$ l'ensemble de définition de l'image initiale.
Nous définissons d'une part l'ensemble $\mathcal{E}$ des points vérifiant l'équation $I_{\xi\xi} = 0$:

$$\mathcal{E} = \{M \in \Omega, I_{\xi\xi}(M) = 0\} \tag{13.4}$$

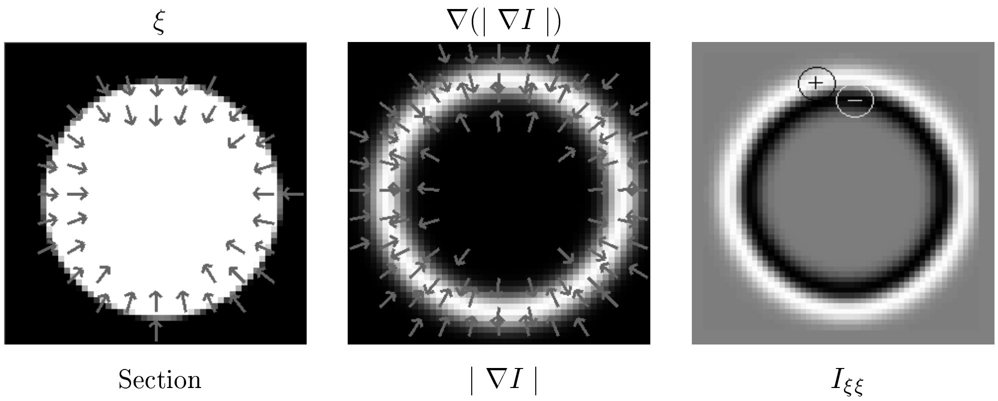


FIG. 13.1 – *Interprétation de la définition du contour comme le passage par zéro de la fonction $I_{\xi\xi}$. Pour une structure blanche sur fond noir, l'intérieur du contour est négatif, $I_{\xi\xi} < 0$.*

et d'autre part, l'ensemble $\mathcal{S} = (s_i)_{i \in [1,n]}$ des composantes connexes de $\mathcal{E}$. Si l'interpolation tri-linéaire ne crée pas de volume nul (par exemple dans le cas où tous les sommets d'un voxel sont nuls), alors, sous l'hypothèse de continuité tri-linéaire, les composantes connexes s_i sont des surfaces continues et fermées ou qui touchent le bord de l'image. Cette hypothèse de non existance de volume nul peut être assurée en fixant un seuil de $0 + \varepsilon$ au lieu du seuil 0, et tel qu'aucun sommet de voxel n'ait une intensité exactement égale à $0{+}\varepsilon$. Chaque surface $s \in \mathcal{S}$ partitionne l'ensemble de définition de l'image en deux sous-ensembles : un **intérieur** noté $\hat{s}$ et un **extérieur** noté $\check{s}$. L'élément extérieur $\check{s}$ sera celui qui contient un point de l'image considéré comme extérieur aux structures anatomiques recherchées. Dans le cas des images de vaisseaux, nous sélectionnons automatiquement le point de plus faible intensité de l'image noté $\bar{x}_{ext}$. La définition d'intérieur induit une relation d'**inclusion** entre les surfaces :

$$\forall s_1, s_2 \in \mathcal{S}, \;\; s_1 \subset s_2 \Longleftrightarrow \hat{s_1} \subset \hat{s_2}$$

Le **signe** d'une surface $s \in \mathcal{S}$ est défini comme le signe de l'image $I_{\xi\xi}$ dans la partie intérieure d'un voisinage $\mathcal{V}(s)$ de cette surface, i.e. le signe de $I_{\xi\xi}$ dans $\hat{s} \cap \mathcal{V}(s)$.

De plus, une ligne centrale de vaisseau a été choisie parmi les lignes détectées [Krissian et al., 1998a; Krissian et al., 1999b]. Notons l cette ligne. Nous associons à chaque surface $s \in \mathcal{S}$ le **pourcentage de la ligne centrale** l qui appartient à son intérieur $\hat{s}$. Ce pourcentage est calculé en créant une image binaire de la ligne centrale, et en calculant le pourcentage de points de la ligne entourés par chaque surface.

A l'aide de ces propriétés, un critère de **sélection** du contour des vaisseaux est défini. Nous choisissons la plus petite surface (au sens de l'inclusion) de signe négatif, et contenant le plus grand pourcentage de la ligne centrale (en principe 100%). Ce critère s'est avéré robuste sur les dix images réelles testées (section 13.6).

13.2.3 Mise en œuvre

D'un point de vue algorithmique, l'image $I_{\xi\xi}$ est partitionnée en régions connexes de même signe $(r_i)_{i\in[1,k]}$. On peut définir une bijection R entre ces régions de l'image et les surfaces à zéro. Pour une surface s, la région associée est l'intérieur de s moins l'intérieur de toutes les surfaces strictement incluses dans s :

$$\forall s \in \mathcal{S}, \;\; R(s) = \hat{s} - \bigcup_{s_i \subset s} \hat{s}_i.$$

Réciproquement, pour une région connexe maximale de signe constant r la surface associée est la plus petite surface dont l'intérieur contient r. Ainsi, toutes les **propriétés** des surfaces définies en 13.2.2 sont définies de manière analogue pour les régions connexes de signe constant.
Un **premier parcours** de l'image permet de propager les régions connexes de même signe. Cette propagation se fait sous l'hypothèse de continuité tri-linéaire de l'image à l'intérieur d'un cube formé par huit voxels voisins. L'algorithme classique des "Marching Cubes" [Lorensen et Cline, 1987] utilise cette hypothèse pour l'extraction d'isosurface. La principale difficulté de cette hypothèse est de lever les ambiguïtés pour assurer une bonne topologie des surfaces. Dans [Van Gelder et Wilhelms, 1994], les auteurs proposent d'utiliser une heuristique basée sur l'information du gradient en chaque voxel. Nous nous contentons ici d'assurer une cohérence de la surface avec l'hypothèse d'interpolation tri-linéaire.
Pour cela, nous rappelons la notion de **k-adjacence** entre 2 voxels : deux voxels sont dits *k-adjacents* (resp. strictement k-adjacents) si ils diffèrent d'au plus (resp. exactement) k coordonnées, et diffèrent d'au plus d'une unité dans chaque coordonnée. Nous considérons les cubes formés par 8 voxels voisins. Ainsi, dans une image tridimensionnelle, deux sommets (ou voxels) sont :

- 1-*adjacents* s'ils sont connectés par une arête,
- 2-*adjacents* s'ils ont en commun une même face,
- 3-*adjacents* s'ils ont en commun le même cube.

La **propagation** d'une région r se fait de manière itérative, à partir de tout voxel $v \in r$ non déjà propagé :

- pour tout voxel v' 1-adjacent à v, si signe(v') = signe(v) alors v' appartient à r,
- pour tout voxel v' strictement 2-adjacent à v, si on est dans un cas ambigu (figure 13.2), la levée de l'ambiguïté se décide en fonction du signe de la fonction à l'intersection des asymptotes de l'hyperbole $f(x,y) = 0$. Nous donnons dans l'annexe F l'expression de la fonction d'interpolation f(x,y).
- si v' est strictement 3-adjacent à v, v et v' étant de même signe, pour certaines configurations du cube, savoir si v et v' sont connectés requiert le calcul de l'intensité interpolée au point selle de la fonction d'interpolation. L'énumération des cas d'ambiguïté et la position du point selle sont donnés dans [Natarajan, 1994]. Par exemple, considérons le cas de la figure 13.3 représentant un cube de 8 voxels dont les sommets 1,2,5,7 et 8 sont négatifs et les sommets 3,4 et 6 sont positifs. La connaissance de la topologie des faces ne permet pas de savoir si le

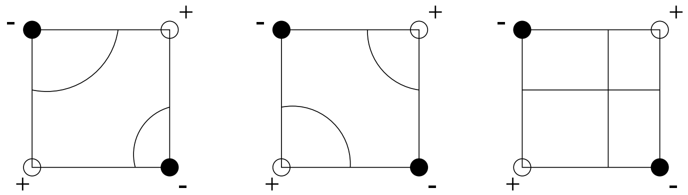
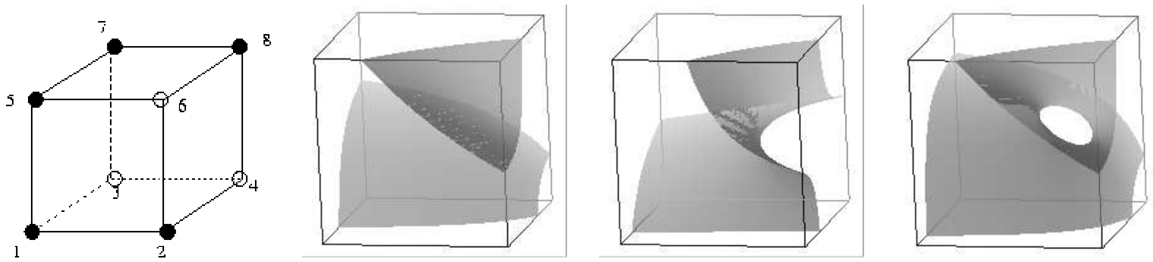


FIG. 13.2 – *Cas d'ambiguïté sur une face.*

sommet 6 est connecté aux sommets 3 et 4 : les trois cas de figure possibles sont représentés par les figures 13.3(b), 13.3(c), 13.3(d). Dans le cas de la figure 13.3(d), il existe un "tube" à l'intérieur du cube qui connecte le sommet 6 aux sommets 3 et 4.



(a) (b) (c) (d)

FIG. 13.3 – *Cas d'ambiguïté dans un cube.*

Un **deuxième parcours**, partant du point extérieur $\bar{x}_{ext}$ associe à chaque région la région qui le contient, ainsi que le nombre de points de la ligne centrale contenus dans cette région. Ces informations permettent de choisir la surface associée au contour, en utilisant les critères de sélection définis à la fin du paragraphe 13.2.2.

13.3 Calcul de l'aire

Une fois choisie la région r_0 dont la surface associée s_0 correspond au contour des vaisseaux, une **image** I_0 ne contenant que s_0 comme isosurface à zéro est créée en fixant à une valeur négative toutes les régions incluses dans r_0 et à une valeur positive toutes les régions contenant r_0 :

$$\forall \bar{x} \in \Omega, I_0(\bar{x}) = \begin{array}{ll} - \mid I_{\xi\xi}(\bar{x}) \mid & \text{si } \; x \in r_i \leq r_0 \\ + \mid I_{\xi\xi}(\bar{x}) \mid & \text{si } \; x \in r_i > r_0 \end{array}$$

13.3.1 Définition des sections

Le calcul de l'aire des sections le long de la ligne centrale l nécessite de définir une **abscisse curviligne** u. La ligne, définie par une suite ordonnée de points, est simplement interpolée par des segments de droite entre ces points. A toute abscisse curviligne u est associée un **point** $P(u)$ de la ligne et un **vecteur** $\vec{t}(u)$ donnant la direction de l'axe du vaisseau. Ce vecteur est interpolé linéairement à partir des vecteurs propres $\vec{v}_3$ de la matrice hessienne mémorisés en tout point de

la ligne lors de l'extraction multi-échelle des lignes centrales [Krissian et al., 1999b]. Ils assurent une meilleure continuité et une meilleure robustesse au bruit que les vecteurs tangents à la ligne centrale.
Le calcul de l'aire des sections se fait en des points espacés régulièrement le long de la ligne :

$$u^n = n.du$$

où du est un paramètre qui gère l'espacement entre les sections. En chacun de ces points u^n, un repère orthonormal $(\vec{t}^n, \vec{v}_1^n, \vec{v}_2^n)$ est calculé. Pour assurer la continuité de ce repère et afin de visualiser l'empilement des sections ("vue en déroulé" du vaisseau), le repère obtenu en u^{n+1} est déduit du repère obtenu en u^n par projection : $\vec{v}_1^{n+1}$ est obtenu par projection de $\vec{v}_1^n$ sur le plan orthogonal à $\vec{t}^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_2^{n+1} &= \vec{t}^{n+1} \wedge \vec{v}_1^n \\
\vec{v}_1^{n+1} &= \vec{v}_2^{n+1} \wedge \vec{t}^{n+1}
\end{aligned}$$

et les vecteurs sont normalisés.

13.3.2 Calcul de l'aire dans une section

La méthode utilisée pour le calcul de l'aire des sections utilise un parcours des points $P_{i,j} = P + i\tau\vec{v}_1 + j\tau\vec{v}_2$ pour $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, où P est un point de la ligne centrale dans la section étudiée (défini dans le paragraphe précédent), et où τ est un pas de résolution inférieur à la taille des voxels. L'image I_0 définie au début du paragraphe 13.3, est négative à l'intérieur de la section et positive à l'extérieur. Le calcul de l'aire se fait en interpolant tri-linéairement les valeurs de I_0 aux points $P_{i,j}$ et en sommant les surfaces négatives des carrés $c_{i,j} = [P_{i,j}, P_{i+1,j}, P_{i+1,j+1}, P_{i,j+1}]$. Ces carrés sont propagés de proche en proche à partir du centre de la section : $c_{0,0}$ tant qu'ils contiennent au moins un sommet de valeur négative. L'aire de la section est alors bornée par :

$$\tau^2 n_1 \leq A \leq \tau^2 (n_1 + n_2) \tag{13.5}$$

où n_1 est le nombre de carrés trouvés dont tous les sommets sont négatifs, et n_2 le nombre de carrés possédant des sommets à la fois positifs et négatifs. Pour plus de précision, la surface négative de ces carrés est estimée par des polygones. Une meilleure estimation est proposée en annexe F.2 page 234. Ces estimations, bien qu'elles ne soient pas compatibles avec l'interpolation tri-linéaire, permettent une meilleure estimation de l'aire que le simple calcul de l'aire des seuls carrés dont tous les sommets sont négatifs. Le calcul mathématique exact de l'intersection de la fonction d'interpolation tridimensionnelle avec le plan, n'est pas nécessaire en raison de la rapidité du calcul et du paramètre τ qui permet de contrôler la précision du résultat (équation (13.5)).
Expérimentalement, la valeur $\tau = 0.2$ voxel fournit une précision suffisante (l'aire estimée ne varie presque plus pour des valeurs plus faibles de τ) pour un temps de calcul faible : de l'ordre d'un dixième de seconde pour une section de rayon 7 voxels sur une station Dec Alpha 500 Mhz.

13.4 Correction

L'estimation de l'aire des sections et donc du diamètre des vaisseaux est biaisée par les erreurs introduites par le processus d'acquisition de l'image, par le calcul des dérivées de l'image par convolution, et par l'aspect discret des images. Cette estimation peut être améliorée à l'aide d'un modèle réaliste des vaisseaux. Nous présentons un modèle de vaisseau, puis une méthode de correction de l'aire des sections basée sur ce modèle. Une méthode similaire de correction des diamètres, pour des images bidimensionnelles, est proposée dans [Finet et Liénard, 1996], avec des modèles différents de vaisseau et de réponse impulsionnelle.

13.4.1 Choix d'un modèle de vaisseau

Idéalement, un modèle doit prendre en compte les propriétés physiques de la structure modélisée et les propriétés du mode d'acquisition de l'image, c'est-à-dire le type d'acquisition et les post-traitements éventuels des informations acquises. Dans le cas des angiographies 3D utilisées, les structures modélisées sont des vaisseaux et en particulier le produit de contraste injecté dans le sang lors de l'acquisition. L'image finale est obtenue par reconstruction 3D à partir d'un ensemble d'angiographies soustraites 2D acquises par rayons X. Le profil des vaisseaux dans ces acquisitions 2D est déduit de l'équation (13.6) qui modélise la formation de l'image radiographique dans le cas d'un spectre monochromatique :

$$\Psi = \Psi_0 e^{-\int_{SP} f(x)dx} \tag{13.6}$$

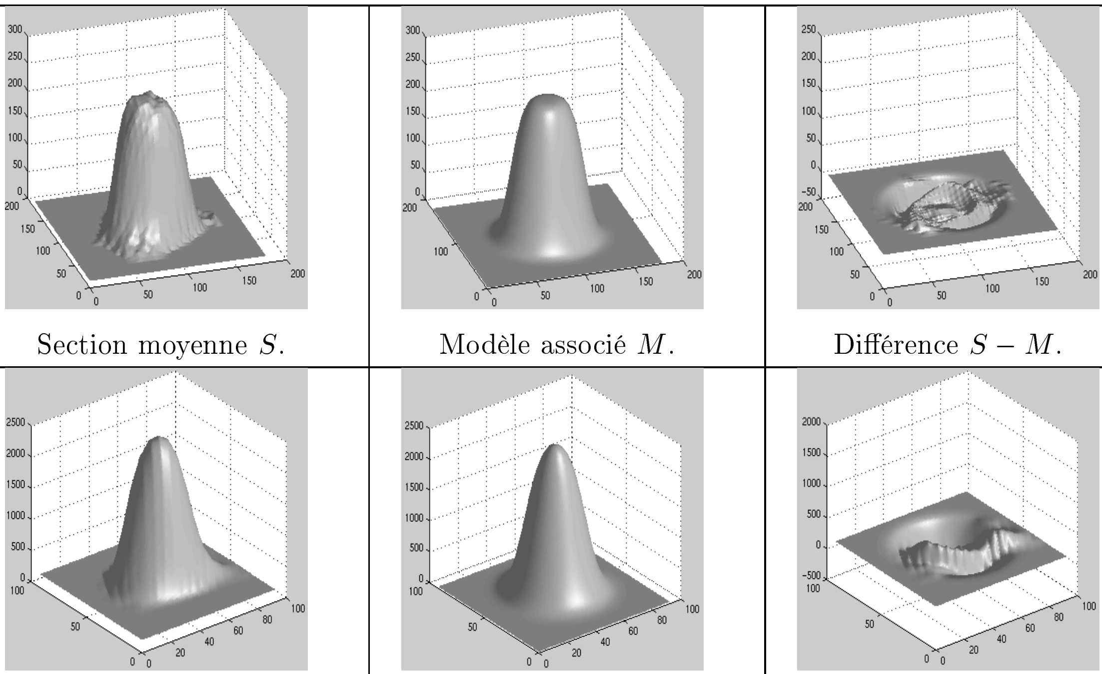
où $f(x)$ représente la distribution spatiale du coefficient d'atténuation associée au rayonnement utilisé ; Ψ et Ψ_0 représentent respectivement les flux de rayons X sortant et entrant; et SP représente le chemin du rayonnement rectiligne allant de la source S au point de détection P.
L'algorithme de reconstruction 3D prend en compte ce modèle, et doit idéalement reconstruire des vaisseaux d'intensité constante. Cependant, l'ensemble des traitements possède une réponse impulsionnelle inconnue qui sera supposée être une fonction gaussienne.
Notre modèle est donc la convolution d'un cylindre circulaire d'intensité constante par une fonction gaussienne d'écart-type σ_0 inconnu. Ce modèle est défini dans le paragraphe 10.2.2 page 132. Nous rappelons l'expression analytique du modèle, où l'axe des z est l'axe du vaisseau, donnée par :

$$I_r(x,y,z) \;=\; f_r(x,y) * G_{\sigma_0}(x,y)$$

où r est le rayon du vaisseau, et f est définie par

$$\begin{aligned} f(x,y) \quad &= \quad 1 \text{ si } \sqrt{x^2+y^2} \leq r \\ &= \quad 0 \text{ autrement.} \end{aligned}$$

La figure 13.4 donne une idée du réalisme de ce modèle. Cette figure compare des vues surfaciques de la fonction intensité $I(x,y)$ correspondant à des sections de vaisseaux, avec un modèle de type bar convolué associé.



Section moyenne S.	Modèle associé M.	Différence $S - M$.
Section moyenne S.	Modèle associé M.	Différence $S - M$.

FIG. 13.4 – *Ligne du haut : vaisseau de diamètre 15 voxels. Ligne du bas : Vaisseau de diamètre 7.5 voxels.* **A gauche**, *vue surfacique de la section moyenne d'un vaisseau, pris dans une image de fantôme.* **Au milieu,** *vue surfacique du modèle associé, modèle correspondant à un disque convolué par une fonction gaussienne.* **A droite,** *vue surfacique de la différence entre la section et le modèle.*

13.4.2 Étude du modèle

Dans un cadre théorique, le dessin de l'évolution du rayon d'un vaisseau cylindrique circulaire d'intensité constante en fonction du lissage gaussien a été simulé avec l'outil de calcul analytique *Maple*. Le calcul du rayon se fait en cherchant le maximum du gradient le long de l'axe des abscisses, i.e. le maximum de $\frac{\partial I}{\partial x}(x,0,0)$ avec $x > 0$. L'expression de $\frac{\partial I}{\partial x}$ est donnée par l'équation (E.2) page 231. La figure 13.5 présente la courbe obtenue pour un disque de rayon 1 et $0 < \sigma < 1$. la courbe en pointillés correspond à l'évolution du rayon d'un modèle de section circulaire gaussien : $r(\sigma) = \sqrt{1^2 + \sigma^2}$, comparé à l'évolution du rayon d'un modèle de section circulaire d'intensité constante en trait plein. Cette courbe possède un minimum global qui est aussi le seul minimum

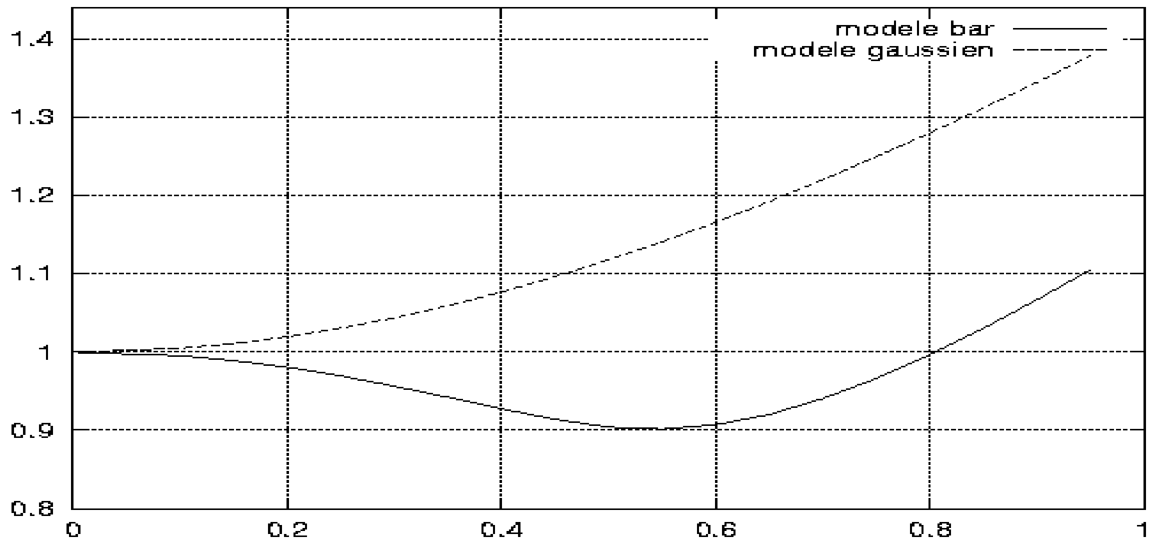


FIG. 13.5 – *Évolution du rayon estimé en fonction du lissage, pour une section circulaire d'intensité constante.*

local, noté $f_{min} \approx 0.9$, et atteint pour un lissage égal à $l_{min} \approx 0.55$. Si le rayon initial r était différent de 1, la courbe résultante serait proportionnelle, i.e.

$$r_{min} = f_{min} r \tag{13.7}$$

$$\sigma'_{min} = l_{min} r \tag{13.8}$$

Le modèle de l'image initiale est un modèle barre convolué, $I_r(x,y,z) = f_r(x,y) * G_{\sigma_0}(x,y)$, et le calcul des contours fait intervenir un deuxième lissage sous la forme d'un produit de convolution avec une fonction gaussienne d'écart-type σ, ce qui donne une convolution globale avec une fonction gaussienne d'écart-type σ', avec $\sigma' = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma^2}$. La simulation analytique prend en compte l'évolution du contour circulaire en fonction du lissage, mais pas l'effet de **discrétisation** de l'image. Cet effet a d'autant plus d'importance que le rayon de l'image est faible.

13.4.3 Correction

Afin de compenser le décalage du rayon dû au lissage global σ', sans connaître le lissage initial σ_0 ni le rayon du vaisseau, et sans tenir compte de la discrétisation, la méthode proposée consiste à chercher la valeur de σ qui donne une estimation de l'aire de la section minimale

$$A_{min} = \min_{\sigma \in \mathbb{R}^+} A(\sigma) = A(\sigma_{min})$$

Le rayon est alors estimé par

$$r_e = \frac{\sqrt{A_{min}}}{\pi} \times \frac{1}{f_{min}}$$

L'estimation du rayon est relativement robuste en fonction de σ car la courbe d'évolution du rayon varie "très lentement" près du minimum. Elle permet aussi de faire une estimation de σ_0, mais cette estimation est par contre sensible à la position du minimum σ_{min}.

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 + \sigma_{min}^2 &= {\sigma'}_{min}^2 \approx (l_{min} r_e)^2 \\ \sigma_0 &\approx \sqrt{(l_{min} r_e)^2 - (\sigma_{min})^2} \end{aligned}$$

Remarque: Pour des vaisseaux de petite taille, le lissage donnant un minimum peut être inférieur à σ_0, le minimum sera donc atteint pour le plus petit lissage calculé. Dans ce cas, la méthode proposée ne peut que majorer le rayon du vaisseau.

13.4.4 Mise en œuvre

La correction consiste à calculer l'écart-type de la fonction gaussienne G_σ, utilisée dans le calcul de $I_{\xi\xi}$, qui donne l'aire minimale pour la section étudiée. Un lissage de l'image le long de l'axe du vaisseau risque de perturber ce calcul en cas de variation importante du diamètre le long de l'axe. Ainsi, le calcul de l'aire de la section à différentes échelles se fera sur une **image 2D de la section**. Cette image J est obtenue par interpolation tri-linéaire de l'image initiale I dans le plan $(P,\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ de la section étudiée. Le paramètre τ défini en 13.3.2 est utilisé pour définir la résolution de l'image J. L'algorithme de calcul de l'aire, pour un écart-type σ donné, consiste à reprendre le calcul des contours tel qu'il est présenté dans la section 13.2, mais pour une image 2D: calcul de $J_{\xi\xi}$, calcul des régions connexes de même signe dans $J_{\xi\xi}$.

Le choix du "bon" contour se fait à partir d'une image binaire représentant un contour "proche" du contour recherché, appelé **contour de référence** c_{ref}. Pour cela, nous définissons une distance entre deux contours a et b par:

$$d(a,b) = \hat{a} \cup \hat{b} - \hat{a} \cap \hat{b}.$$

Le contour choisi sera le contour le plus près du contour de référence, au sens de la distance d. Cette distance est approximée dans l'image en calculant le nombre de pixels qui appartiennent à un seul des deux contours. La recherche de σ_{min} dans une section se fait itérativement en calculant l'aire pour différentes valeurs de σ avec un pas $d\sigma$ variable, jusqu'à obtenir la configuration suivante :

$$0 < r(\sigma - d\sigma) - r(\sigma) < s_{max}$$
$$0 < r(\sigma + d\sigma) - r(\sigma) < s_{max}$$

où $r(\sigma)$ est le rayon estimé pour un écart-type de σ, et s_{max} est un seuil fixé à 0.05 voxel. La valeur de 0.05 voxel est suffisamment faible par rapport à la précision recherchée pour ne pas influencer sur la précision de nos résultats. Dans le cas théorique, l'existence d'un unique minimum assure la convergence de cette méthode, sauf dans le cas où le vaisseau est trop petit par rapport à la résolution de l'image, et la fonction $r(\sigma)$ est croissante pour des faibles valeurs de σ (par exemple 0.6 voxels). Dans ce cas, comme nous l'avons déjà remarqué à la fin du paragraphe 13.4.3 précédent, nous utilisons le rayon estimé pour la plus faible valeur de σ que l'on s'autorise. La valeur initiale de σ, σ_{init} pour une section donnée est la valeur minimale σ_{min} trouvée pour la section précédente; dans le cas de la première section, nous initialisons σ à 0.6 voxel.

13.5 Étude de la précision

Une étude de la précision des résultats ne peut se faire que sur des images dont la taille des structures est connue. Deux types d'images sont donc utilisées :

- les images synthétiques créées par un programme,
- et les images acquises à partir de fantômes.

Le *premier type* d'images peut être plus ou moins réaliste : nous distinguerons les images pour lesquelles l'algorithme de reconstruction 3D n'est pas utilisé et celles pour lesquelles il est utilisé. Les premières sont appelées **images synthétiques théoriques**. Les plus simples sont les images binaires. Ensuite, plusieurs paramètres peuvent être introduits : l'effet de volume partiel, le bruit, un modèle du profil de la section des vaisseaux, etc... Les secondes sont appelées **images synthétiques reconstruites**. Elles sont obtenues en simulant des acquisitions 2D à partir d'un volume théorique 3D. Cette simulation prend en compte l'équation (13.6) décrite dans la section 13.4.1. Les différentes images 2D sont ensuite utilisées comme entrée de l'algorithme de reconstruction tridimensionnel pour obtenir l'image synthétique reconstruite.
Le *deuxième type* d'images sont les images de **fantômes**. Ce sont des acquisitions suivant le processus des acquisitions réelles mais obtenues à partir d'objets dont on connaît exactement les dimensions.

13.5.1 Images synthétiques

Les images utilisées sont trois séries de 6 volumes cubiques numérotés de 1 à 6, de dimensions 48^3. Cette série de 6 volumes a été générée pour des images synthétiques théoriques et pour des images synthétiques reconstruites où deux algorithmes différents de reconstructions ont été utilisés : ART [Gordon et al., 1970; Herman, 1980] et Feldkamp [Feldkamp et al., 1984].

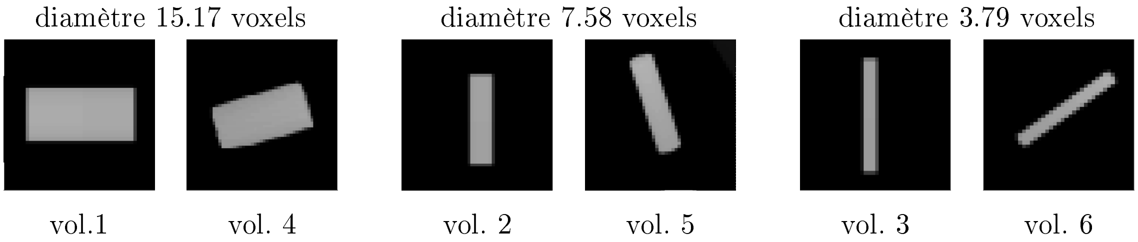


FIG. 13.6 – *Images synthétiques. Série de volumes utilisés, images synthétiques théoriques.*

diam.	voxels	Théorique				Perfect-art				Perfect-feld			
		init.	e.t.	σ_0	corr.	init.	e.t.	σ_0	corr.	init.	e.t.	σ_0	corr.
vol 1	15.17	15.05	0.00	1.15	15.14	14.74	0.01	0.89	14.90	14.90	0.00	1.09	15.08
vol 2	7.58	7.30	0.00	0.59	7.58	7.01	0.01	1.33	7.55	7.07	0.00	1.03	7.53
vol 3	3.79	3.40	0.00	0.51	3.76	3.64	0.01	0.60	3.94	3.57	0.01	0.56	3.85
vol 4	15.17	15.06	0.03	1.37	15.38	14.79	0.06	2.25	15.12	14.93	0.04	1.40	15.41
vol 5	7.58	7.31	0.03	0.61	7.61	7.00	0.04	0.98	7.45	7.09	0.08	1.14	7.74
vol 6	3.79	3.39	0.02	0.51	3.75	3.60	0.04	0.59	3.91	3.52	0.04	0.54	3.81
ERREURS													
vol 1		-0.12			-0.03	-0.43			-0.26	-0.27			-0.09
vol 2		-0.28			-0.01	-0.57			-0.03	-0.51			-0.05
vol 3		-0.40			-0.03	-0.16			0.15	-0.23			0.06
vol 4		-0.11			0.21	-0.38			-0.05	-0.24			0.25
vol 5		-0.27			0.02	-0.58			-0.14	-0.50			0.15
vol 6		-0.40			-0.04	-0.19			0.12	-0.27			0.02
max		**-0.11**	0.08	**2.25**	**0.25**								
min		**-0.58**	0.00	**0.51**	**-0.26**								
moyenne		**-0.33**	0.02	**0.95**	**0.01**								
		taille=15.2				taille=7.6				taille=3.8			
moyenne		-0.26		**1.36**	-0.03	-0.45		**0.94**	-0.01	-0.27		**0.55**	0.05

TAB. 13.1 – *Résultats de l'estimation des diamètres des structures sur des images synthétiques.*

Description du tableau 13.1 Le tableau 13.1 présente les résultats obtenus sur l'estimation de l'aire des sections et des diamètres associés dans les images synthétiques, pour les trois séries de 6 images notées : Théorique, Perfect-art et Perfect-feld. L'unité de longueur utilisée dans ce tableau est le côté d'un voxel, les voxels étant isotropes. Dans un premier temps, la ligne centrale de chaque image est détectée, ensuite, le calcul des sections permet d'obtenir une courbe de l'aire de la section en fonction de l'abscisse curviligne.

- La colonne *init.* présente l'estimation initiale du diamètre moyen le long de la ligne, pour un lissage par convolution avec un noyau gaussien d'écart-type 1 voxel ;
- la colonne *e.t.* présente l'écart-type de ce diamètre (les nombres sont arrondis à 2 chiffres après la virgule) ;
- la colonne σ_0 présente l'estimation de σ_0 pour le modèle circulaire de type "barre-convolué", et la colonne *corr.* présente le diamètre corrigé ;
- la partie intitulée *ERREURS* présente les différences entre les diamètres estimés et les diamètres connus, pour chaque volume, avant et après correction ;
- les lignes intitulées *min, max, moyenne* présentent l'erreur minimale, maximale et moyenne soit pour l'ensemble des images, soit pour les sous-ensembles d'images de même taille (en 40 mm, 20 mm et 10 mm).

Interprétation des résultats

Sur l'ensemble des images : avant correction, l'erreur dans l'estimation est au pire de -0.58 voxel et au mieux de -0.11 voxel avec une moyenne de -0.33. Donc, en accord avec la courbe d'évolution du rayon en fonction du lissage dans un modèle circulaire (figure 13.5)), le diamètre du vaisseau est sous-estimé. L'écart-type du rayon le long de la ligne est en moyenne de 0.02, bien inférieur à l'erreur moyenne, ce qui signifie que l'estimation du diamètre est robuste en fonction de l'abscisse curviligne dans ces images synthétiques.
Par contre, l'estimation du paramètre σ_0 de convolution **varie** considérablement (entre 0.5 et 2.25) ce qui disqualifie l'hypothèse d'un modèle barre-convolué avec une convolution constante ou indépendante de la taille des vaisseaux. **Après correction,** c'est-à-dire après des estimations sous différents lissages et correction en fonction de l'estimation minimale, l'erreur moyenne devient 0.01 voxel avec une erreur maximale de ± 0.25 voxel. La correction améliore donc considérablement le résultat et permet de ne pas systématiquement sous-estimer le diamètre des vaisseaux.

Sur les ensembles d'images de même taille : l'estimation du paramètre σ_0 est peut-être fonction de la taille des vaisseaux. En moyenne, cette estimation est de 1.36 voxels pour les vaisseaux de 15.17 voxels (40 mm), de 0.94 pour les vaisseaux de taille 7.59 et de 0.55 pour les vaisseaux de taille 3.79 voxels. On peut donc penser que la taille de la convolution est une fonction croissante de la taille des vaisseaux.

diam. en mm		voxel = 0.267132 mm Fantôme 1				voxel = 0.276742 mm Fantôme 2				voxel = 0.202712 mm Fantôme 3			
		init.	e.t.	σ_0	corr.	init.	e.t.	σ_0	corr.	init.	e.t.	σ_0	corr.
E	4	3.81	0.01	1.58	3.81	3.80	0.05	1.69	3.92	3.84	0.02	1.72	3.90
LW	2	1.76	0.02	1.19	1.90	1.72	0.04	1.14	1.88	1.74	0.03	1.20	1.81
ERREURS													
E		-0.19			-0.19	-0.20			-0.08	-0.16			-0.10
LW		-0.24			-0.10	-0.28			-0.12	-0.26			-0.19
max		**-0.16**	0.05	**1.72**	**-0.08**								
min		**-0.28**	0.01	**1.14**	**-0.19**								
moy		**-0.22**	0.03	**1.42**	**-0.13**								

TAB. 13.2 – *Résultats de l'estimation des diamètres des structures sur des images de fantômes.*

13.5.2 Images de fantômes

Le fantôme utilisé est représenté dans la figure G.1 dans l'annexe G. Les dimensions de l'image sont 512^3 avec des voxels isotropes de taille 0.267 mm. Trois sous-volumes correspondant aux structures dont les diamètres sont notés E, LW et LD et SD ont été isolés et traités par notre algorithme. En outre, les tests ont été réalisés sur trois acquisitions différentes de ce même fantôme, avec des résolutions différentes, présicées dans le tableau 13.2. L'image 13.7 montre la détection des contours sur une coupe du sous-volume contenant les diamètres LD de 4mm et SD de 2mm, ainsi que la courbe d'évolution de l'aire des sections le long de l'axe de la structure, la forte variation de la courbe un peu avant l'abscisse 40 est due à la présence d'une jonction avec une autre structure. Le tableau 13.2 présente les résultats obtenus sur l'estimation de l'aire des sections et des diamètres associés dans les images de fantômes.

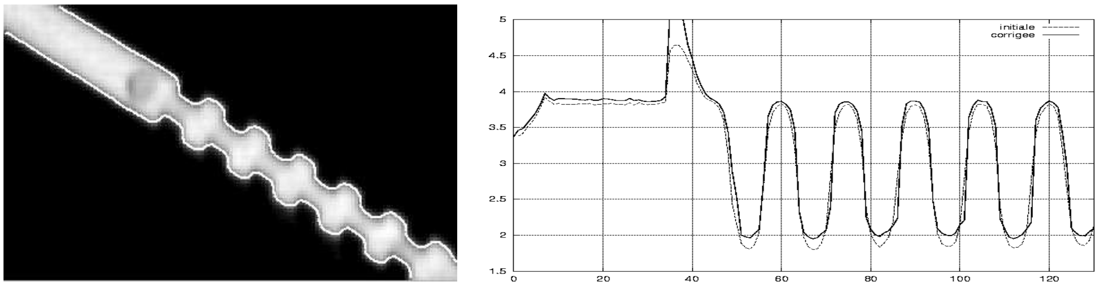


FIG. 13.7 – *Contours obtenus pour une structure de diamètre compris entre 2 et 4 mm, et courbe d'évolution de l'aire de la section en fonction de l'abscisse curviligne.*

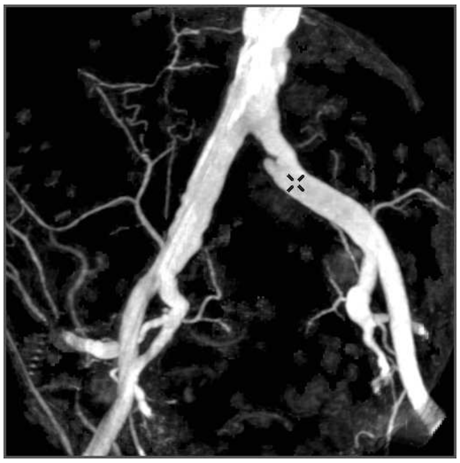
Interprétation des résultats Les résultats pour les trois acquisitions (fantômes 1, 2 et 3) sont donnés en mm. Les erreurs trouvées **avant la correction** se situent entre -0.16 mm et -0.28 mm avec une moyenne de -0.22 mm, l'écart-type de l'estimation le long de l'axe étant en moyenne de 0.03 mm. **Après correction**, l'erreur moyenne est de -0.13 mm. L'erreur dans l'estimation du diamètre est donc de l'ordre de 1/2 voxel, soit une erreur de 1/4 voxel pour l'estimation du rayon donc de la position des contours. Finalement, la précision obtenue sur les images de fantômes est moins bonne que la précision obtenue sur les images synthétiques. Dans les deux cas, le diamètre est initialement sous-estimé par rapport au vrai diamètre de la structure. La correction de l'estimation basée sur un modèle du profil de la section des vaisseau permet d'améliorer la précision pour obtenir une erreur inférieure à 0.2 mm dans les images de fantômes traitées.

13.6 Images réelles

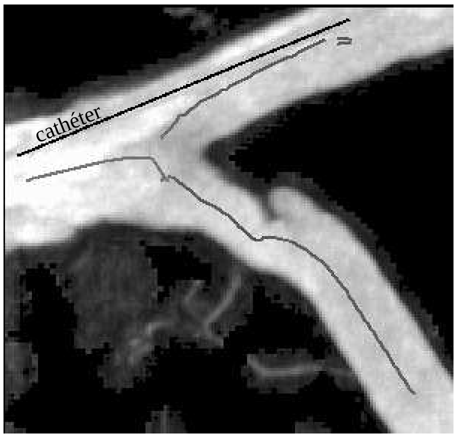
Huit images réelles ont étés testées dont six images de carotides et deux images de vaisseaux de l'abdomen. Les différents paramètres du programme sont : l'image initiale, la ligne centrale du vaisseau à étudier, l'écart-type σ du noyau de convolution gaussien, la résolution τ, le pas d'abscisse curviligne du. Le paramètre le plus "sensible" est σ, car une faible valeur de σ rend les contours sensibles au bruit, et un σ élevé peut connecter des structures proches (par exemple des vaisseaux tangents). Les valeurs choisies pour toutes nos images sont $\sigma = 2$, $\tau = 0.2$, et $du = 1$ où l'unité utilisée est la la longueur du côté d'un voxel (isotrope dans nos images). Le temps de calcul de l'aire des sections de long de l'axe est d'environ 7 minutes avant correction et 30 minutes après correction, pour une image 150^3 sur une station Dec Alpha 500Mhz.
La figure 13.8 présente un résultat obtenu sur une image de vaisseaux de l'abdomen. Un sous-volume 150^3 (figure 13.8(b)) a été extrait de l'image initiale 512^3 dont la taille des voxels est d'environ 0.39 mm (figure 13.8(a)), et les lignes centrales de ce sous-volume ont été détectées. Une fermeture morphologique de taille 2 voxels a été appliquée à l'image initiale avant de détecter les lignes centrales, afin de réduire les perturbations liées à la présence d'un cathéter (représenté par un segment de droite dans la figure 13.8(b)). La ligne choisie est représentée dans la figure 13.8(c) avec une indication de l'abscisse curviligne.
L'image 13.8(d) présente une vue de la surface du contour choisi : isosurface d'intensité nulle de l'image I_0 décrite dans la section 13.3.
La courbe 13.8(e) présente le diamètre estimé en fonction de l'abscisse curviligne, avant et après correction (resp. lignes en tirets et en traits pleins). Cette image est un exemple typique d'une forte sténose où l'estimation en 2D du diamètre serait fortement dépendante du point de vue de la projection. Le résultat obtenu est cohérent avec la visualisation en 3D du vaisseau et permet d'effectuer des mesures automatiques du degré de sténose. Des résultats d'extraction des lignes centrales et de quantification sont donnés dans l'annexe I.

13.7 Conclusion et perspectives

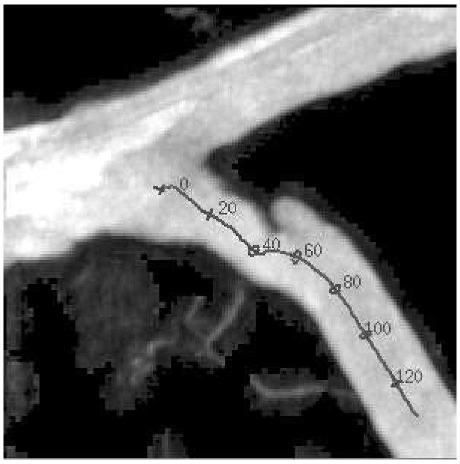
A partir d'une méthode de détection de lignes centrales de structures vasculaires dans des images tridimensionnelles, nous avons introduit une nouvelle méthode permettant d'effectuer automatiquement une analyse quantitative de l'aire de la section des vaisseaux le long de leur axe. Cette méthode a été mise en œuvre à l'aide des algorithmes décrits dans cet article. Une étude de la précision du



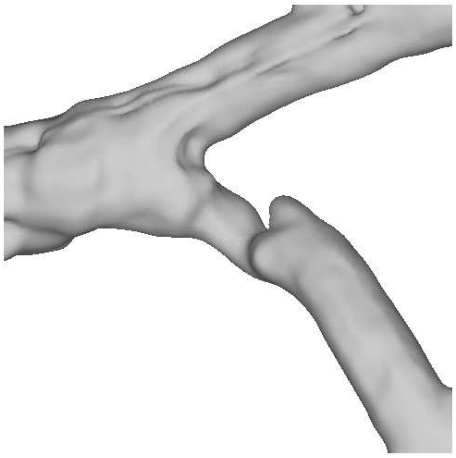
(a) image initiale.



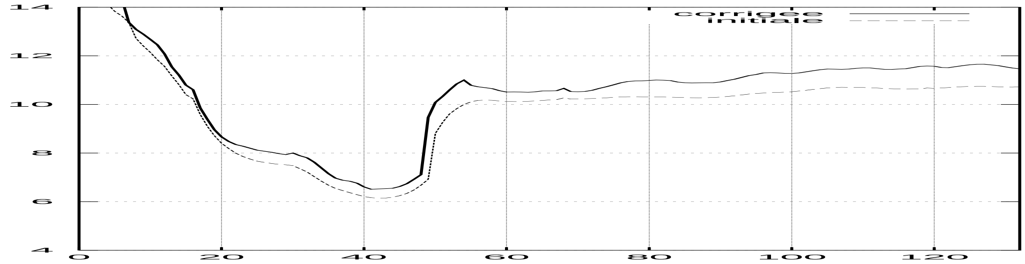
(b) sous-volume et lignes centrales



(c) Ligne choisie pour la quantification.



(d) Vue surfacique du contour choisi.



(e) diamètre de vaisseau associé (en mm) en fonction de l'abscisse curviligne.

FIG. 13.8 – *Résultats sur une image d'iliaques (abdomen).*

résultat, à l'aide d'images synthétiques et d'images d'un fantôme, montre que la précision obtenue est de l'ordre de 0.2 mm pour des images de voxels isotropes et de résolution 0.27 mm. Enfin, des tests sur des images 3D de réseaux vasculaires des carotides ou de l'abdomen confirment la robustesse de notre estimation sur les reconstructions 3D obtenues à partir d'angiographies soustraites par rayons X.

Différentes perspectives sont envisageables dans la continuité de ce travail. Sur le plan *pratique*, l'optimisation à la fois en temps et en mémoire des algorithmes présentés devrait permettre leur utilisation par des médecins. De plus, d'autres informations que l'aire peuvent être extraites à partir des contours des différentes sections, comme par exemple le diamètre du plus grand disque inclus dans une section. Sur le plan *théorique*, le *modèle* de vaisseau proposé pour la correction de l'aire des sections ne prend en compte que des sections circulaires. En outre, dans ce modèle "barre-convolué", la convolution dépend expérimentalement de la taille de vaisseaux. Une étude plus poussée de ce modèle devrait permettre d'améliorer la correction de l'aire estimée. Les travaux de Blaszka et Deriche [Blaszka et Deriche, 1994] peuvent par exemple fournir une alternative à la méthode proposée en mettant en correspondance la section du vaisseau avec un modèle plus général.

Enfin, la méthode de *calcul des contours* proposée, comparée à une technique utilisant des modèles déformables, est automatique et utilise peu de paramètres. La même approche peut être utilisée pour sélectionner les contours de structures anatomiques différentes.

Chapitre 14

Anisotropic diffusion in ultrasound images

L'imagerie ultrasonore est en plein essor car elle permet d'acquérir les images en temps réel, à des coûts faibles, et de manière non invasive. Cependant, la qualité des images est inférieure à la plupart des modalités d'acquisition. Dans le cadre d'un contrat industriel, une étude a été réalisée sur le filtrage et le recalage d'images cardiaques ultrasonores contenant un produit de contraste. Nous présentons dans ce chapitre quelques notions sur le bruit spécifique des images ultrasonores et des résultats de filtrage de ces images. La diffusion anisotrope est en particulier comparée avec une technique de filtrage classique pour les images ultrasonores.

Ultrasound images have many advantages in comparison to other acquisition modalities. They provide real-time images at a low cost and in a non-invasive manner. Nevertheless, the obtained images usually have a low resolution and contain characteristic noise. A study has been carried out on filtering and registration of 2D+T echocardiogram sequences containing contrast agents. In particular, anisotropic diffusion has been compared to another filtering technique usually used for ultrasound images.

14.1 Introduction

The following work has been partially funded by *Nycomed*[1]. The main objective of the study was to investigate the possibilities of highlight in the presence of contrast in an ultrasound image so that the available information in the image can become more apparent for an observer without extensive experience. For this purpose, the following subgoals have been defined:

(i) **detection of contrast specific characteristics** in the spatial and temporal dimension by means of signal analysis,

(ii) **alignment of subsequent images** so that averaging and subtraction of images can be performed automatically,

(iii) **identification of structures and edges** in an ultrasound image sequence.

These objectives have lead to a series of experiments on

- several filtering techniques,
- non-rigid matching techniques (by Alexis Roche),
- standard edge detection (by Grégoire Malandain).

We focus here on the filtering techniques whose purposes are to reduce the presence of the speckle. In this section, we give a brief presentation of ultrasound imaging and their specific noise called "speckle". We then present a standard method for image filtering, and compare the results of filtering using this method and an anisotropic diffusion. Another important issue is the registration of 2D image sequence. Results of filtering before and after registration show the importance of the registration. The non-rigid registration has been carried out by Alexis Roche [Roche et al., 1999] and uses a 2D anisotropic diffusion of the reference slice.

We wish to thank especially Alison Noble and Miguel Mulet-Parada, who are working on ultrasound images [M. Mulet-Parada, Noble J.A., 1998; Mulet-Parada et Noble, 1999], for their help in understanding the physics of ultrasound images and for providing the code of the TDLMS filter algorithm.

14.2 Ultrasound modality

A good introduction to ultrasound imaging can be found in [Acharya et al., 1995], [Duck et al., 1998] gives a more extensive presentation.

The main advantages of the ultrasound modality are:

- the possibility to acquire real-time images and/or 3D images, and to observe the motion of structures in the patient body. This property make it especially useful in cardiology;
- the low-cost of acquisition and the compact and mobile equipment;
- the possibility to extract quantitative velocity information by employing Doppler echo techniques.

1. Nycomed, a Norwegian pharmaceutical company, is the world leader in sales and distribution of contrast agents for medical imaging.

We briefly describe the *principle* of ultrasound image acquisition. The generation of the ultrasound relies on the *transducer*. These transducers are often constructed from piezoelectric elements, discovered by Curie in 1880. The first use of ultrasound was for sonar methods and the detection of submarines during the first world war. Ultrasound transducers are capable of producing ultrasound signals when they are excited electrically. Inversely, they produce an electric signal when excited by incident ultrasound rays. The typical waves used for medical applications oscillate in the range of 1-10 MHz.

The sound waves are introduced in the patient near in the area of diagnostic interest. The waves cross the different tissues of the body each one having different acoustic properties. At *boundaries* between the different tissues, a part of the sound waves is reflected back to the transducer while the remaining portion continues propagating.

The wave propagates at the speed of the sound denoted c. The speed is dependent on the mean density of the medium ρ_0 and on the adiabatic bulk compressibility κ in the relation

$$c = \sqrt{1/\rho_0 \kappa}.$$

The distance of the boundary from the transducer is estimated according to the relation

$$x = \frac{\Delta t}{c}.$$

where Δt is the difference between the time of detection and the time of transmission of the wave.

From this first explanation, two important difficulties can be understood for the interpretation of the received signal:

- because of the wave reflection, the signal is attenuated as the distance from the transducer increases. This attenuation is principally caused by *scattering*, which includes both refraction and reflection, and *absorption* [Bamber, 1998]. A compensation for this attenuation is used in the device system.
- the direction of the boundary compared to the propagation direction will influence the quantity of signal reflected back to the transducer. Orthogonal boundaries are better detected than boundaries parallel to the signal.

The information obtained from transducer can be presented to the physicians in different ways, or modes.

- the **A mode**, or time amplified mode, displays a series of 1D spikes which represent the amplitudes of the returned ultrasound signals with respect to their time.
- the **B mode**, or brightness mode, displays the same data on a single line. A series of B mode scan lines can then be generated to form a 2D image. Two basic imaging formats, linear and sector, are showed in figure 14.1 taken from [Szabo, 1998]. In our case, the images are produced in a sector format where all or a subset of the elements centered in the middle of the array create a sequence of image lines at different scan angles. The obtained lines are converted into gray-scale line data which is processed and interpolated to form an image frame for display.

– the **M mode**, or motion mode, employs a display of B mode lines with respect to a time axis acquired by moving the source/transmitter in the area of interest.

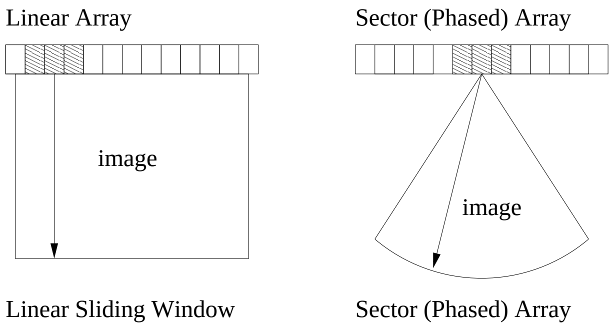


FIG. 14.1 – *Two formats of 2D ultrasound imaging: linear and sector.*

In this study, we are interested in sequences of cardiac 2D images obtained in the B mode. One problem with the B mode images is the effect of the radial interpolation which creates a blurring of the image whose size increases with the distance from the source point.

14.3 Specific noise of the ultrasound images: the "speckle"

In this section, we don't detail speckle generation process, we just review some known properties of this specific noise.

Rayleigh distribution for the magnitude V of the reflected signal

$$p(V) = \frac{V}{\psi} \exp - \frac{V^2}{2\psi} \tag{14.1}$$

for $V \geq 0$, 0 otherwise. Properties of the Rayleigh distribution:

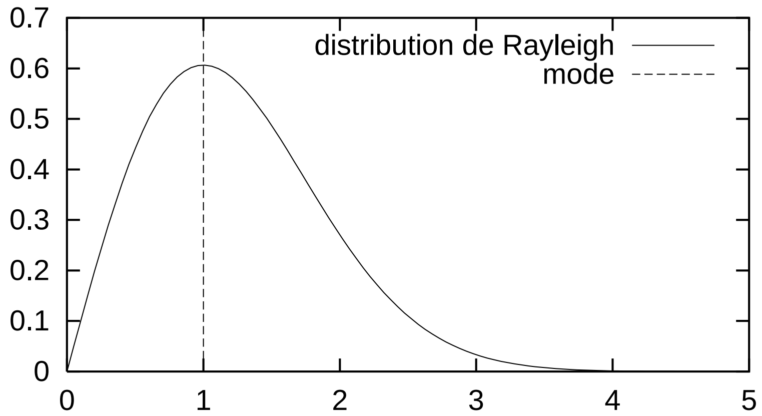


FIG. 14.2 – *Rayleigh Distribution.*

– the mode which corresponds to the most probable value is equal to ψ,

– the mean $E[V] = \mu = \sqrt{\frac{\pi\psi}{2}}$ and $E[V^2] = 2\psi$,
– this implies that the signal to noise ratio is constant:

$$SNR = \frac{\mu}{\sigma} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4-\pi}} \approx 1{,}91.$$

Logarithmic compression:

$$I_{displayed} = D \ln I_{rf} + G,$$

where D and G are machine dependent parameters, I_{rf} is the radio-frequency signal and $I_{displayed}$ is the displayed intensity. The analytic study of log compressed Rayleigh signals in medical ultrasound has only recently been addressed [Kaplan et Ma, 1994; Dutt et Greenleaf, 1996].

Loupas [Loupas, 1988] shows that the linear relationship between the mean and the standard deviation valid for Rayleigh distributed speckle no longer holds for **displayed US images**. Experimental measurements show that displayed ultrasonic images can be modeled as corrupted with signal-dependent noise of the form:

$$I_0 = s + \sqrt{s}n, \tag{14.2}$$

where s is the original signal, I_0 is the observed signal, and n is a zero-mean Gaussian variable with standard deviation σ_n.

14.4 Comparison between two filtering methods

14.4.1 TDLMS

The Two Dimensional Least Mean Square filter [Hadhoud et Thomas, 1988] is an extension of the adaptative LMS algorithm to two dimensions and can be configured as a multi-input, single output motion-compensated filter for image sequences. Using the method of steepest descent for weight updating and estimating the instantaneous gradient leads to the Widrow-Hoff LMS algorithm [Widrow et al., 1975].

Evans and Nixon [Evans et Nixon, 1996] have addressed the special requirements of echocardiography seeking algorithms that approximate the behavior of those outlined above but aiming for simplicity and speed of computation. They proposed a biased TDLMS assuming Raleigh distributed noise.

Algorithm The image is convolved with a three dimensional moving window. Consider the sequences of 2D images $I_1, \ldots, I_t$. In order to filter an image I_k with $1 \le k \le t$, we use a temporal neighborhood of $2m$ images around I_k: $[I_{k-m}, \cdots, I_{k-1}, I_{k+1}, \cdots, I_{k+m}]$. For each point j of a 2D image I_k, we use a spatial $N \times N$ moving window centered on j: $Y_{j,k}$.

The three-dimensional moving window ($N \times N \times 2m$) is defined by:

$$X_{j,k} = [Y_{j,k-m}, \cdots, Y_{j,k-1}, Y_{j,k+1}, \cdots, Y_{j,k+m}]$$

The output is a convolution of the 3D window X with a weight matrix of the same dimensions W_j:

$$y_j = W_j^t X_{j,k}.$$

The weight matrix is then updated using a steepest descent algorithm which minimizes the error e_j. The error the computed by

$$e_j \ = \ I_{j,k} - y_j,$$

and the new weight matrix is given by

$$W_{j+1} \ = \ W_j + 2ue_j X_{j,k}.$$

14.4.2 Anisotropic diffusion

We refer the reader to chapter 5 for explanation of the anisotropic diffusion equation and its filtering properties in the image. Different diffusion equations have been tested.

14.4.2.1 Perona and Malik equation

The function chosen for testing this diffusion is the function proposed by Green [Green, 1990] given by equation (14.3) and represented in figure A.5. This function satisfies the properties of stability (5.9,5.10) and restoration (5.13) for the Perona and Malik process.

$$\frac{\Phi'(s)}{s} \ = \ \frac{\tanh(s/k)}{ks} \ \text{ and } \ \Phi''(s) \ = \ k^{-2}\left(\cosh\left(\frac{s}{k}\right)\right)^{-2}. \tag{14.3}$$

In practice, we normalize this function by dividing it by its value at $s = 0$. Then we can compare the different diffusion functions.

14.4.2.2 Catté et al. equation

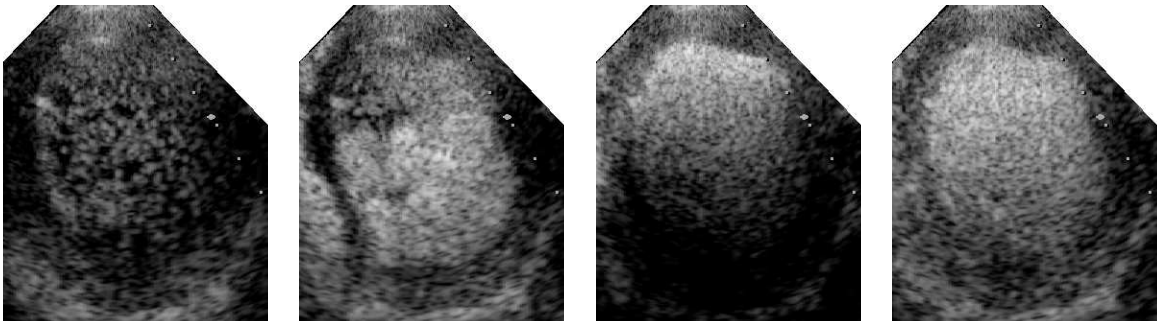
The equation of Catté et al. is given by equation (5.14). This equation introduces a smoothing of the gradient and the standard deviation chosen is 3 voxels. Smaller standard deviations are not efficient due to the particular aspect of the speckle. As stated in section 5.5 page 75, this equation allows for the use of non-convex diffusion functions which have the property of enhancing edges. Thus, we use a function proposed by Perona and Malik and given by equation (14.4) for this equation. A graphical representation of this function is shown in figure A.1.

$$\frac{\Phi'(s)}{s} \ = \ e^{-\left(\frac{s}{k}\right)^2} \ \text{ and } \ \Phi''(s) \ = \ \left(1 - 2\left(\frac{s}{k}\right)^2\right)e^{-\left(\frac{s}{k}\right)^2}. \tag{14.4}$$

14.4.3 Results

We tested the filtering methods on the different images. We worked with two kinds of image sequences: "fixed heart" and "human cardiac" images. The *fixed heart* images don't need any motion compensation and the filtering can be applied directly on the images. The *human cardiac* images need some realignment for motion compensation. We tested the filtering of the images before and after motion compensation. For further studies, a deeper noise analysis may be investigated and the filtering can help this analysis by providing images of the speckle obtained by subtraction between an initial image and a filtered image. We present in the last section these substracted images, that seemed to interest the physicians. In fact, physicians who often use ultrasound images are not disturbed by the speckle, and they probably extract information from it, this may explain their interest in isolating the speckle from the image. Of course, noise removal can also be useful as a preprocessing step for further processing such as registration and edge extraction.

14.4.3.1 Fixed Heart



slice 0 slice 10 slice 20 slice 30

FIG. 14.3 – *Evolution of the contrast agents.*

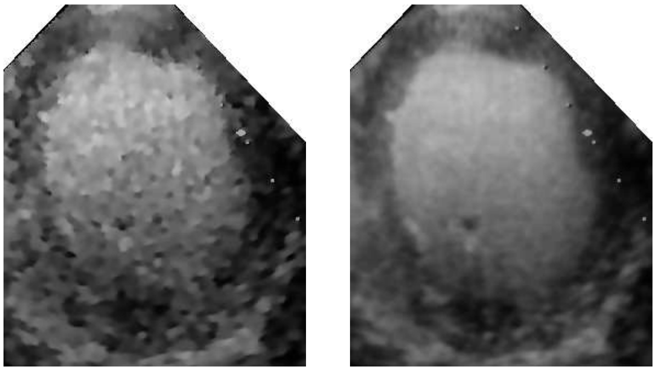
The image tested in this section is an image of a dog's heart which has been fixed. The image is a sequence of 61 images (size 600×430). figure 14.3 shows the evolution of the contrast agents at different times.

The anisotropic diffusion has been tested in two dimensions and in three dimensions using time as the third dimension.

This poses the problem of filtering temporal sequences, and of comparing spatial and temporal information. A way to parameterize the influence of spatial derivatives is to fix a non-isotropic size for the voxels in the image. In the scope of this study, we have not addressed this problem and we use the time dimension like as third isotropic space dimension.

The 2D diffusion has been obtained using the equation of section 14.4.2.2, a Gaussian convolution with $\sigma = 2$, a time step $dt = 0.1$, 30 iterations, and a threshold $\kappa = 10$ on the norm of the smoothed gradient. The 3D diffusion has been obtained using the equation presented in section 14.4.2.1 with the normalized Green function, $dt = 0.2$, 15 iterations, and $\kappa = 10$.

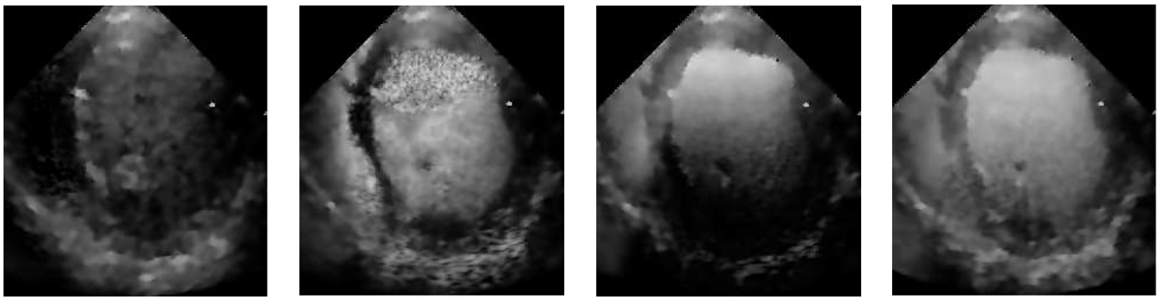
2D Anisotropic Diffusion 3D Anisotropic Diffusion



slice 30

FIG. 14.4 – *Filtering of the Closed Chest Dog Image. Comparison between 2D and 3D Anisotropic Diffusion.*

The results presented in Figure 14.4 show that the 3D filtering is better. This can be explained by the temporal properties of the noise which are different (higher frequency) from its spatial properties and are easier to filter.



slice 0 slice 10 slice 20 slice 30

FIG. 14.5 – *Result after enhancing 3D anisotropic diffusion.*

A 3D experiment with the equation of section 14.4.2.2 has be achieved with different parameters, in order to try to get closer to a segmented image. For this experiment, small steps have been chosen with many iterations. The standard deviation has been set to $\sigma = 3$, the threshold to $\kappa = 12$, and the iteration step to $dt = 0.05$. figure 14.5 shows the result at the diffusion time $t = 15$ which looks almost like a segmented image. Nevertheless, the choice of such parameters involve a large computation time for this 3D image (about 5 hours), the use of semi-implicit numerical schemes like the one proposed by Weickert should reduce this calculation time. The slice 10 in figure 14.5 shows a typical characteristic of the scalar diffusion with the "Perona and Malik" enhancing function: the diffusion is null in the plane orthogonal to the gradient at high gradients. This explains the noisy and inhomogeneous aspect in the upper part of this image.

Figure 14.6 shows the results of the TDLMS filter and the Anisotropic Diffusion on the closed chest dog image. Good results are obtained both for the TDLMS filter and the anisotropic diffusion,

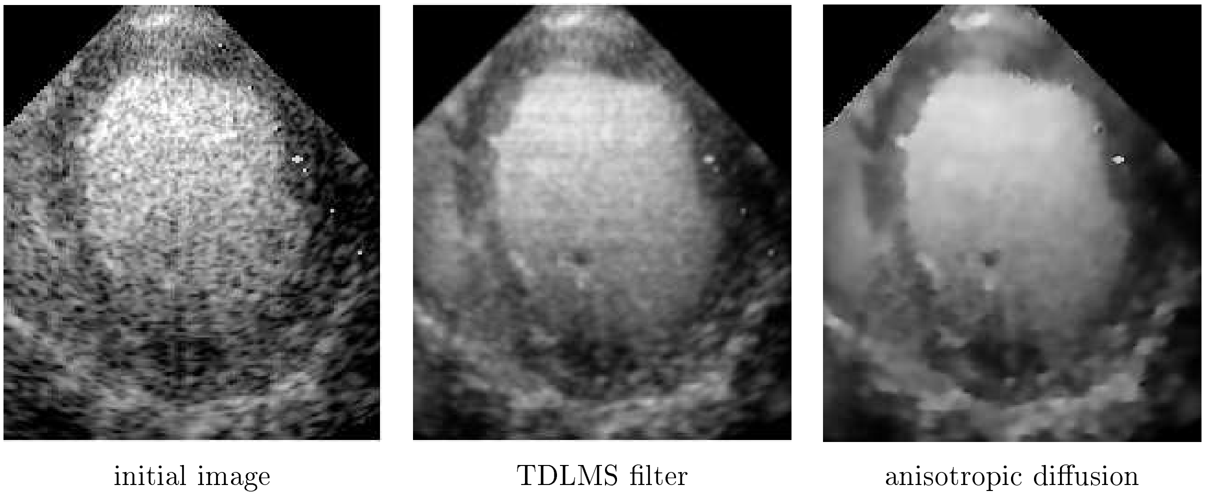


FIG. 14.6 – *Filtering of the Closed Chest Dog Image. Comparison between the TDLMS filter and the Anisotropic Diffusion, slice 30.*

but the anisotropic diffusion gives a more homogeneous result while keeping the contrast of the initial image. The three dimensional anisotropic diffusion seems to give the better filtering results and it will be used for testing the Human Cardiac Images.

14.4.3.2 Human heart

An image of a human heart in presented in figure 14.7. This image contains a sequence of 62 slices of size 360×400. It is more complex than the previous one because the heart is not fixed and several motions occurs. The two principal motions are breathing and heartbeat. Top row of figure 14.7 shows the evolution of a horizontal line with a global displacement to the right due to breathing and a cyclic rapid (three slices) displacement due to heartbeat.

Thus, directly applying 3D anisotropic diffusion is not efficient because the cyclic displacement due to breathing will be considered as noise.

Figure 14.8 shows the 3D anisotropic diffusion of the human cardiac image before and after registration. The filtering is more efficient after the registration and leads to better contour preservation (see the *zoom* in Figure 14.8).

14.4.3.3 Noise extraction

By subtracting a filtered image and the initial image, we can extract the speckle (see Figure 14.9). This extraction will be helpful in analyzing the properties of the speckle.

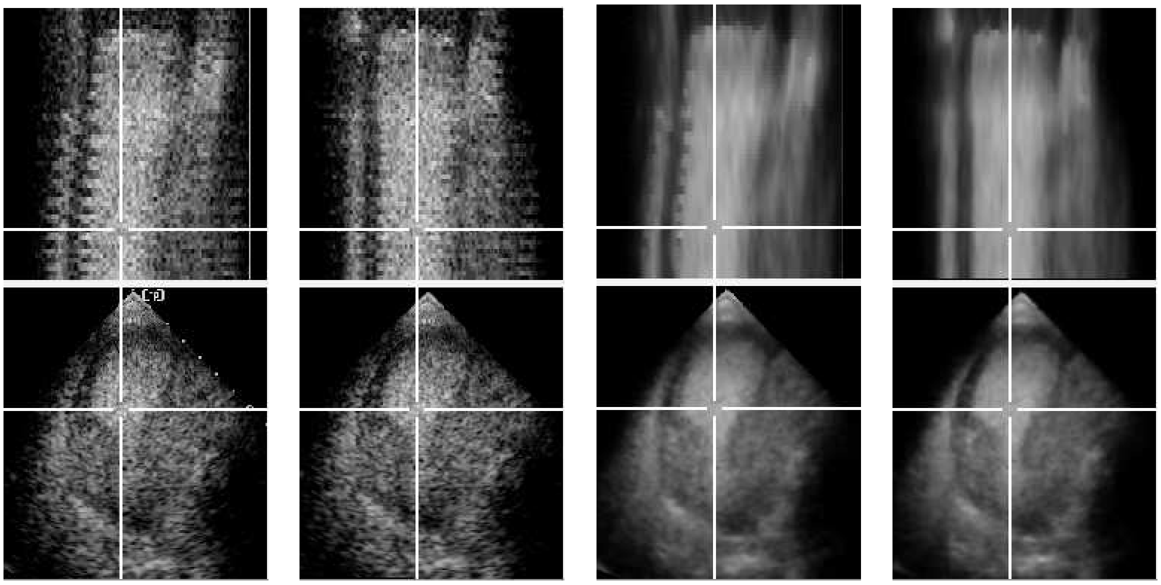


FIG. 14.7 – *Anisotropic Filtering of the human heart image.* **Top row** *shows a xz slice which corresponds to the evolution of an horizontal line over time.* **Bottom row** *shows the xy slice at a given time.* **From left to right,** *the original image, the registration of the original image, anisotropic diffusion of the original image, anisotropic diffusion of the original image after registration.*

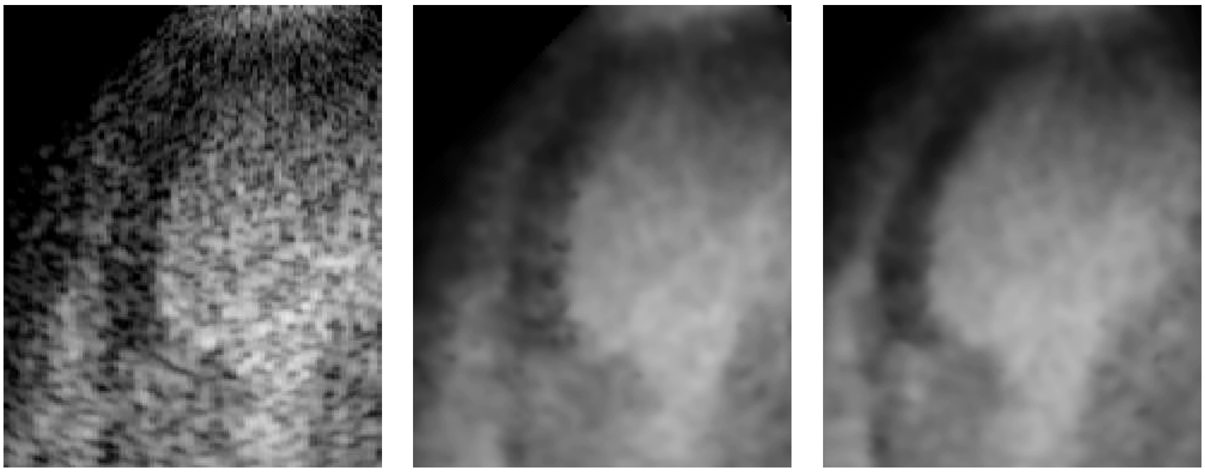
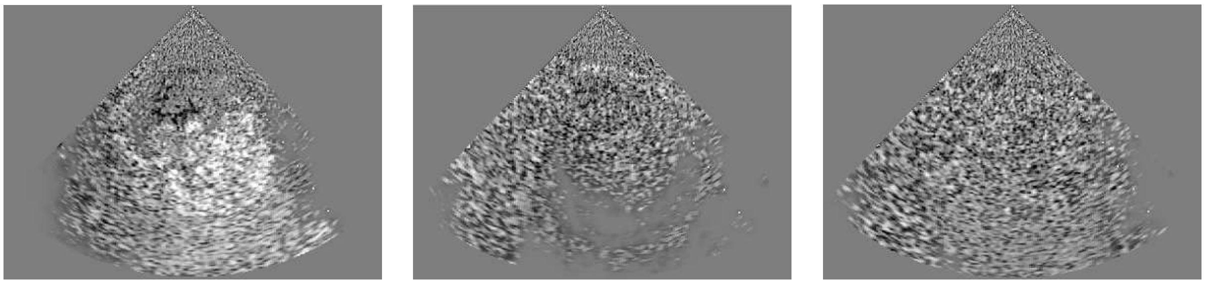


FIG. 14.8 – *Filtering of the human cardiac Image. From left to right, comparison between the initial image, the anisotropic diffusion of the initial image and the anisotropic diffusion of the realigned sequence.*



slice 10 slice 20 slice 30

FIG. 14.9 – *Noise extraction of the Closed Chest Dog Image. Subtraction between the initial image and the 3D anisotropic diffusion.*

14.5 Conclusion

We have presented in this chapter some examples of anisotropic diffusion on ultrasound images. The filtering of the ultrasound images can serve several purposes:

- it can be a preprocessing step for the registration,
- it can improve the contour detection,
- it allows one to extract the noise by subtracting the initial image and the filtered image,
- it gives a better visual understanding of the contrast agents temporal evolution.

The experiments have shown that a scalar diffusion can lead to good speckle removal. We believe that the use of a diffusion matrix (or tensor) can still improve the results. An interesting work on anisotropic diffusion of ultrasound images is also presented in [Steen et Olstad, 1994], where the authors modify the diffusion function by taking into account the speckle property given by equation (14.2). And a recent work [Sarti et al., 1999] also proposes to use the Galilean invariant movie multiscale analysis of Alvarez, Guichard, Lions and Morel on three-dimensional echocardiographic sequences.

Conclusion et perspectives

Rappel des principales contributions

Au cours de ce travail, nous avons présenté un état de l'art des traitements multi-échelles linéaire et non-linéaire des images. Nous avons aussi introduit les travaux d'Osher et de Sethian, en particulier sur les schémas numériques associés aux courbes de niveaux et nous avons montré l'avantage d'utiliser un schéma numérique proposé précédemment par Brockett et Maragos.

Dans la deuxième partie de ce manuscrit, un état de l'art sur la restauration des images à l'aide de l'équation de diffusion anisotrope a été présenté. Nous avons ensuite réécrit l'équation de diffusion anisotrope dans un repère orthogonal normé en dimension n, pour une diffusion anisotrope scalaire et tensorielle. Une nouvelle équation de diffusion a été introduite, utilisant un flux de diffusion multi-directionnel, ainsi qu'une interprétation géométrique de cette équation. Une nouvelle approche variationnelle utilisant un lissage de l'image a permis de faire intervenir le flux de diffusion utilisé. Dans les troisième et quatrième chapitres de cette partie, l'équation de diffusion anisotrope utilisant un flux de diffusion multi-directionnel a été adaptée aux structures vasculaires dans un repère lié à la géométrie locale des vaisseaux. Le choix de trois fonctions de diffusion permet de rehausser le contraste dans la direction du gradient et de privilégier une diffusion dans la direction de courbure minimale, direction de l'axe du vaisseau. Des expériences ont ensuite été réalisées sur une image synthétique bruitée et sur des images réelles de vaisseaux : image des vaisseaux du foie et angiographie par résonance magnétique du cerveau.

La troisième partie propose une approche multi-échelle linéaire de détection des lignes centrales des structures tubulaires. Les paramètres de cette analyse multi-échelle sont optimisés pour un modèle donné de vaisseau. Une série d'expériences permet ensuite d'adapter l'algorithme pour des sections de vaisseaux non gaussiennes, de connecter les jonctions et de tester la robustesse dans le cas de tangence de vaisseaux et de variation rapide de leur diamètre. Cette technique a été expérimentée sur une image de fantôme ainsi que sur des images réelles de réseaux vasculaires 3D, acquises par rayons X et par angiographie magnétique.

Enfin, dans une dernière partie, nous avons présenté deux applications réalisées dans le cadre de contrats industriels. La première est la quantification automatique de sténoses dans des angiographies tridimensionnelles acquises par rayons X, et la seconde est l'étude de la diffusion anisotrope pour la restauration et la visualisation des séquences ultrasonores contenant un produit de contraste.

Dans la première application, nous utilisons le résultat des lignes centrales pour sélectionner automatiquement une surface de passage par zéro de la dérivée seconde de l'intensité dans la direction du gradient. Cette surface permet ensuite le calcul de l'aire des sections le long des lignes centrales et une méthode de correction multi-échelle et originale permet d'obtenir une précision inférieure à 1/4 de voxel pour le rayon des structures sur des images de fantômes.
Dans la deuxième application, nous comparons des résultats obtenus par deux techniques de filtrage des images ultrasonores. Ces deux techniques sont d'une part la diffusion anisotrope et d'autre part l'algorithme TDLMS (Two Dimensional Least Mean Square) adapté aux images ultrasonores. La diffusion anisotrope donne de meilleurs résultats visuels et semble mieux adaptée au traitement tridimensionnel des images. De plus, nous montrons l'intérêt de combiner la diffusion anisotrope avec un recalage de la séquence temporelle d'images.

Perspectives

De nombreuses perspectives sont envisageables à l'issue de ce travail.

Au niveau de la diffusion anisotrope, la nouvelle équation proposée peut être comparée avec l'équation de diffusion de Weickert utilisant le tenseur de structure. Le choix de certains paramètres de diffusion doit pouvoir être automatisé. Par exemple, le seuil κ sur la norme du gradient peut être choisi automatiquement en fonction d'une analyse locale du bruit de l'image. De plus, un schéma numérique de rehaussement des contours, tel qu'il est proposé par Osher et Rudin [Osher et Rudin, 1990] doit pouvoir être adapté à la partie du flux de diffusion orientée dans la direction du gradient.

Au niveau de la détection des lignes centrales, un point important est l'optimisation du programme à la fois au niveau de l'espace mémoire utilisé et du temps de calcul du traitement multi-échelle linéaire. En effet, le stockage du gradient et de matrice hessienne de l'image utilise beaucoup de mémoire, et le calcul des dérivées premières et secondes à différentes échelles nécessite un temps important. En outre, d'autres applications telles que la mise en correspondance des arbres vasculaires avec des atlas anatomiques permettraient d'introduire une connaissance a priori plus forte sur le réseau vasculaire et d'améliorer sa détection.

Une autre idée proposée par [Almansa et Lindeberg, 1998] pour la détection des empreintes digitales est de combiner la détection des structures et la diffusion anisotrope. Un processus itératif permet alors d'initialiser la diffusion anisotrope en fonction de l'orientation locale des structures estimée à l'itération précédente. Cette idée doit pouvoir s'appliquer dans le cadre de la détection des structures vasculaires.

Au niveau de la quantification des sténoses, une perspective intéressante serait l'utilisation clinique de l'algorithme de quantification proposé, qui fournit une information tridimensionnelle sur l'aire des sections des vaisseaux contrairement à l'analyse bidimensionnelle réalisée à partir de projections. Un autre point important est l'étude d'un modèle réaliste de la section des vaisseaux. Pour cela, l'extraction automatique des contours des vaisseaux que nous avons proposée peut permettre une étude statistique des modèles des sections de vaisseaux en fonction des modalités. Le contour obtenu peut aussi servir dans des applications d'endoscopie vasculaire, ou de calcul de l'écoulement du flux sanguin. De plus, la méthode de détection de contours proposée peut s'appliquer à la segmentation d'autres structures non tubulaires. Elle a été testée avec succès pour la détection du genoux de rat, après un pré-traitement par diffusion anisotrope.

Une autre application qui a été envisagée au cours d'un stage d'école d'ingénieur que j'ai co-encadré est la segmentation des anévrismes à l'aide de courbes de niveaux. Cette détection peut par exemple prendre en compte l'information des lignes centrales de vaisseaux pour éviter de propager le modèle dans des vaisseaux proches de l'anévrisme. Une étude expérimentale pourrait fournir un moyen de comparer le schéma numérique d'Osher et Sethian avec celui de Brockett et Maragos sur ce type d'application.

Finalement, j'espère que ce travail aura contribué à l'étude de meilleurs schémas numériques associés aux courbes de niveaux, à l'exploration de nouvelles voies pour les équations de diffusion anisotrope, à l'utilisation et l'amélioration de modèles volumiques pour la détection multi-échelle de structures, et en particulier à l'amélioration des techniques de détection des structures tubulaires tridimensionnelles.

Annexe **A**

Représentation graphique de différentes fonctions de diffusion

A.1 Tableau récapitulatif de différentes fonctions de diffusion proposées

Auteur(s)	$\Phi(s)$	$\frac{\Phi'(s)}{s}$	$\Phi''(s)$	$\frac{s\Phi''(s)}{\Phi'(s)}$
[Perona et Malik, 1990] 1	$\frac{-k^2}{2}\left(e^{-\left(\frac{s}{k}\right)^2}-1\right)$	$e^{-\left(\frac{s}{k}\right)^2}$	$\left(1-2\left(\frac{s}{k}\right)^2\right)e^{-\left(\frac{s}{k}\right)^2}$	$1-2\left(\frac{s}{k}\right)^2$
[Perona et Malik, 1990] 2	$\frac{k^2}{2}\log\left(1+\left(\frac{s}{k}\right)^2\right)$	$\frac{1}{1+\left(\frac{s}{k}\right)^2}$	$\frac{k^2\left(k^2-s^2\right)}{\left(k^2+s^2\right)^2}$	$\frac{k^2-s^2}{k^2+s^2}$
[Geman et Reynolds, 1992]	$\frac{\left(\frac{s}{k}\right)^2}{1+\left(\frac{s}{k}\right)^2}$	$\frac{2k^2}{\left(k^2+s^2\right)^2}$	$-\frac{2k^2\left(-k^2+s^3\right)}{\left(k^2+s^2\right)^2}$	$-\frac{k^2-s^3}{k^2+s^2}$
[Tikhonov et Arsenin, 1977]	$\frac{s^2}{2}$	1	1	1
[Green, 1990]	$\log\cosh(s/k)$	$\frac{\tanh(s/k)}{ks}$	$k^{-2}\left(\cosh\left(\frac{s}{k}\right)\right)^{-2}$	$\frac{s}{k\sinh\left(\frac{s}{k}\right)\cosh\left(\frac{s}{k}\right)}$
[Rudin et al., 1992]	s	$\frac{1}{s}$	0	0
[Aubert et al., 1994]	$\sqrt{1+\left(\frac{s}{k}\right)^2}-1$	$\frac{1}{\sqrt{1+(s/k)^2}}k^{-2}$	$\frac{\lvert k\rvert}{\left(k^2+s^2\right)^{3/2}}$	$\frac{k^2}{k^2+s^2}$
[Alvarez et al., 1992]	...	g(s)	(1-h(s))g(s)	1-h(s)

TAB. A.1 – *Différentes fonctions de diffusion proposées. [Deriche et Faugeras, 1995].*

Alvarez ne propose pas une fonction Φ mais deux fonctions g() et h() vérifiant les propriétés suivantes :

$$h(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \geq 2e \\ 0 & \text{si } s \leq e \end{cases}$$

et

$$g(s) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } s \to 0 \\ 0 & \text{lorsque } s \to \infty \end{cases}$$

Si l'on impose en outre à h(s) de rester inférieure à 1 (sur l'intervalle [e,2e]) et à g(s) d'être positive, alors les conditions de stabilité sont vérifiées.
Cependant, cette approche ne permet plus d'interpréter le processus de diffusion comme un algorithme de minimisation d'une énergie dépendante de la fonction Φ, à moins d'imposer

$$h(s) = -\frac{g'(s)}{g(s)}.$$

Le tableau A.2 donne les conditions vérifiées par chacune de ces fonctions de diffusion.

Auteur	stabilité condition 5.9	stabilité condition 5.10	restauration condition 5.12	restauration condition 5.13
Perona-Malik 1		X	X	
Perona-Malik 2		X	X	
Geman Reynolds		X	X	
Tikhonov	X	X	X	
Green (*)	X	X	X	X
Rudin	X	X		X
Charbonnier (*)	X	X	X	X
Alvarez (*)	X	X	X	X

TAB. A.2 – *Propriétés de stabilité et de restauration vérifiées par les fonctions de diffusion.*

Seules les 3 fonctions signalées par un astérisque vérifient toutes les conditions de stabilité et de restauration de l'image.

A.2 Représentation graphique de ces fonctions de diffusion

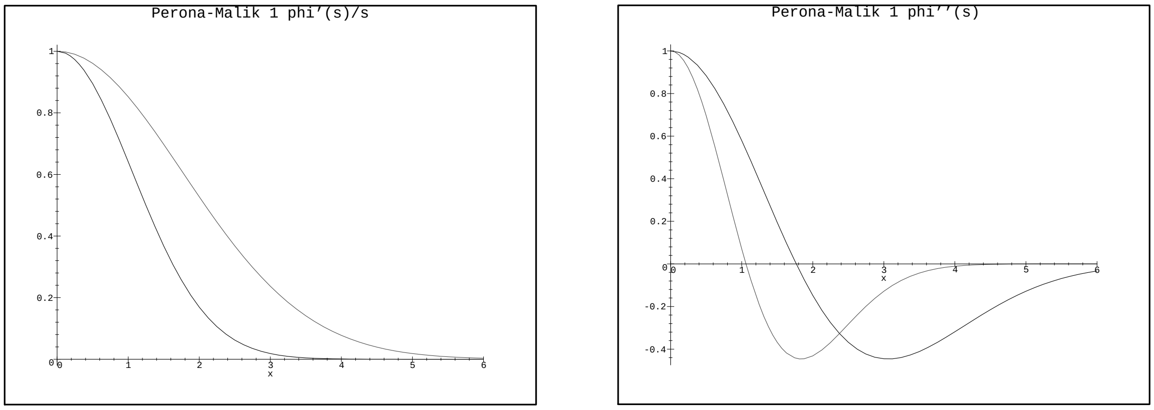


FIG. A.1 – *Fonction de diffusion proposée par Perona et Malik (Perona et Malik 1), avec les seuils* $k = 1$ *et* $k = 2$.

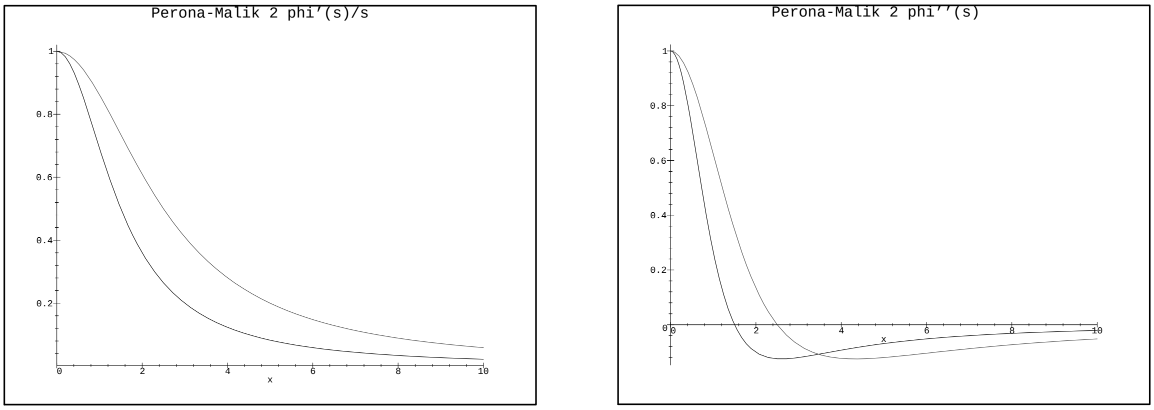


FIG. A.2 – *Fonction de diffusion proposée par Perona et Malik (Perona et Malik 2), avec les seuils* $k = 1$ *et* $k = 2$.

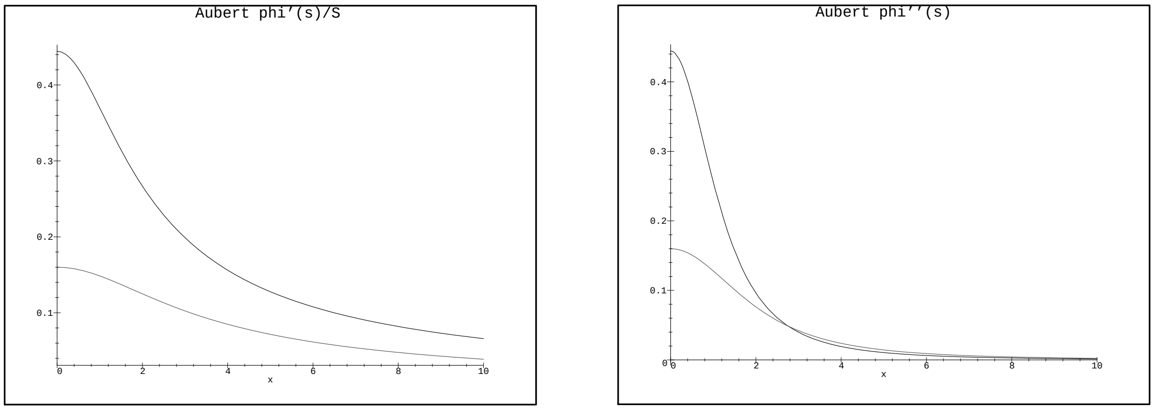


FIG. A.3 – *Fonction de diffusion proposée par Charbonnier et al., avec les seuils $k = 1$ et $k = 2$.*

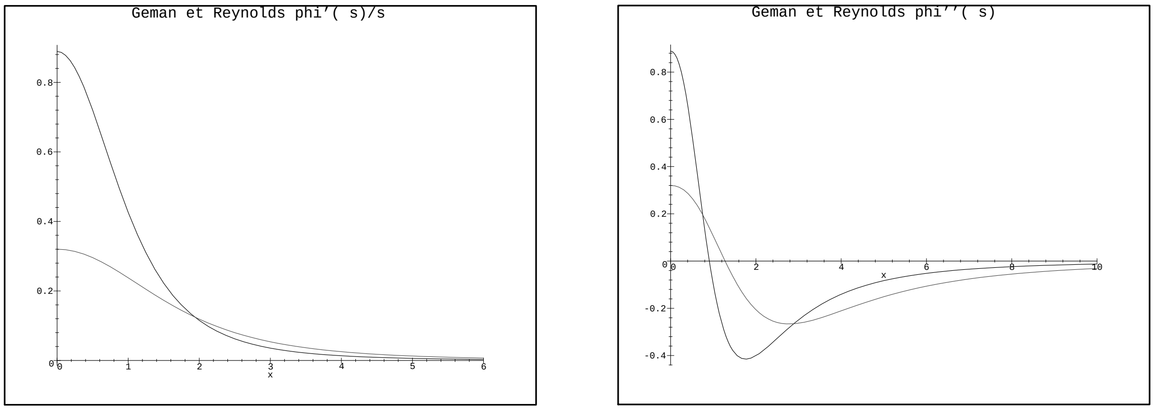


FIG. A.4 – *Fonction de diffusion proposée par Geman et Reynolds, avec les seuils $k = 1$ et $k = 2$.*

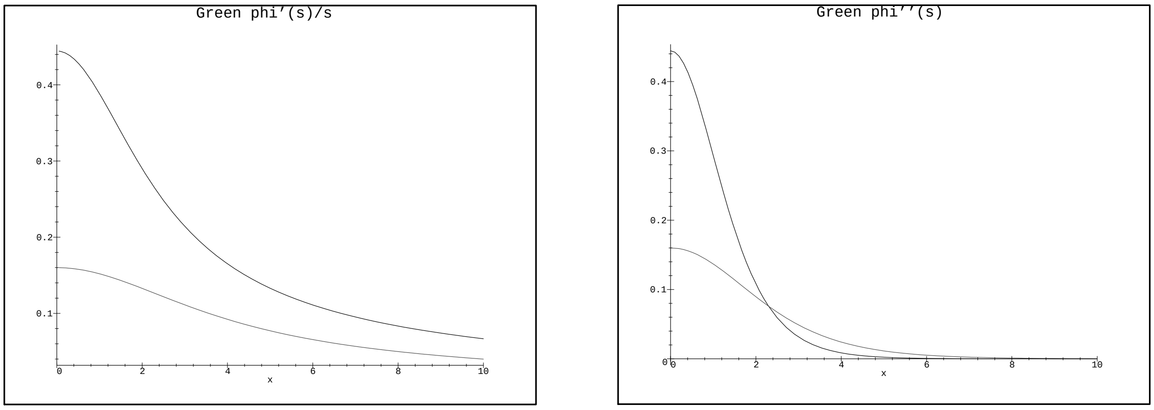


FIG. A.5 – *Fonction de diffusion proposée par Green, avec les seuils $k = 1$ et $k = 2$.*

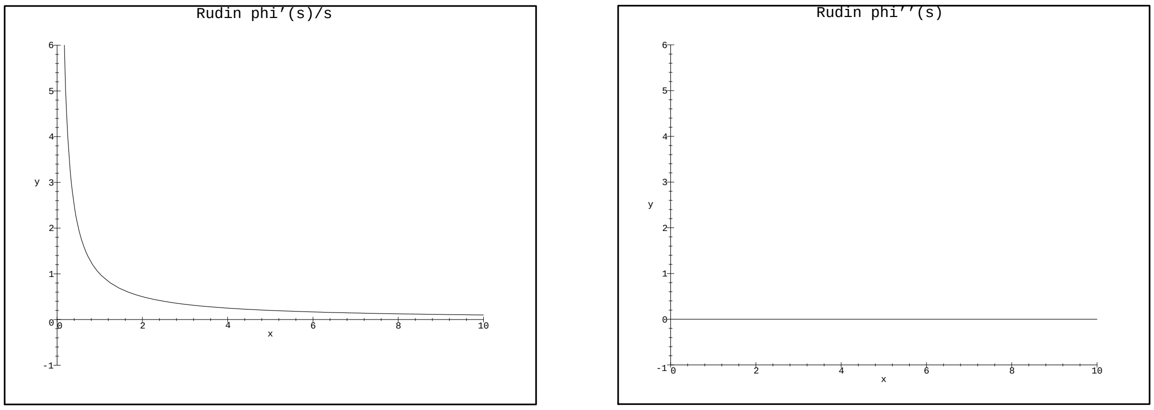


FIG. A.6 – *Fonction de diffusion proposée par Rudin.*

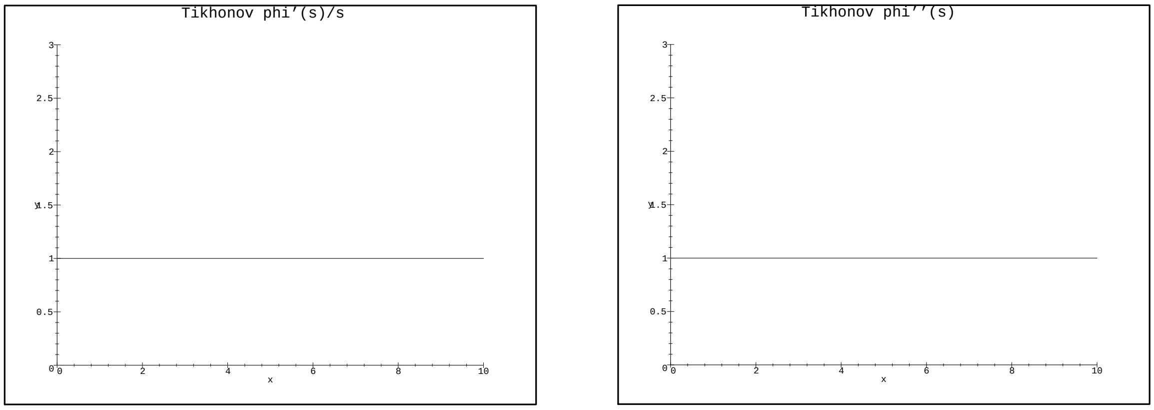


FIG. A.7 – *Fonction de diffusion proposée par Tikhonov.*

Annexe B

Extraction de l'orientation locale de l'image par le tenseur de structure

B.1 Définition du tenseur de structure

Nous définissons le produit de convolution d'une fonction avec une matrice et avec un vecteur par le produit de convolution de cette fonction avec chacun de ces éléments:

$$\begin{aligned} g * \vec{v} &= \vec{w} \\ \forall\, i \in [1,n] \ \ w_i &= g * v_i \end{aligned}$$

de même,

$$\begin{aligned} g * M &= N \\ \forall\, i,j \in [1,n] \ \ N_{i,j} &= g * M_{i,j} \end{aligned}$$

Définition 18 (tenseur de structure) *:*

Soit σ, ρ deux réels positifs, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une image. Le **tenseur de structure** *associé à l'image u est une matrice réelle $n \times n$ définie en tout point de $\mathbb{R}^n$ par le produit tensoriel*

$$T_{\rho,\,\sigma}(u) \;=\; G_\rho * \left(\nabla_\sigma u \,.\, \nabla_\sigma u^t \right) \tag{B.1}$$

où G_α représente une fonction gaussienne d'écart-type α, $\nabla_\sigma u = G_\sigma * \nabla u$, v^t est la transposée du vecteur v.

Ce tenseur a été utilisé avec succès pour extraire une information d'orientation dans des images contenant de nombreuses structures allongées et proches: les empreintes digitales [Kass et Witkin, 1987; Rao et Schunck, 1991; Weickert, 1997b; Almansa et Lindeberg, 1998; Lindeberg, 1997b], l'analyse de texture [Bigün, 1991] [Lindeberg, 1994, chap. 14].

B.2 Interprétation dans le domaine de Fourier ([Bigün, 1991])

Le tenseur de structure peut s'interpréter comme la minimisation d'un moment d'inertie par rapport à un axe dans l'espace de Fourier. Cette approche est présentée dans [Bigün, 1991]. Nous reprenons ici cette interprétation pour mieux comprendre l'équation (B.1).

Cette approche vient de la remarque suivante. Notons $f(x,y)$ une image et $F(u,w)$ sa transformée de Fourier en dimension 2. Si l'image f possède une orientation dominante localement au voisinage d'un point M de coordonnées (x,y), alors l'énergie associée à la transformée de Fourier $E(u,w) = \mid F(u,v) \mid$ possède un axe dominant avec la même orientation que celle du gradient de l'image.

En reprenant les termes de [Granlund et Knutsson, 1995, p. 221]:

> *Si l'image est localement simple, au sens de l'orientation des structures, cela sera apparent dans le domaine de Fourier par le fait que la plupart de l'énergie est concentrée dans une zone étroite orientée dans la même direction que les gradients locaux de l'image.*
> [Granlund et Knutsson, 1995]

Propriété de la transformée de Fourier par changement de repère

Définition 19 (Transformée de Fourier) *:*

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$, la transformée de Fourier $F = \mathcal{F}f$ de f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$F(u) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\,u^t\,x}\; d^n x$$

Propriété 13 (Transformée de Fourier de la dérivée) *:*

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ de la dérivée partielle de f à un ordre $p_1 + \cdots + p_n$ vérifie :

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}}{\partial^{p_1}x_1\cdots\partial^{p_n}x_n} f\right)(u) \;=\; i^{p_1+\cdots+p_n} u_1^{p_1}\cdots u_n^{p_n}(\mathcal{F}f)(u)$$

Considérons le cas de changement de coordonnées par une *transformation affine* du repère. Ce changement se traduit, en dimension n, par la relation $y(x) = A\ (x + b)$ où b est un vecteur traduisant la translation et A une matrice inversible qui traduit le changement de base, alors pour toutes fonctions f et g où

$$g(x) = f\,(A\,(x + b))$$

la relation suivante est vérifiée :

$$(\mathcal{F}g)\,(u) \;=\; \frac{1}{\mid detA \mid} e^{i\,u^t\,b}\,(\mathcal{F}f)\left(\left(A^t\right)^{-1} u\right) \tag{B.2}$$

où $\mathcal{F}h$ représente la transformée de Fourier de la fonction h.

Dans le cas particulier d'une **rotation**, $det A = 1$ et $\left(A^t\right)^{-1} = A$, l'équation (B.2) s'écrit

$$(\mathcal{F}g)(u) = (\mathcal{F}f)(A\,u)\,.$$

Cette propriété permet d'interpréter la transformée de Fourier d'une image possédant une orientation dominante $\vec{k}$ comme la transformée de Fourier de l'image dans un repère dont l'axe des abscisses est parallèle à $\vec{k}$.

Une image linéairement symétrique est définie de la manière suivante :

Définition 20 (Image linéairement symétrique) *:*

Une image $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie dans un espace de dimension n est dite linéairement symétrique si elle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\,,\ f(\mathbf{x}) = g(\vec{k}^t\,\mathbf{x})$$

où g est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\vec{k}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ ([Bigün, 1991]).

Il est donc clair que pour une image $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linéairement symétrique de vecteur $\vec{k}$ et de fonction g, la transformée de Fourier est une ligne orientée dans le sens du vecteur $\vec{k}$ correspondant à la transformée de Fourier de g le long de cette ligne.

La propriété énoncée caractérise aussi bien les lignes que les pentes (toutes les fréquences élevées de la fonction g) : cela explique l'intérêt de cette approche pour la détection de textures ou d'empreintes digitales.

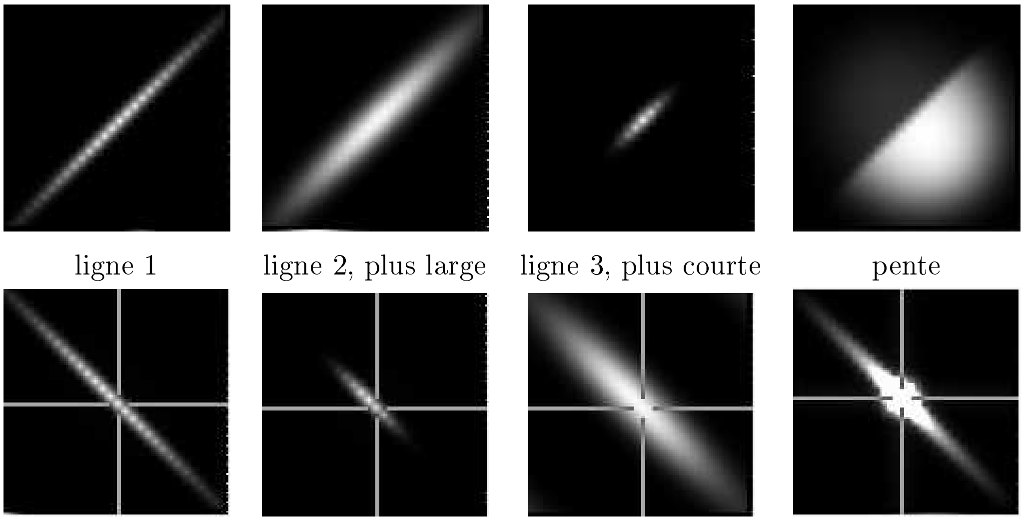


Fig. B.1 – *Orientation locale et transformée de Fourier. Ligne du haut : images synthétiques. Ligne du bas : leur transformée de Fourier. De gauche à droite, transformée de Fourier d'images de taille* 30×30 *représentant des lignes (lignes 1, 2 et 3) et une pente.*

Recherche de l'axe qui minimise le moment d'inertie dans l'espace de Fourier

Recherche d'un axe dominant La recherche d'un axe dominant dans l'espace de Fourier consiste à trouver l'axe qui minimise la distance au carrée des points à l'axe pondérée par leur énergie. Pour une image $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier est $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, cette minimisation s'écrit :

$$\underset{|\vec{k}|=1}{min} E(\vec{k}) \text{ où } E(\vec{k}) \; = \; \int_{\mathbb{R}^n} d^2(\omega,\vec{k}) \mid F(\omega) \mid^2 d\omega$$

et

$$\begin{aligned} d^2(\omega,\vec{k}) &= \mid \omega - (\omega^t\vec{k})\vec{k} \mid^2 \\ &= \left(\omega - (\omega^t\vec{k})\vec{k}\right)^t \left(\omega - (\omega^t\vec{k})\vec{k}\right) \\ &= \omega^t \; \omega - \underbrace{((\omega^t\vec{k})\vec{k})^t \; \omega}_{t1} - \underbrace{\omega^t \; (\omega^t\vec{k})\vec{k}}_{t2} + \underbrace{((\omega^t\vec{k})\vec{k})^t \; (\omega^t\vec{k})\vec{k}}_{t3} \end{aligned}$$

Or $\omega^t\vec{k} = \vec{k}^t\omega$ est un scalaire et $\vec{k}^t\vec{k} = 1$, donc $t1 = t2 = t3 = (\omega^t\vec{k})^2$. $\omega^t\omega$ peut s'écrire $\vec{k}^tI\omega^t\omega\vec{k}$ et $(\omega^t\vec{k})^2$ peut s'écrire $\vec{k}^t\omega\omega^t\vec{k}$, ce qui donne

$$d^2(\omega,\vec{k}) \; = \; \vec{k}^t \left(I\omega^t\omega - \omega\omega^t\right) \vec{k}$$

Or le produit scalaire $\omega^t\omega$ est la trace de la matrice $\omega\omega^t$

Le problème se ramène à trouver le vecteur qui minimise

$$E(\vec{k}) \; = \; \vec{k}^t \; J \; \vec{k}$$

où la matrice J s'exprime par

$$J \; = \; trace(A) \; I \; - \; A$$

avec

$$\forall i,j \in [1,n], \;\; A_{ij} \; = \; \int_{\mathbb{R}^n} \omega_i\omega_j \mid F(\omega) \mid^2 d\omega \tag{B.3}$$

La recherche d'un minimum se ramène à la recherche du vecteur propre de la matrice J dont la valeur propre est minimale.

Recherche d'un hyperplan dominant Dans le cas de la recherche d'un hyperplan dominant, le vecteur $\vec{k}$ est un vecteur orthogonal à l'hyperplan, et la minimisation s'écrit de manière identique avec toutefois une fonction de distance plus simple :

$$d^2(\vec{k},\omega) = (\omega^t\vec{k})^2$$

L'énergie à minimiser est alors

$$E(\vec{k}) \; = \; \vec{k}^tA\vec{k}$$

la matrice A étant définie par l'équation (B.3).

Équivalence entre les deux problèmes L'équivalence entre ces deux problèmes peut se comprendre de deux manières :

(i) Les matrices A et J partagent les mêmes vecteurs propres, en raison de la relation suivante :

$$Ju = \lambda' u \iff Au = \lambda u \text{ avec } \lambda' = trace(A) - \lambda$$

(ii) Le problème de la minimisation le moment d'inertie par rapport à un axe de vecteur $\vec{k}$ peut aussi s'écrire comment un problème de maximisation du moment d'inertie par rapport à un plan orthogonal à $\vec{k}$ puisque la somme des deux distances au carré est égale à $\mid \vec{k} \mid = 1$ (théorème de Pythagore).

La caractérisation locale d'un axe ou d'un hyperplan peut donc se formuler en fonction des valeurs propres de la matrice A. Il faut noter que toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles puisque $\forall \vec{v}, \vec{v}^t A \vec{v} \geq 0$ est un moment d'inertie. En fait toutes les valeurs propres des matrices A et J sont comprises dans l'intervalle $[0,trace(A)]$

Propriété 14 (Caractérisation d'un axe ou d'un hyperplan) :

Soit $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice A et $v_1, \cdots ,v_n$ les vecteurs propres associés. La présence d'un hyperplan qui traduit l'orientation locale de l'image est caractérisée par :

$$\lambda_1, \cdots ,\lambda_{n-1} \gg 0 \;\; et \lambda_n \approx 0 \tag{B.4}$$

où v_n donne la direction orthogonale à cet hyperplan. La présence d'un axe est caractérisée par :

$$\lambda_1 \approx trace(A), \;\; et \lambda_2, \cdots ,\lambda_n \approx 0 \tag{B.5}$$

où v_1 donne la direction de cet axe.

Calcul de la matrice A L'égalité de Parseval nous permet d'écrire la matrice A en fonction de l'image initiale, et ainsi d'éviter le calcul de la transformée de Fourier pour obtenir cette matrice.

Cette égalité s'énonce ainsi :

Théorème 8 (Théorème de Parseval) :

Si f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $F : \Omega \to \mathbb{C}$ sa transformée de Fourier, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f(x))^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mid F(\omega) \mid^2 d\omega \tag{B.6}$$

Ce théorème s'applique aux coefficients de la matrice A donné par l'équation (B.3), en utilisant la propriété 13

$$\forall i,j \in [1,n], \;\; A_{ij} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx \tag{B.7}$$

Bigün et al .[Bigün, 1991] montrent que cette somme peut être approximée par un produit de convolution avec une fonction Gaussienne, si en outre les dérivées partielles sont approximée par une convolution de noyau plus petit, nous obtenons l'équation (B.1) qui définie le tenseur de structure.

B.3 Autre Interprétation

Une autre interprétation est de considérer la direction qui maximise la somme des variations locales au carré des intensités dans cette direction. La variation locale dans une direction est donnée par la dérivée de l'image dans cette direction :

$$u_k = k \ \nabla u$$

Cette variation étant signée, des gradients opposés s'annulent, il est donc préférable de sommer le carré de ces dérivées :

$$u_k^2 = (k \ \nabla u)^2 = k^t \nabla u \ \nabla u^t \ k$$

Ce qui s'exprime directement par $\vec{k}^t A \vec{k}$ pour une direction $\vec{k}$. Cette interprétation est proche de celle de Rao et Schunck [Rao et Schunck, 1991], qui considèrent les vecteurs gradients comme une distribution statistique de points.

Annexe C

Anisotropic directional diffusion applied to 3D vessel detection [Krissian et al., 1997]

We present here a work published in [Krissian et al., 1997] and also available as a research report [Krissian et al., 1996].

C.1 Introduction

This work was done after a master's thesis [Krissian, 1996] defended in September 1996. In particular, section [5.3.2.2] presents a demonstration of the equivalence between the anisotropic diffusion equation of Perona and Malik (C.2) and equation (C.7) which differentiates the diffusion in three directions.

We first present and discuss previous work in anisotropic diffusion. Second, we introduce our motivation for a new scheme based on the differentiation of the diffusion in the directions of the minimum and the maximum curvature. Finally, we present experimental results on synthetic and real data, before closing with perspectives.

C.1.1 The process proposed by Perona et Malik

It is well known that the Gaussian convolution is equivalent to the resolution of the heat diffusion equation. If u represents the intensity function of the image, then the heat diffusion equation is written:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \tag{C.1}$$

Perona et Malik [Perona et Malik, 1990] have introduced the following diffusion equation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div\,(g(\mid \nabla u \mid).\nabla u) \tag{C.2}$$

The convergence of this process is ensured for diffusion functions g with given properties [Deriche et Faugeras, 1995]. In order to show this convergence, equation (C.2) is expressed as a minimization of the following energy:

$$E(u) = \lambda \int_{\Omega} \Phi(\mid \nabla u \mid) d\Omega \tag{C.3}$$

where $\frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid} = g(\mid \nabla u \mid)$.

Equation (C.2) is a descent of gradient along the energy surface $E(u)$.

In order to study in 2D images the restoration criteria for this process, we can rewrite it as a sum of second derivatives of the intensity in certain directions weighted by coefficients depending on function Φ.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Phi''(\mid \nabla u \mid) u_{\xi\xi} + \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid} u_{\eta\eta} \tag{C.4}$$

where $\xi = \frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}$ is a unit vector in the direction of the gradient, and η is a normal vector orthogonal to the gradient.

In section [5.3.2.2], we show that this result can be generalized in a space of dimension greater than two:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Phi''(\mid \nabla u \mid) u_{\xi\xi} + \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid} (\Delta u - u_{\xi\xi}) \tag{C.5}$$

This equation shows that the equation (C.2) is isotropic in the hyperplane orthogonal to the gradient of the intensity, i.e. the hyperplane tangent to the local isosurface. We learned recently that this equivalence was also verified in three dimensions by Teboul, Blanc-Féraud, Aubert and Barlaud in [Teboul et al., 1998] but the demonstration presented in the appendix is more general and can be applied to any dimension $n \geq 2$.

C.1.2 Improvement proposed by Catté et al.

The principle of Catté et al [Catte et al., 1992] is to reduce the noise participation in the computation of the parameter of the diffusion function Φ. They propose the following diffusion process where the parameter of the diffusion function is the norm of the gradient of the smoothed image (the convolution of the image with a Gaussian) instead of the norm of the gradient:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div\,(g(\mid \nabla u^* \mid).\nabla u) \tag{C.6}$$

where

$$u^* = G_\sigma * u.$$

This process gives experimentally better results than equation (C.2) and is proved to be consistent and convergent.

C.1.3 Motivation

In the field of medical image analysis, we are especially interested in the use of anisotropic diffusion for three-dimensional images and in the preservation of small structures like blood vessels.

We denote e_1 and e_2 the two vectors in the principal directions of curvature of the plane orthogonal to the gradient of intensity. e_1 will be a unit vector in the direction of the maximum curvature k_1, and e_2 a unit vector in the direction of minimum curvature k_2. (ξ,e_1,e_2) is a base of the 3D space $\mathbb{R}^3$.

The equation (C.5) can be written as

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Phi''(\mid \nabla u \mid) u_{\xi\xi} + \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid} (u_{e_1 e_1} + u_{e_2 e_2})$$

We transform this process in a more general process where each second derivative of the intensity is multiplied by a different function.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_\xi(\mid \nabla u \mid) u_{\xi\xi} + C_{e_1}(\mid \nabla u \mid , \mid k_1 \mid) u_{e_1 e_1} + C_{e_2}(\mid \nabla u \mid , \mid k_2 \mid) u_{e_2 e_2} \tag{C.7}$$

In order to privilege the direction of minimum curvature in the diffusion process, we impose a coefficient C_{e_2} greater than C_{e_1}. The motivation of that choice is to smooth *more* along the direction e_2 than along the direction e_1, which is intuitive for vessel-like structures (see Fig. C.1).

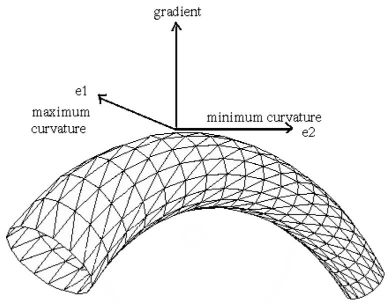


FIG. C.1 – *Illustration of the direction of the gradient, and the directions of the minimum and the maximum curvature.*

Our new process includes the process of Perona and Malik and is more general. In this new process, the conditions of convergence and of luminance conservation must be studied. In this article, we focus on experimental results which tend to show that our new approach is consistent.

C.1.4 Other works in three-dimensional anisotropic diffusion

There are very few publications related to three-dimensional anisotropic diffusion. Extensions of curve evolution schemes [Niessen et al., 1996] to 3D have been studied. They essentially deal with the mean curvature [Grayson, 1989; Sethian, 1985] or the Gaussian curvature [Chopp et Sethian, 1993] .

C.2 Approach

C.2.1 The computation of the second derivatives in the direction of principal curvatures $u_{e_1e_1}$ and $u_{e_2e_2}$

The first idea to compute $u_{e_1e_1}$ and $u_{e_2e_2}$ was to use the formula:

$$u_{vv} = v^t H v$$

where H is the Hessian of the image at the current point.

In fact, we use instead the following expression which avoids to compute the vectors e_1 and e_2:

$$u_{e_1e_1} = - \mid \nabla u \mid . k_1 \tag{C.8}$$

$$u_{e_2e_2} = - \mid \nabla u \mid . k_2 \tag{C.9}$$

Demonstration of equations (C.8) and (C.9): This property can be easily proved in two dimensions by using Gauge coordinates [Ter Haar Romeny, 1996], and it can be applied to the plane $(M,\nabla u,e_1)$ (respectively $(M,\nabla u,e_2)$) which contains the current point M and is parallel to the vectors ∇u and e_1 (respectively e_2).

In two dimensions, at each point M of an isophote, we note v an axis tangent to the isophote and ξ an axis orthogonal to v in the direction of the gradient. Locally, if $u_\xi \neq 0$, we can write the isophote as a function $\xi(v)$ in our new reference, and the local isophote is characterized by the expression $u(v,\xi(v)) = constant$ with $u_v(M) = 0$. By implicit differentiation and application of the chain rule, we obtain in the point M:

$$u_v + u_\xi.\xi' = 0 \quad \rightarrow \quad \xi' = -\frac{u_v}{u_\xi} \tag{C.10}$$

$$\rightarrow \quad \xi'(M) = 0 \tag{C.11}$$

and

$$u_{vv} + 2.u_{v\xi}\xi' + u_{\xi\xi}\xi'^2 + u_\xi \xi'' = 0 \tag{C.12}$$

therefore, if κ denotes the isophote curvature:

$$\kappa(M) = \xi''(M) = -\frac{u_{vv}}{u_\xi}$$

For the computation of k_1 and k_2, e use the following formulas given in [Thirion et Gourdon, 1995]. k_1 and k_2 are the solutions of an equation of order two:

$$k_i = H \pm \sqrt{\Delta} \quad with \quad \Delta = H^2 - K. \tag{C.13}$$

where K and H are the Gaussian and the mean curvature. They can be computed directly from the first and second derivatives of the image.

$$K = \frac{1}{h^2}\Big[\begin{array}{ll} f_x^2(f_{yy}f_{zz} - f_{yz}^2)+ & 2f_y f_z(f_{xz}f_{xy} - f_{xx}f_{yz})+ \\ f_y^2(f_{xx}f_{zz} - f_{xz}^2)+ & 2f_x f_z(f_{yz}f_{xy} - f_{yy}f_{xz})+ \\ f_z^2(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)+ & 2f_x f_y(f_{xz}f_{yz} - f_{zz}f_{xy}) \Big] \end{array} \tag{C.14}$$

$$H = \frac{1}{2h^{3/2}}\Big[\begin{array}{ll} f_x^2(f_{yy} + f_{zz})- & 2f_y f_z f_{yz}+ \\ f_y^2(f_{xx} + f_{zz})- & 2f_x f_z f_{xz}+ \\ f_z^2(f_{xx} + f_{yy})- & 2f_x f_y f_{xy} \Big] \end{array} \tag{C.15}$$

where $h = f_x^2 + f_y^2 + f_z^2$. **x**,**y**,**z** have the same role in these equations so these formulas do not give a specific role to a particular direction of the space.

C.2.2 Estimation of the parameters of the diffusion functions

Intuitively, we want to eliminate the noise in the estimation of the parameters of the different diffusion functions C_ξ, C_{e_1} and C_{e_2}. We use the same idea as Catté et al, i.e. we compute these values on a smoothed image u^*. The equation (C.7) becomes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_\xi(\mid \nabla u^* \mid) u_{\xi\xi} + C_{e_1}(\mid \nabla u^* \mid, \mid k_1^* \mid) u_{e_1 e_1} + C_{e_2}(\mid \nabla u^* \mid, \mid k_2^* \mid) u_{e_2 e_2} \tag{C.16}$$

where $\mid \nabla u^* \mid$, $\mid k_1^* \mid$ and $\mid k_2^* \mid$ are respectively the norm of the gradient, the maximum and the minimum curvature of the convolved image with a Gaussian G_σ.

In order to be able to compare our process with the process of Perona and Malik, we will use the following equation without smoothing the gradient to compute its norm:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_\xi(\mid \nabla u \mid) u_{\xi\xi} + C_{e_1}(\mid \nabla u \mid, \mid k_1^* \mid) u_{e_1 e_1} + C_{e_2}(\mid \nabla u \mid, \mid k_2^* \mid) u_{e_2 e_2} \tag{C.17}$$

C.2.3 The choice of the diffusion functions

We use the following principle to choose the three diffusion functions:

1. we choose a **threshold** k on the value of the gradient magnitude and we suppose that $\mid \nabla u \mid > k$ in regions of frontier between different structures (or contours).

2. if $| \nabla u | < k$, we use functions which are equivalent to the process of Perona and Malik and which ensure properties of convergence.

$$\begin{aligned} C_\xi &= \Phi''(| \nabla u |) \\ C_{e_1} = C_{e_2} &= \frac{\Phi'(| \nabla u |)}{| \nabla u |} \end{aligned}$$

3. if $| \nabla u | > k$, we compute the values of the principal curvature of the smoothed image k_1^* and k_2^* and use the following coefficients:

$$\begin{aligned} C_\xi &= \Phi''(| \nabla u |) \\ C_{e_1} &= \frac{\Phi'(| \nabla u |)}{| \nabla u |} h_1(| k_1^* | , | k_2^* |) \\ C_{e_2} &= \frac{\Phi'(| \nabla u |)}{| \nabla u |} h_2(| k_1^* | , | k_2^* |) \end{aligned}$$

where h_1 and h_2 are functions from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}$ which satisfy the properties:

$$\begin{array}{lcl} \forall k_1,k_2 \in \mathbb{R} \text{ with } k_1 > k_2, & \text{we have} & h_1(k_1,k_2),h_2(k_1,k_2) \in [0,1] \\ & \text{and} & h_2(k_1,k_2) > h_1(k_1,k_2) \end{array}$$

C.3 Experiments

For the experiments, we chose the functions of Green [Green, 1990] (Fig. C.2) which satisfy the properties of stability (C.18,C.19) and restoration (C.20) for the Perona and Malik process defined in [Deriche et Faugeras, 1995].

$$\Phi''(| \nabla u |) \geq 0 \tag{C.18}$$

$$\Phi'(| \nabla u |) \geq 0 \tag{C.19}$$

$$\lim_{x \to \infty} \Phi''(x) = 0 \text{ and } \lim_{x \to \infty} \frac{\Phi'(x)}{x} = 0 \text{ and } \lim_{x \to \infty} \frac{x\, \Phi''(x)}{\Phi'(x)} = 0 \tag{C.20}$$

We chose h_1 and h_2 as constant functions of values 0 and 1 to ensure that the diffusion along the direction of maximum curvature is stopped near the frontier of the vessels. We plan to experiment functions depending on the absolute values of the curvatures of the smoothed image k_1^* and k_2^*.

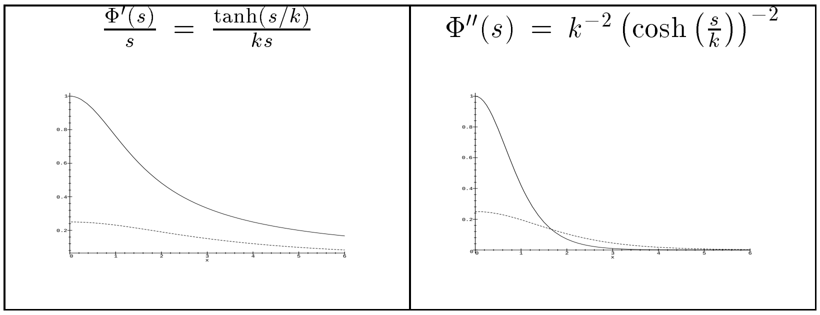


FIG. C.2 – *Diffusion function of Green with threshold $k = 1$ (plain line) and $k = 2$ (doted line).*

C.3.1 Phantom image

We created a phantom image containing three torus with the same small radius (2 voxels) and different large radii (7, 14 and 22 voxels). Those are like vessels with small radius and high intensity (100 for the torus and 0 for the background). The image has been smoothed with a Gaussian of standard deviation 0.7 (to simulate partial volume effect) and blurred with an additive Gaussian white noise of standard deviation 300.

The figure C.3 represents isosurfaces taken from the original and processed images, with the same threshold $h = 30$, which corresponds roughly to the "contours" defined by $| \nabla u |> k$ for $k = 20$. We can see a better conservation of the "vessels" size on the bottom right, for a similar level of noise reduction between the bottom left and the bottom right images of figure C.3.

C.3.2 Real image of vessels

We applied our algorithm to a 64^3 sub-volume taken from a 3D angiography of the brain (courtesy of Dr. Yves Trousset, General Electric Medical Systems Europe, Buc, France).

The standard deviation σ of the smoothed image shown in fig. C.4 has been chosen in order to obtain a scale which can be compared to the scale t of diffusion used for the two images in fig. C.5. So we have the relation $t = \frac{\sigma^2}{2}$.

The expected advantage of anisotropic diffusion (figure C.5, left) versus Gaussian convolution (figure C.4, right) is clearly shown. Figure C.5 (right) illustrates the advantage of privileging anisotropic diffusion within the plane tangent to the "contour" isosurfaces in the direction of minimum curvature (in absolute value). In particular, one can see a much better preservation of the vessels connectivity for a comparable noise reduction. Also, a close comparison between (figure C.5, left) and (figure C.5, right) shows a better conservation of the diameter size of the small vessels like the vertical one in the central part of the figures.

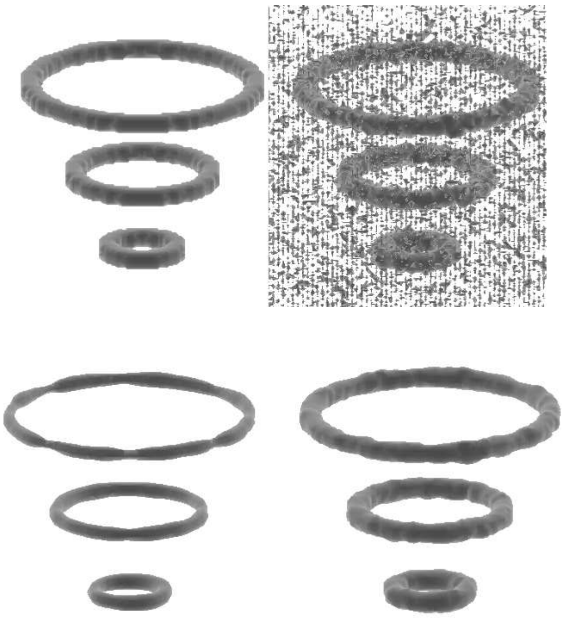


Fig. C.3 – **On the top left**, *the synthetic image with three torus.* **On the top right**, *the same image smoothed and blurred.* **On the bottom left**, *Perona and Malik diffusion with Green function.* **On the bottom right**, *direction oriented process privileging the direction of minimum curvature (in absolute value), in the plane tangent to the "contour" isosurface.*

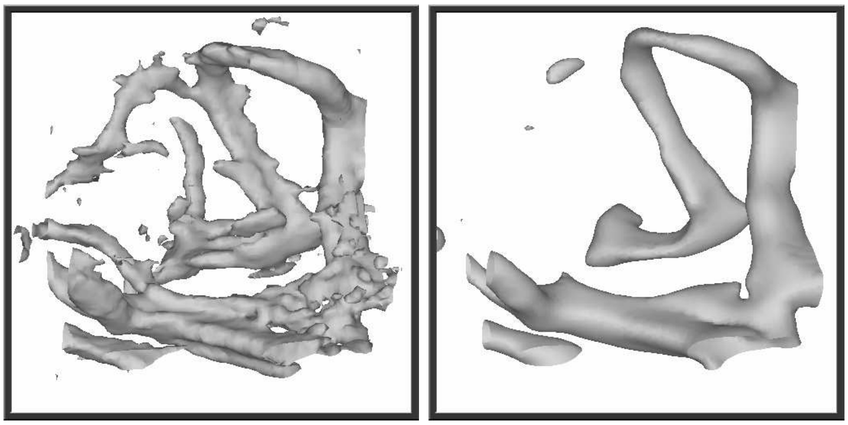


Fig. C.4 – *Isosurfaces with threshold of 1000.* **On the left** *the initial image.* **On the right** *the initial image convolved with a Gaussian of standard deviation 2.*

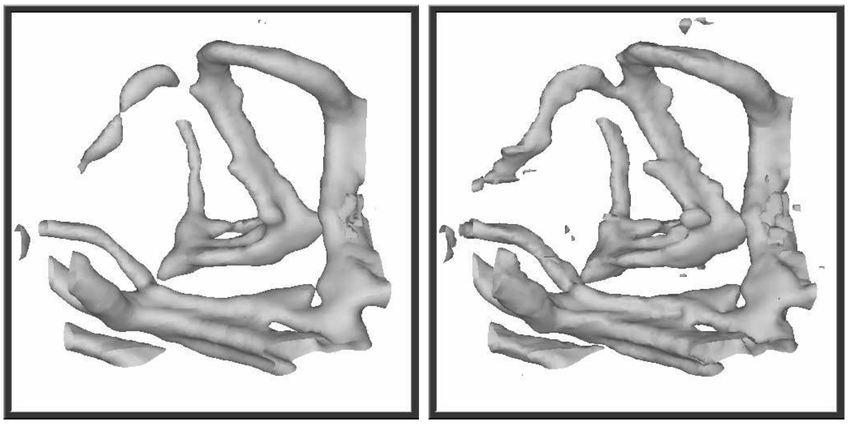


FIG. C.5 – *Isosurfaces with threshold of 1000.* **On the left** *anisotropic diffusion with Green function.* **On the right** *direction oriented process privileging the direction of minimum curvature (in absolute value), in the plane tangent to the "contour" isosurface.*

Annexe D

Study of the Hessian matrix for different models of vessels

D.1 Eigenvalues for a toroidal model with circular section

The vessel model is a torus, with the big circle of radius R parallel to the plane XY and the small circle has a radius equal to r. The square distance from a given point $M(x,y,z)$ to the axis of the torus is given by:

$$\left(R - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2$$

derived from the cylindrical model, we can take the following function of intensity:

$$I(x,y,z) = Ce^{-\frac{\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2}{2\sigma_0^2}}$$

The first and second derivatives are:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial x} &= \frac{Ix}{\sigma_0^2}\left(\frac{R}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right) \\
\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} &= \frac{Ixy}{\sigma_0^2}\left[\frac{1}{\sigma_0^2}\left(\frac{R}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right)^2 - \frac{R}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right] \\
\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} &= \frac{Ix^2}{\sigma_0^4}\left(\frac{R}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right)^2 + \frac{I}{\sigma_0^2}\left[\frac{Ry^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - 1\right] \\
\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} &= \frac{I}{\sigma_0^4}(z^2 - \sigma_0^2) \\
\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial z} &= -\frac{Ixz}{\sigma_0^4}\left(\frac{R}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right)
\end{aligned}$$

From the circular symmetry around Oz axis we can choose $y = 0$ and $x > 0$, then the Hessian can be expressed as:

$$H = \frac{I(x,y,z)}{\sigma_0^4} H_0,$$

where

$$H_0 = \begin{bmatrix} (R-x)^2 - \sigma_0^2 & 0 & -z(R-x) \\ 0 & \frac{(R-x)\sigma_0^2}{x} & 0 \\ -z(R-x) & 0 & z^2 - \sigma_0^2 \end{bmatrix}.$$

The determinant of $H_0 - \lambda Id$ is:

$$\begin{aligned} det &= \left(\frac{(R-x)\sigma_0^2}{x} - \lambda\right) \left[\left((R-x)^2 - \sigma_0^2 - \lambda\right)\left(z^2 - \sigma_0^2 - \lambda\right) - z^2(R-x)^2\right] \\ &= \left(\frac{(R-x)\sigma_0^2}{x} - \lambda\right) \left[\lambda^2 - \lambda\left((R-x)^2 + z^2 - 2\sigma_0^2\right) + \sigma_0^4 - \sigma_0^2\left((R-x)^2 + z^2\right)\right] \\ &= \left[\frac{(R-x)\sigma_0^2}{x} - \lambda\right] \left[\lambda - \left((R-x)^2 + z^2 - \sigma_0^2\right)\right] \left[\lambda + \sigma_0^2\right] \end{aligned}$$

and the eigenvalues of H_0 are:

$$\begin{array}{ccc} \lambda_3 = \frac{(R-x)\sigma_0^2}{x} & \lambda_2 = (R-x)^2 + z^2 - \sigma_0^2 & \lambda_1 = -\sigma_0^2 \\ \vec{\mathbf{v}}_3 = (0,1,0) & \vec{\mathbf{v}}_2 = (x-R,0,z) & \vec{\mathbf{v}}_1 = (z,0,R-x) \end{array}$$

and the eigenvalues of H:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= -\frac{I}{\sigma_0^2}\left(\frac{x-R}{x}\right) \\ \lambda_2 &= -\frac{I}{\sigma_0^2}\left[1 - \left(\frac{CM}{\sigma_0}\right)^2\right] \\ \lambda_1 &= -\frac{I}{\sigma_0^2}. \end{aligned}$$

D.2 Eigenvalues for a cylindrical model with elliptical section

The elliptical section is defined by one standard deviation along the x axis, σ_x, and one standard deviation along the y axis, σ_y. The model is then defined by:

$$I(x,y,z) = Ce^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2\right]}$$

The Hessian matrix can be expressed as

$$H = \frac{I(x,y,z)}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} H_0$$

where

$$H_0 = \begin{bmatrix} \sigma_y^2\left(X^2-1\right) & \sigma_x\sigma_y XY & 0 \\ \sigma_x\sigma_y XY & \sigma_x^2\left(Y^2-1\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

with $X = \frac{x}{\sigma_x}$ and $Y = \frac{y}{\sigma_y}$.
The determinant of $H_0 - \lambda Id$ is

$$\begin{aligned} det &= -\lambda\left[\lambda^2 - \lambda\left(E+G\right) + EG - F^2\right] \\ &= -\lambda\left[\lambda^2 - \lambda\left(\sigma_y^2X^2 + \sigma_x^2Y^2 - \sigma_x^2 - \sigma_y^2\right) + \sigma_x^2\sigma_y^2\left(1 - X^2 - Y^2\right)\right]. \end{aligned}$$

Let $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda\left(E+F\right) + EF - G^2$,
the determinant of P is

$$\Delta = (E+G)^2 - 4(EG - F^2) = (E-G)^2 + 4F^2 > 0 \text{ if } \sigma_x \neq \sigma_y$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(E + G - \sqrt{\Delta}) \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(E + G + \sqrt{\Delta}).$$

The expression of the eigenvalues is $\frac{1}{2}(E+G \pm \sqrt{(E+G)^2 + 4(F^2 - EG)})$ where $F^2 - EG = \sigma_x^2\sigma_y^2\left[(\frac{x}{\sigma_x})^2 + (\frac{y}{\sigma_y})^2 - 1\right]$. We can then distinguish three cases depending on the position of $M(x,y)$:

(1)	$(\frac{x}{\sigma_x})^2 + (\frac{y}{\sigma_y})^2 - 1 < 0$	M is *inside* the ellipse,	$E < 0, G < 0,$	$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$
(2)	$(\frac{x}{\sigma_x})^2 + (\frac{y}{\sigma_y})^2 - 1 = 0$	M is *on* the ellipse,	$E + G < 0,$	$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 = 0$
(3)	$(\frac{x}{\sigma_x})^2 + (\frac{y}{\sigma_y})^2 - 1 > 0$	M is *outside* the ellipse,	$\sqrt{\Delta} > E + G,$	$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$

We can also study the eigenvalues along the x and y axis. In both cases, $F = 0$ and H_0 is diagonal so $\vec{\mathbf{v}}_1 = (1{,}0{,}0)$ and $\vec{\mathbf{v}}_2 = (0{,}1{,}0)$ and:

x axis	$\lambda_1 = -\frac{I}{\sigma_x^2}$	$\lambda_2 = -\frac{I}{\sigma_y^2}\left(1 - \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)$
y axis	$\lambda_1 = -\frac{I}{\sigma_x^2}\left(1 - \frac{x^2}{\sigma_x^2}\right)$	$\lambda_2 = -\frac{I}{\sigma_y^2}$

$$\vec{\mathbf{v}}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i - G \\ F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ \lambda_i - E \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{for } i \in \{1,2\}. \tag{D.1}$$

Annexe E

Expression of the multiscale response function

E.1 Expression of the maximal scale depending on γ

We want to detect the axis of the vessel which is defined by $x = y = 0$. The response at a point $M(0{,}0{,}z)$ is given by:

$$R_t(\bar{x}) \;=\; \frac{1}{2\theta\pi\sqrt{t}} \int_{\bar{x}\in C_{\theta\sqrt{t}}} |\nabla L(\bar{x},t).\vec{n}|\, d\bar{x}$$

which corresponds to the mean of the vector product of the gradient with the unit radial vector along the circle of center $(0{,}0{,}z)$ and of radius $\theta\sqrt{t}$. The gradient and the normal vector $\vec{n}$ have the following expressions:

$$\nabla L(\bar{x},t) = L(\bar{x},t)\frac{-1}{t+\sigma_0^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ with } x^2+y^2=\theta^2 t$$

then

$$|\nabla L(\bar{x},t).\vec{n}| = C\frac{\theta\sqrt{t}}{2\pi\,(t+\sigma_0^2)^2}\, e^{-\frac{\theta^2 t}{2(t+\sigma_0^2)}}$$

This last expression is no longer a function of $\bar{x}$, then the mean of this expression along the circle is straightforward, and

$$R_t \;=\; C\frac{\theta\sqrt{t}}{2\pi\,(t+\sigma_0^2)^2}\, e^{-\frac{\theta^2 t}{2(t+\sigma_0^2)}}$$

The normalized response R_t^n is defined by $R_t^n = t^{\gamma/2} R_t$ and its partial derivative on t is:

$$\frac{\partial R_t^n}{\partial t} = A \frac{C t^{\frac{\gamma-1}{2}}}{4\pi\,(t+\sigma_0^2)^4} e^{-\frac{\theta^2 t}{2(t+\sigma_0^2)}}$$

$$\text{with } A = (\gamma-3)t^2 + (2\gamma - 2 - \theta^2)\,\sigma_0^2\,t + (1+\gamma)\sigma_0^4.$$

We are looking for the value of γ which gives a maximum for the function R_t^n at $t = \sigma_0^2$. Thus we want $\frac{\partial R_t^n}{\partial t}$ to have a positive root which corresponds to a maximum.

The sign of $\frac{\partial R_t^n}{\partial t}$ is the same as the sign of A, and the expression A, when $\gamma < 3$ and the determinant Δ is also positive, has only one positive root which corresponds to a maximum for R_t^n: $h(\gamma,\theta)\sigma_0^2$, with

$$h(\gamma,\theta) = \frac{\sqrt{\Delta} + 2\gamma - 2 - \theta^2}{2(3-\gamma)}$$

with

$$\Delta = \left[\theta^2 - (2\gamma-2)\right]^2 + 16 - (2\gamma-2)^2.$$

E.2 Response for the convolved bar-like model

The analytic definition of the model was given by équation (10.1), and is

$$\begin{aligned} I(x,y,z) &= f_r(x,y) * G_{\sigma_p}(x,y) \\ &= \big(f_r(x,y) * G_{\sigma_p}(x)\big) * G_{\sigma_p}(y) \end{aligned}$$

The convolution product can be replaced by integrals, then the integral through x axis is expressed as following:

$$\begin{aligned} f_r(x,y) * G_{\sigma_p}(x) &= \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} f_r(x-t,y) G_{\sigma_p}(t) dt \\ &= \int_{t=-x-r_1}^{t=-x+r_1} f_r(x-t,y) G_{\sigma_p}(t) dt \end{aligned}$$

where $r_1 = \sqrt{r^2 - y^2}$

$$\begin{aligned} f_r(x,y) * G_{\sigma_p}(x) &= \int_{t=-x-r_1}^{t=-x+r_1} G_{\sigma_p}(t) dt \\ &= \mathcal{G}_{\sigma_p}(-x + \sqrt{r^2-y^2}) - \mathcal{G}_{\sigma_p}(-x - \sqrt{r^2-y^2}) \\ &= \mathcal{G}_{\sigma_p}(x + \sqrt{r^2-y^2}) - \mathcal{G}_{\sigma_p}(x - \sqrt{r^2-y^2}) \end{aligned}$$

where $\mathcal{G}_{\sigma_p}$ is a primitive of G_{σ_p} chosen to be an odd function.

$$\mathcal{G}_{\sigma_p} = \frac{1}{2}\, erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma_p}\right)$$

where the function erf is defined by:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t=0}^{x} e^{-t^2} dt$$

$$\begin{aligned}
I_{\sigma_p}(x,y,z) &= f_r(x,y) * G_{\sigma_p}(x,y) \\
&= \big(f_r(x,y) * G_{\sigma_p}(x)\big) * G_{\sigma_p}(y) \\
&= \int_{-r}^{+r} \left[\mathcal{G}_{\sigma_p}(x + \sqrt{r^2 - u^2}) - \mathcal{G}_{\sigma_p}(x - \sqrt{r^2 - u^2})\right] G_{\sigma_p}(y - u) du \qquad \text{(E.1)}
\end{aligned}$$

The derivative of the intensity along x axis can also be expressed analytically, and then the expression of the response at the vessel center and for a scale $t = \sigma^2$ is deduced:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_{\sigma_p}}{\partial x}(x,y,z) &= \int_{-r}^{+r} \left[G_{\sigma_p}(x + \sqrt{r^2 - u^2}) - G_{\sigma_p}(x - \sqrt{r^2 - u^2})\right] G_{\sigma_p}(y - u) du \qquad \text{(E.2)} \\
R_\sigma = \frac{\partial I_\alpha}{\partial x}(\theta\sigma,0,z) &= \int_{-r}^{+r} \left[G_\alpha(\theta\sigma + \sqrt{r^2 - u^2}) - G_\alpha(\theta\sigma - \sqrt{r^2 - u^2})\right] G_\alpha(-u) du \qquad \text{(E.3)}
\end{aligned}$$

with $\alpha = \sqrt{\sigma_p^2 + \sigma^2}$.

Annexe F

Interpolation linéaire des images

Le problème de l'interpolation de données discrètes est un problème important en traitement d'images. Nous ne l'aborderons pas dans cette annexe mais nous définissons l'interpolation linéaire et donnons quelques propriétés utiles de cette interpolation. Cette interpolation linéaire est en particulier utilisée pour le calcul de l'aire des sections des vaisseaux, et nous donnons dans cette annexe l'expression de l'aire de la surface négative d'un pixel sous cette hypothèse.

F.1 Définition de l'interpolation linéaire

Soit une image I représentée par un ensemble de valeurs $F(i,j,k)$ avec $i,j,k \in [0,N-1]$. L'interpolation consiste à étendre la définition de F sur un domaine réel, tout en conservant des valeurs proches ou identiques aux points (i,j,k). Un des moyens les plus simples et les plus utilisés est l'interpolation linéaire, cette interpolation a l'avantage d'être très rapide à calculer car elle n'utilise que le voisinage le plus proche des points interpolés. Pour définir l'interpolation, il suffit donc de la définir sur l'élément le plus simple : un segment en 1D, un carré en 2D, un cube en 3D, etc... Dans le cas 1D, cette interpolation s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_{[0,1]}, \quad \widetilde{F}(x) &= (1-x) * F(0) + x * F(1) \\ &= F(0) + (F(1) - F(0)) * x \end{aligned}$$

Un moyen souvent utilisé pour étendre une interpolation définie en dimension 1 à une interpolation en dimension quelconque est le "produit tensoriel" : Il consiste à séparer les interpolations dans chaque dimension. Par exemple, en 2D à interpoler les lignes, puis à utiliser le résultat pour interpoler les colonnes. L'interpolation en dimension $n+1$ peut se définir de manière récursive à partir de l'interpolation en dimension n :

$$\begin{aligned} \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{[0,1]}, \quad \widetilde{F}(x_1, \cdots, x_n) = \; & (1-x_n) * \widetilde{F}_{x_n=0}(x_1, \cdots, x_{n-1}) + \\ & x_n * \widetilde{F}_{x_n=1}(x_1, \cdots, x_{n-1}). \end{aligned} \tag{F.1}$$

Dans le cas 2D, cette interpolation (dite bilinéaire) s'écrit :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}_{[0,1]}, \quad \widetilde{F}(x,y) \;=\; \begin{array}{ccl} (1-y) & * & [(1-x)*F(0,0) \;+\; x*F(1,0)] \;+ \\ y & * & [(1-x)*F(0,1) \;+\; x*F(1,1)]\,. \end{array} \tag{F.2}$$

Dans le cas 3D, cette interpolation (dite trilinéaire) s'écrit :

$$\forall x,y,z \in \mathbb{R}_{[0,1]}, \quad \widetilde{F}(x,y,z) \;=\; (1-z)*\widetilde{F}_{z=0}(x,y) \;+\; z*\widetilde{F}_{z=1}(x,y) \tag{F.3}$$

Permuter l'ordre des interpolations ne change pas le résultat.

Il faut noter que cette interpolation crée une image linéaire par morceaux et n'assure pas de continuité des dérivées de l'image. D'autres interpolations plus évolués comme les splines ou les interpolations utilisant la transformation de Fourier (sinc) peuvent assurer une continuité des dérivées.

En pratique les coefficients associés à chaque sommet du cube sont calculés en minimisant le nombre de multiplications à l'aide de factorisations.

F.2 Calcul de l'aire

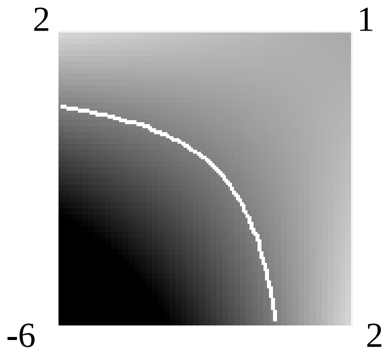


FIG. F.1 – *Exemple d'interpolation 2D dans un carré avec $a_1 = -6$, $a_2 = a_3 = 2$, $a_4 = 1$. La ligne blanche représente l'isocontour de valeur 0.*

Dans le calcul de l'aire effectué dans le chapitre 13 pour la quantification de la section des vaisseaux, l'interpolation sert à délimiter la frontière des vaisseaux. Cette frontière est définie par le passage par zéro de l'image interpolée.

Dans le cas 2D, supposons un carré avec les 4 sommets

$$s_{00} \longrightarrow a_1,\; s_{01} \longrightarrow a_2,\; s_{10} \longrightarrow a_3,\; s_{11} \longrightarrow a_4. \tag{F.4}$$

L'isocontour de passage par zéro de la fonction interpolée

$$\widetilde{F}(x,y) \quad = \quad 0$$

Or

$$\widetilde{F}(x,y) = (a_1 + (a_2 - a_1)x) + [(a_3 + (a_4 - a_3)x) - (a_1 + (a_2 - a_1)x)]\, y$$

L'équation de l'isocontour est une hyperbole qui s'écrit alors :

$$y = g(x) = \frac{-a_1 - (a_2 - a_1)x}{a_3 - a_1 + (a_4 - a_3 - a_2 + a_1)x}.$$

Le calcul de la surface négative dans ce carré peut s'effectuer de manière analytique. Dans le cas $a_1 < 0$ et $a_2,a_3,a_4 > 0$:

$$S^- = \int_{x=0}^{\frac{-a_1}{a_2-a_1}} g(x)dx$$

où g est une fonction rationnelle de la forme

$$g(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}.$$

De manière générale,

$$\int_{x=\alpha}^{\beta} \frac{ax+b}{cx+d}dx = \int_{x=\alpha}^{\beta} \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}dx \qquad \text{(F.5)}$$

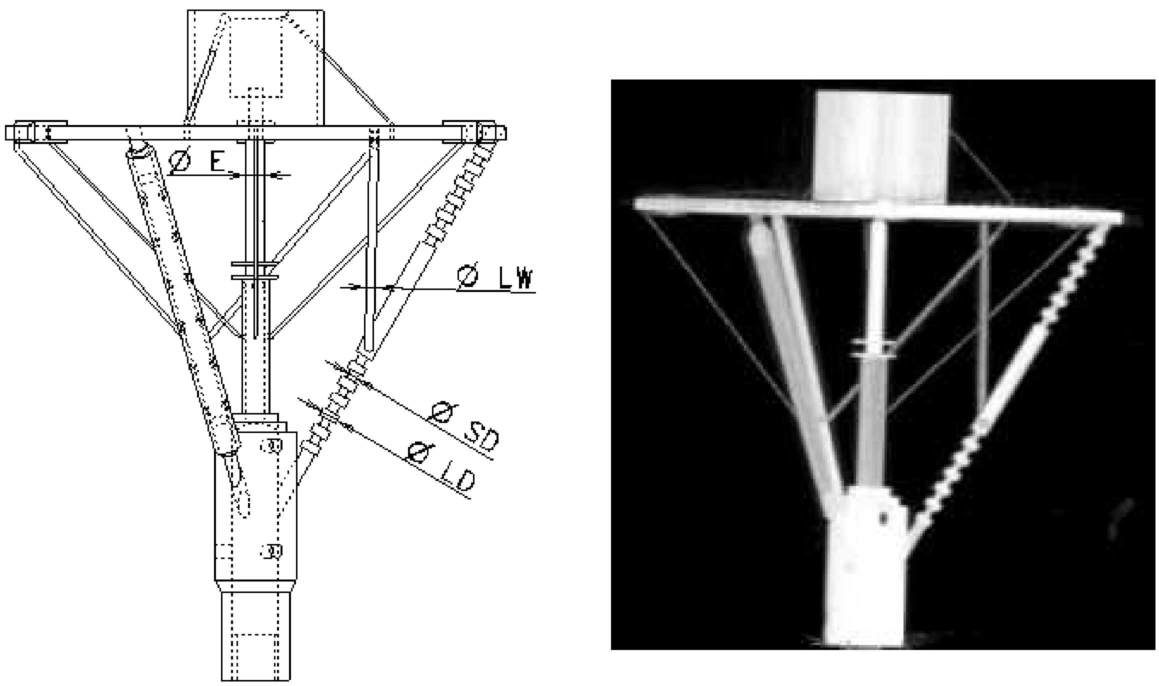
$$= \frac{a}{c}(\beta - \alpha) + \frac{bc-ad}{c^2}\left[ln(c\beta + d) - ln(c\alpha + d)\right]. \qquad \text{(F.6)}$$

Ainsi le calcul de la surface négative peut se faire analytiquement dans le cas 2D, il suffit de gérer les différents cas.

Annexe G

Phantom image

We have a phantom image created by General Electric Medical Systems, on which the sizes of the different structures is known before the acquisition. This image is coded on 2 bytes and its size is $512 \times 512 \times 512$, the voxels are isotropic with a size of 0.267 mm. Fig. G.1 shows two Maximum Intensity Projections of this image compared with its map containing real sizes of some structures.



$E = LD = 4mm$, $LW = SD = 2mm$

FIG. G.1 – *Phantom image. Left, map of the phantom with the known structures radii. Right, corresponding MIP view.*

Annexe H

Algorithm for the multiscale centerline detection

This appendix gives a description of the main algorithms used for the detection of the vessels centerlines.
The methods can be split into three stages:

- the main loop: scale,
- computation of the response for one scale,
- extraction of local maxima in the result image R_{max} and evaluation of the size of vessels.

We first give a brief description of the parameters of the program, then we give the algorithm for each of the three main stages.

H.1 The parameters of the program

The main parameters of the program are:

- the initial image:	I_0 ,
- the resulting image:	I_{res},
- the minimal radius:	r_{min},
- the maximal radius:	r_{max},
- the number of scales:	$nbscales$,
- the normalization parameter:	γ ,
- the proportionality coefficient:	θ.

The function $h(\gamma,\theta)$ that relates the maximal scale to the radius of the vessel is used to compute the scales associated to the given radii. This function is given by equation (11.5). In practise, we use $\gamma = 1$ and $\theta = \sqrt{3}$ as proposed in section 11.4.3. Nevertheless, this constant is optimal for a Gaussian-like vessel profile and the optimal value of θ should be found for the convolved-bar model.

H.2 The main loop

We use a logarithmic scale in order to have more precision at low scales where the standard deviation is smaller and where we want to detect smaller structures.

Algorithm 1 MAIN LOOP

MAIN LOOP()

```
Initialize the images
```

$r \leftarrow r_{min}$

$step \leftarrow e^{\frac{ln(t_{max})-ln(t_{min})}{nbscales-1}}$

for $i \leftarrow 0$ **to** $nbscales - 1$

do $\sigma \leftarrow h(\gamma,\theta)\ r$

    `Compute` $R_\sigma(I_0)$

    UPDATELOCALMAXIMA(i)

    $r \leftarrow r\ .\ step$

```
Save the resulting images.
```

H.3 Computation of R_σ

G_σ is a Gaussian with a standard deviation of σ.

Extraction of local maxima in $R_{max}(I_0)$ The extraction of local maxima at a scale σ_i requires to check the response value at the next scale σ_{i+1}. Thus, we use 4 images:

- R_σ the response at the current scale,
- R_{prev} the response at the previous scale,
- E the local maxima found until the current scale,
- E_{prev} the potential local maxima at single scale.

Remark:
When dealing with non-isotropic voxels, the values of the vectors must be converted between the coordinates of the image and the coordinates of a unit basis.

Algorithm 2 COMPUTATION OF R_σ

```
R(σ)
  we compute  I_σ = I_0 * G_σ
  we also compute all the first and second order derivatives of  I_σ
  all the derivatives are ``γ-normalized''.
  for  each point M in I_0
  do R_σ(M) ← 0
     we compute the eigenvalues and the associated eigenvectors of
     the Hessian matrix of I_σ  H_σ,
     ordered by increasing values:  λ_1 ≤ λ_2 ≤ λ_3, v_1,v_2 and v_3
     // We check that we have two low negative eigenvalues
     if λ_1 ≥ 0 or λ_2 ≥ 0
       then continue
     // Integration along a circle of radius θ σ
     sum ← 0
     N ← E(2πθσ + 1)
     for i ← 0 to N − 1
     do α ← 2πi/N
        v ← cos(α)v_1 + sin(α)v_2
        sum ← sum + v . ∇I_σ(M + θσv)
     R_σ(M) ← −sum/N
```

Algorithm 3 UPDATE LOCAL MAXIMA

```
UpDateLocalMaxima(i)
  if i = 0
    then R_prev ← R_σ
    else for each point M in I_0
          do // If the point M was a potential maxima for the previous scale
             // with a higher value than at the current scale, then it is a maxima
             if E_prev(M) > R_σ(M) and E(M) = 0
               then E(M) ← E_prev(M)
             maxima ← TRUE
             // 1. check that M is a local maxima
             N ← 10
             for i ← 0 to N − 1
             do α ← 2πi/N
                v = cos(α)v_1 + sin(α)v_2
                if R_σ(M + v) > R_σ(M)
                  then maxima ← FALSE
             // 2. check that its value is higher that for previous scale
             maxima ← (maxima = TRUE) and (R_σ(M) > R_prev(M))
             // 3. then it is a potential maxima
             if maxima = TRUE
               then E_prev(M) ← R_σ(M)
               else E_prev(M) ← 0
```

Annexe I

Résultats sur des images de sténoses

Huit images réelles ont étés testées dont six images des carotides et deux images de vaisseaux de l'abdomen. Nous présentons les résultats de l'extraction des lignes centrales et de la quantification de l'aire des sections.

I.1 Carotides

I.1.1 Image carotides 1

sténose sévère, problèmes de continuité de la ligne centrale + extrema locaux parasites.

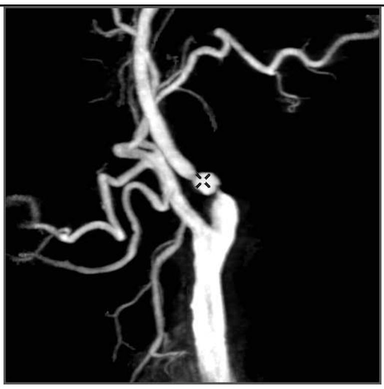
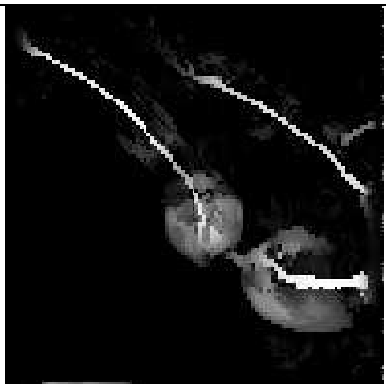
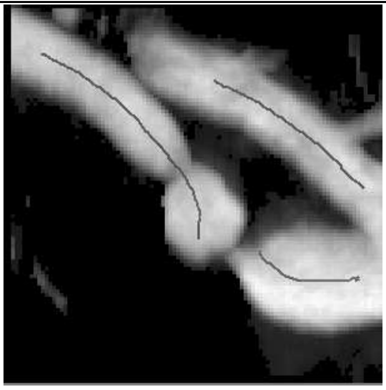


image initiale

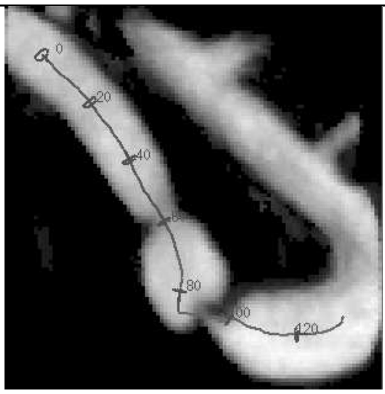
sous-volume extrait



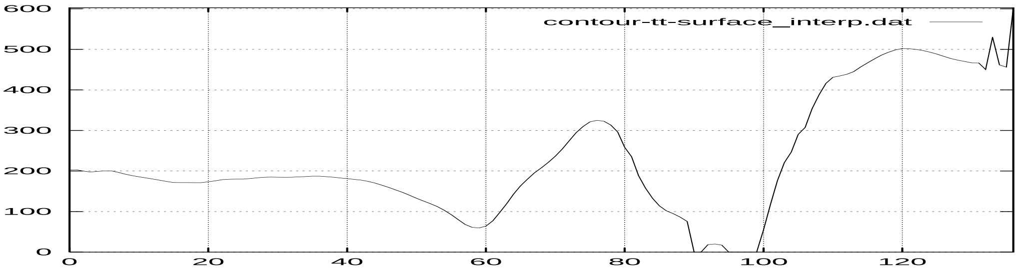
extrema locaux



lignes extraites



ligne choisie pour la quantification

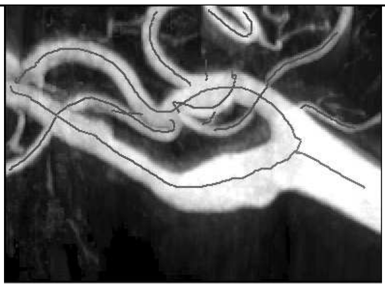
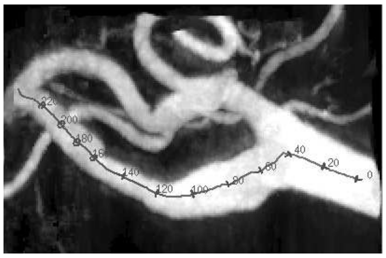


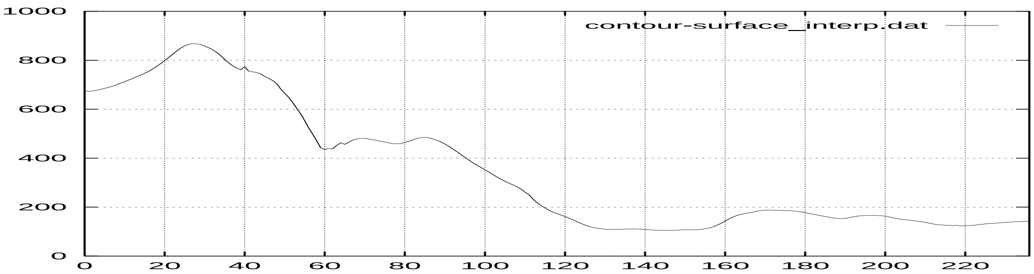
surface (en pixels) en fonction de l'abscisse curviligne

I.1.2 Image carotides 2

Les discontinuités de certains vaisseaux sont dues à leur proximité des bords de l'image.

		
image initiale	sous-volume extrait	extrema locaux

	
lignes extraites	ligne choisie pour la quantification



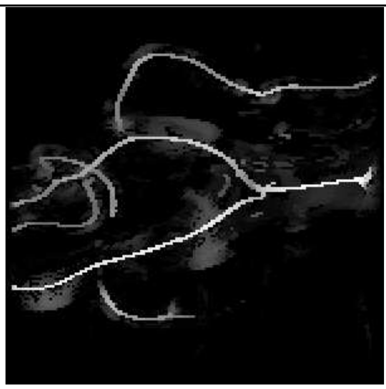
surface (en pixels) en fonction de l'abscisse curviligne

I.1.3 Image carotides 3

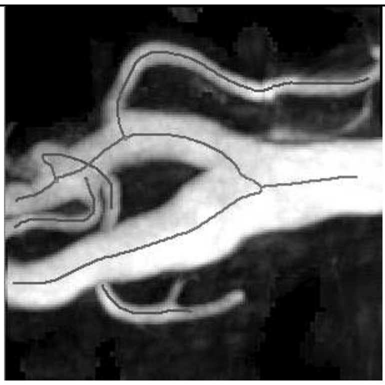
Les discontinuités de certains vaisseaux sont dues à leur proximité des bords de l'image.

image initiale

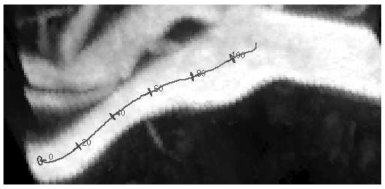
sous-volume extrait



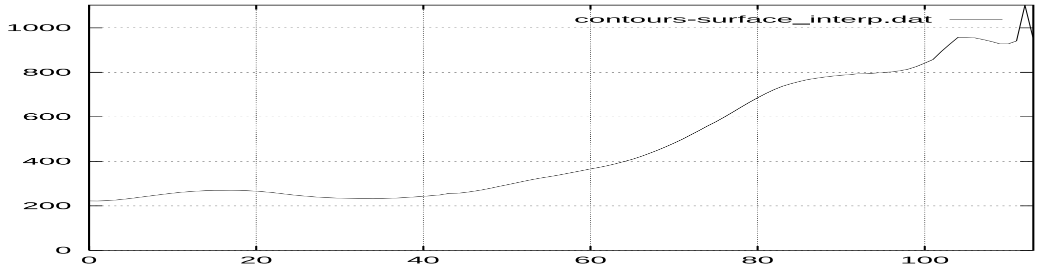
extrema locaux



lignes extraites



ligne choisie pour la quantification



surface (en pixels) en fonction de l'abscisse curviligne

I.1.4 Image carotides 4

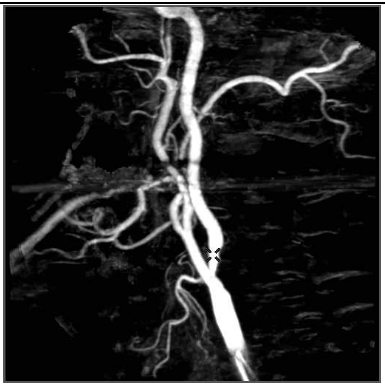
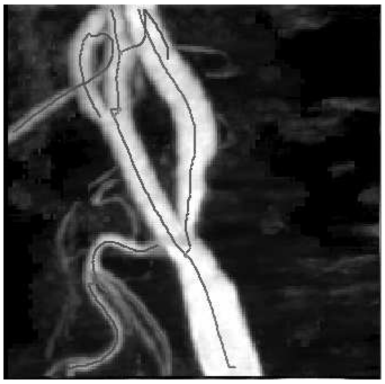
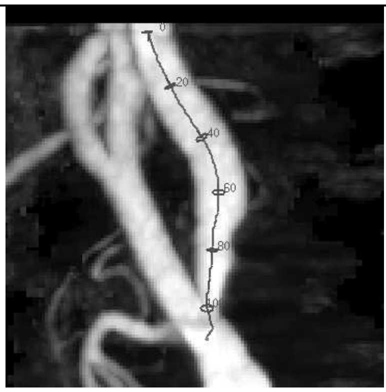
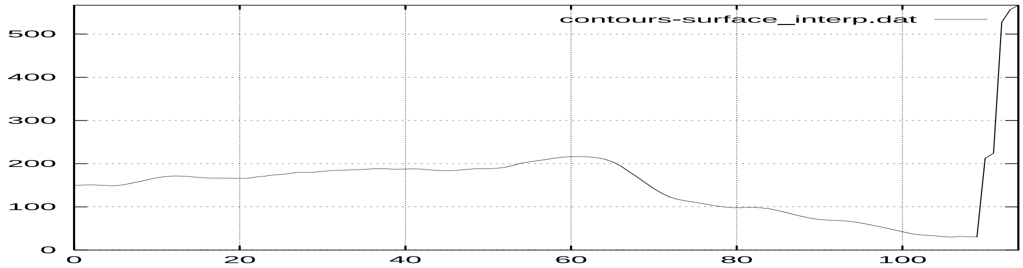


image initiale	sous-volume extrait	extrema locaux

	
lignes extraites	ligne choisie pour la quantification



surface (en pixels) en fonction de l'abscisse curviligne

I.1.5 Image carotides 5

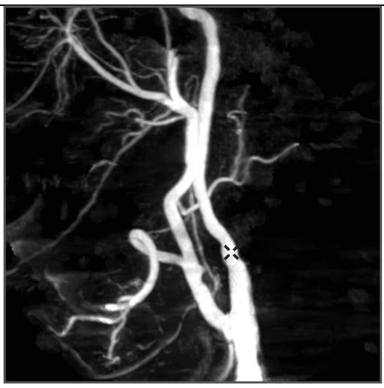
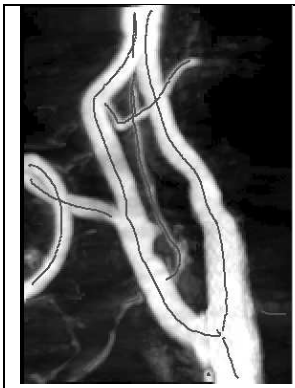


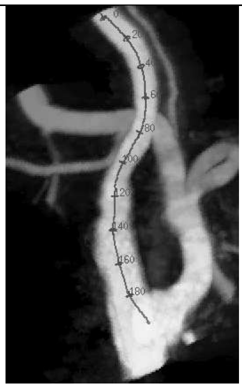
image initiale

sous-volume extrait

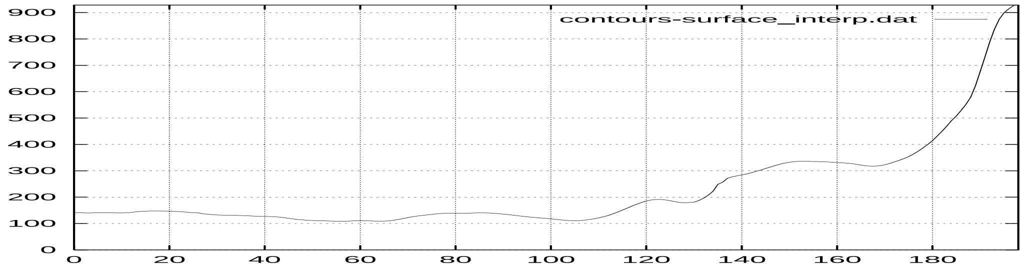
extrema locaux



lignes extraites



ligne choisie pour la quantification



surface (en pixels) en fonction de l'abscisse curviligne

I.1.6 Image carotides 6

Problème de continuité au niveau de la sténose.

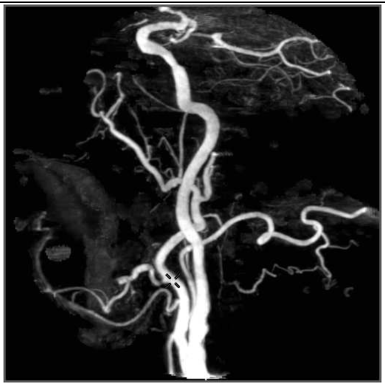
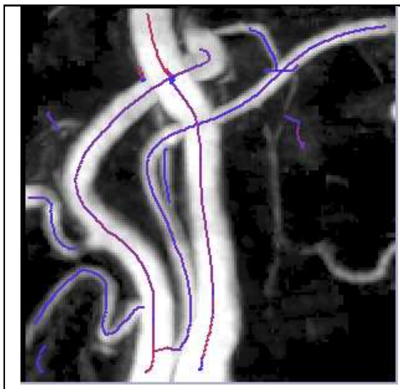
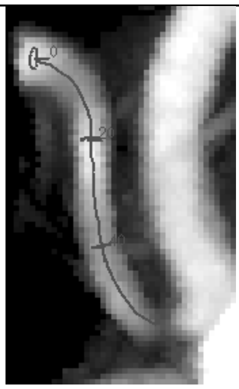
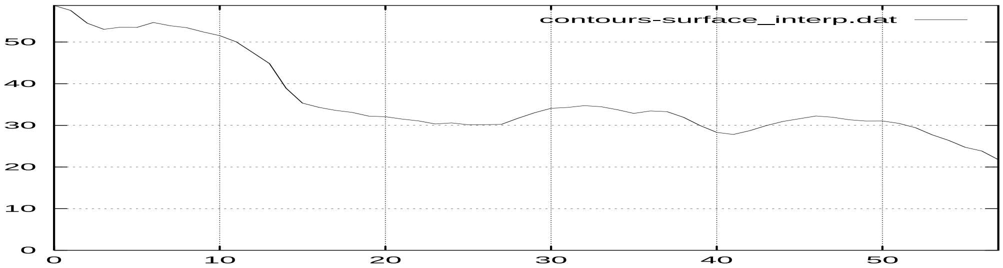


image initiale	sous-volume extrait	extrema locaux

	
lignes extraites	ligne choisie pour la quantification

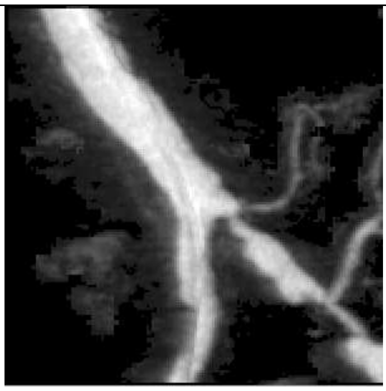
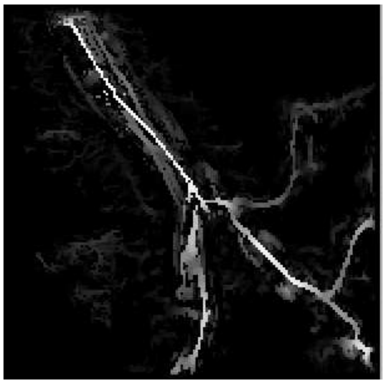


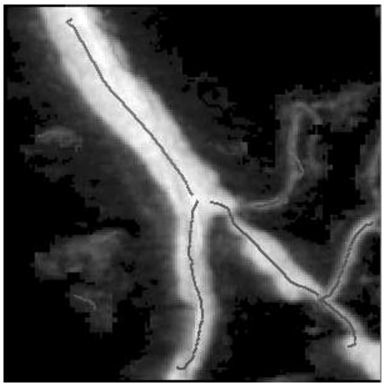
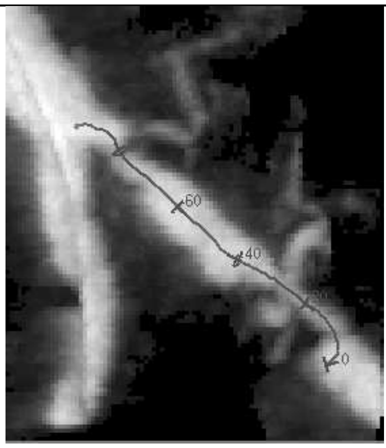
surface (en pixels) en fonction de l'abscisse curviligne

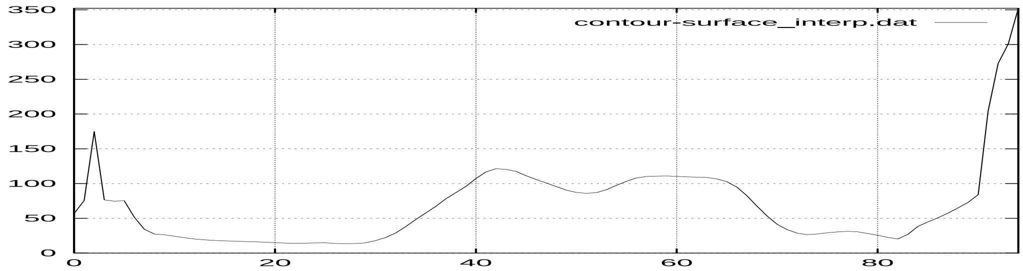
I.2 Abdomen

I.2.1 Image abdomen 1

Problèmes liés à la présence du cathéter dont l'intensité est faible, la division de l'image des extrema par l'image de l'intensité donne des valeurs qui dépassent le seuil haut. Meilleurs résultats après fermeture morphologique.

		
image initiale	sous-volume extrait	extrema locaux

	
lignes extraites	ligne choisie pour la quantification



surface (en pixels) en fonction de l'abscisse curviligne

I.2.2 Image abdomen 2

Problèmes liés au cathéter, bonne détection après fermeture morphologique.

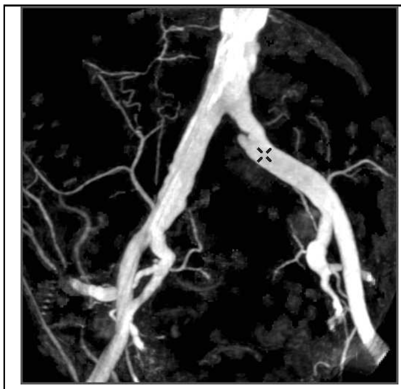
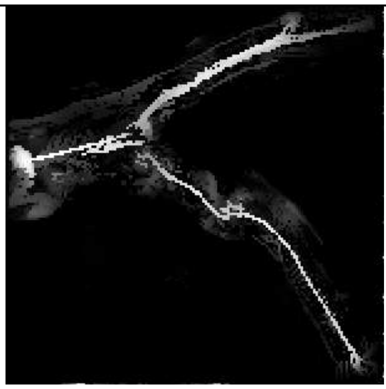
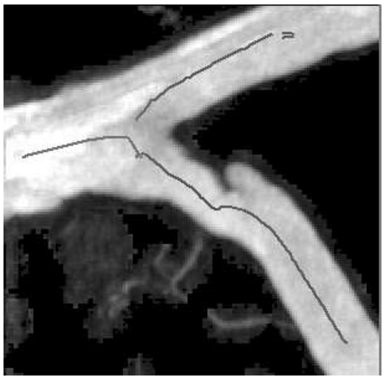


image initiale

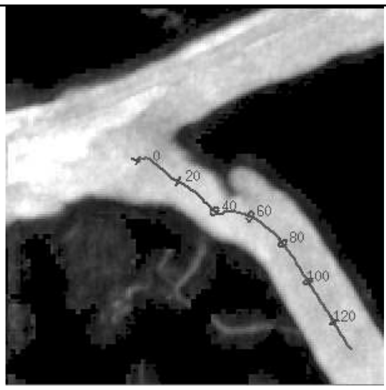
sous-volume extrait



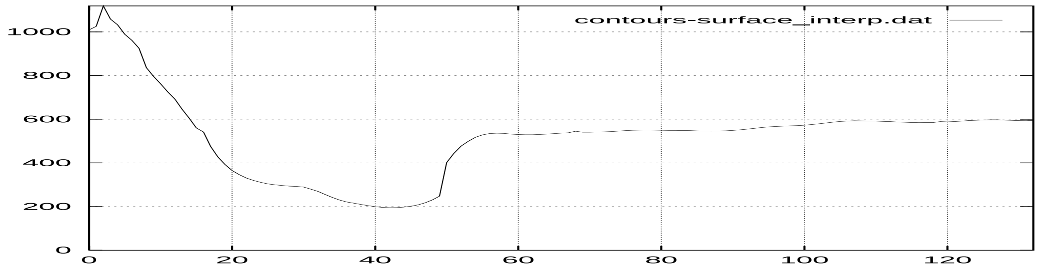
extrema locaux



lignes extraites



ligne choisie pour la quantification



surface (en pixels) en fonction de l'abscisse curviligne

Bibliographie

ACHARYA, R., WASSERMAN, R., STEVENS, J., et HINOJOSA, C. (1995). « Biomedical imaging modalities ». *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 19(1):1–25.

ADALSTEINSSON, D. et SETHIAN, J. (1995). « A fast level set method for propagating interfaces ». *J. of Comp. Phys.*, 118:269–277.

ALDROUBI, A. et UNSER, M. (1994). « Sampling Procedures in Function Spaces and Asymptotic Equivalence with Shannon's Sampling Theory ». volume 15, pages 1–22.

ALMANSA, A. et LINDEBERG, T. (1998). « Fingerprint Enhancement by Shape-Adaptation of Scale-Space Operators with Automatic Scale selection ». Rapport technique ISRN KTH.NA.R-99.01-SE, KTH, NADA, Stockholm, Sweden. http://www.nada.kth.de/cvap/abstracts/cvap226.html.

ALVAREZ, L., GUICHARD, F., LIONS, P., et MOREL, J. (1993). « Axioms and fundamental equations of image processing ». *Archive for Rational Mechanics*, 123(3):199–257.

ALVAREZ, L., LIONS, P., et MOREL, J. (1992). « Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion ». *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 29(3):845–866.

ALVAREZ, L. et MAZORRA, L. (1994). « Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion ». *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 123:590–605.

ANXIONNAT, R., BRACARD, S., MACHO, J., DA COSTA, E., VAILLANT, R., et LAUNAY, L. (1998). « 3D Angiography. Clinical interest. First applications in Interventional Neuroradiology ». *J. Neuroradiol.*, 20:251–262.

AREHART, A., VINCENT, L., et KIMIA, B. (1993). « Mathematical Morphology: The Hamilton-Jacobi connection ». Dans *Proceedings of the International Conference on Computer Vision*, pages 215–219, Los Alamitos. IEEE Computer Society Press.

ASADA, H. et BRADY, M. (1986). « The curvature primal sketch ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8:2–14.

AUBERT, G., BARLAUD, M., BLANC-FÉRAUD, L., et CHARBONNIER, P. (1994). « A Deterministic Algorithm for edge-preserving computed imaging using Legendre transform ». Dans *International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, Jerusalem.

AUBERT, G. et VESE, L. (1997). *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 34(5):1948–1979.

BABAUD, J., WITKIN, A. P., BAUDIN, M., et DUDA, R. O. (1986). « Uniqueness of the Gaussian Kernel for Scale Space Filtering ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8.

BAMBER, J. (1998). « *Ultrasonic Properties of tissues* », Chapitre 4, pages 57–88. Dans [Duck et al., 1998].

BERTRAND, G. et MALANDAIN, G. (1994). « A new characterization of three-dimensional simple points ». *Pattern Recognition Letters*, 15(2):169–175.

BIGÜN, J. (1991). « Multidimensional Orientation Estimation with Applications to Texture Analysis and Optical Flow ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(8):775–790.

BLAKE, A. et ZISSERMAN, A. (1987). *Visual Reconstruction.* MIT Press, MA, USA.

BLASZKA, T. et DERICHE, R. (1994). « A model Based Method for Characterization and Location of Curved Image Features ». Rapport technique 2451, INRIA Sophia Antipolis. http://www.inria.fr/rapports/sophia/RR-2451.html.

BLOCH, I., PELLOT, C., SUREDA, F., et HERMENT, A. (1995). « 3D reconstruction of blood vessels by multi-modality data fusion using fuzzy and Markokvian modelling ». Dans *CVRMed'95.*

BLUM, H. (1967). « A transformation for extracting new descriptors of shape ». Dans *Models for the perception of Speech and Visual Form*, éditeur : WATHE-DUNN, W., pages 363–380, Cambridge. MIT Press.

BLUM, H. et NAGEL, R. (1978). « Shape description using weighted symmetric axis features ». *Pattern Recognition*, 10:167–180.

BONNIAU, P. et BUNSELL, A. (1981). « A comparative study of water absorption theories applied to glass epoxy composites ». *J. Comp. Mat.*, 1:272.

BROCKETT, R. et MARAGOS, P. (1994). « Evolution Equations for Continuous-Scale Morphological Filtering ». *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(12):3377–3385.

BURT, P. (1981). « Fast Filter Transforms for Image Processing ». *Computer Graphics and Image Processing*, 16:20–51.

CASELLES, V., KIMMEL, R., et SAPIRO, G. (1997a). « Geodesic active contours ». *International Journal of Computer Vision*, 22(1):61–79.

CASELLES, V., KIMMEL, R., SAPIRO, G., et SBERT, C. (1997b). « Minimal surfaces: a geometric three dimensional segmentation approach ». *Numer. Math.*, 77:423–451.

CASELLES, V. et SBERT, C. (1996). « What is the best causal scale space for three-dimensional images? ». *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 56(4):1199–1246.

CATTE, F., COLL, T., LIONS, P., et MOREL, J. (1992). « Image Selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion ». *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 29(1):182–193.

CHARBONNIER, P. (1994). « *Reconstruction d'image: Régularisation avec prise en compte des discontinuités* ». Thèse de Doctorat, Université de Nice Sophia Antipolis, France.

CHOPP, D. et SETHIAN, J. (1993). « Flow under curvature; singularity formation minimal surfaces and geodesics ». *Journal Experimental Mathematics*, 2(4):171–187.

COHEN, L. (1991). « On Active Contour Models and Balloons ». *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 53(2):21–218.

COLELLA, P. et PUCKETT, E. (1994). « Modern Numerical Methods for Fluid Flow ». Lecture notes, Departement of Mechanical Engineering, Univerty of California, Berkeley, CA.

COTTET, G. et GERMAIN, L. (1993). « Image Processing through reaction combined with non-linear diffusion ». *Mathematics of Computation*, 61(204):659–673.

COURANT, R., ISAACSON, E., et REES, M. (1952). « On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences ». *Comm. Pure Applied Math.*, 5:243.

CRANK, J. (1956). *The mathematics of diffusion*. Claredon Press, Oxford. Second Edition 1975.

CROWLEY, J. (1981). « *A Representation for Visual Information* ». Thèse de Doctorat, Carnegie-Mellon University, Robotics Institute, Pittsburg, Pennsylvania.

DELINGETTE, H. (1994). « Intrinsic Stabilizers of planar curves ». Dans *European Conference on Computer Vision (ECCV)*, pages 427–436, Stockholm, Sweden.

DELINGETTE, H. (1999). « General Object Reconstruction based on Simplex Meshes ». *International Journal of Computer Vision*, 32(2):111–146.

DERICHE, R. (1993). « Recursively Implementing the Gaussian and its derivatives ». Rapport technique 1893, INRIA Sophia Antipolos. http://www.inria.fr/rapports/sophia/RR-1893.html.

DERICHE, R. et FAUGERAS, O. (1995). « Les EDP en Traitement des images et Vision par Ordinateur ». Rapport technique 2697, INRIA Sophia Antipolis. http://www.inria.fr/rapports/sophia/RR-2697.html.

DERICHE, R. et FAUGERAS, O. (1996). « Les EDP en Traitement des Images et Vision par Ordinateur ». *Traitement du Signal*, 13(6):551–578. ftp://ftp-robotvis.inria.fr/pub/html/Papers/deriche-faugeras:96b.ps.gz.

éditeurs : DUCK, F., BAKER, A., et STARRITT, H. (1998). *Ultrasound in medecine*. Institute of Physics Publishing, The Institute of Physics, Dirac House, Temple Back, Bristol BS1 6BE, UK.

DUTT, V. et GREENLEAF, J. (1996). « Adaptative Speckle reduction Filter for Log-Compressed B-Scan Images ». *IEEE Transaction on Medical Imaging*, 15(6):802–813.

EBERLY, D., GARDNER, R., MORSE, B., PIZER, S., et SCHARLACH, C. (1994). « Ridges for Image Analysis ». *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 4:353–373.

EVANS, A. et NIXON, M. (1996). « Biased motion-Adaptative temporal Filtering for Speckle reduction in Echocardiography ». *IEEE Transaction on Medical Imaging*, 15(1):39–50.

FELDKAMP, L., DAVIS, L., et KRESS, J. (1984). « A practical cone-beam algorithm ». *J. Opt. Soc. Amer.*, 1(6):612–619.

FIDRICH, M. (1997). « Following feature lines across scale ». Dans *Scale-Space Theory in Computer Vision (Scale-Space)*, volume 1252 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 140–151, Utrecht. Springer Verlag.

FIDRICH, M. et THIRION, J.-P. (1997). « Stability of Corner Points in Scale Space: The Effect of Small Non-Rigid Deformations ». *Computer Vision and Image Understanding*. Accepted.

FINET, G. et LIÉNARD, J. (1996). « Parameters that influence accuracy and precision of quantitative coronary arteriography ». *International Journal of Cardiac Imaging*, 12:271–287.

FLORACK, L. (1993). « *The synthetical Structure of Scalar Images* ». Thèse de Doctorat, University of Utrecht, The Netherlands.

FLORACK, L. (1996). « Data, Models, and images ». Dans *International Conference on Image Processing (ICIP)*, volume 1, pages 469–472, Lausanne.

FLORACK, L., ter HAAR ROMENY, B., KOENDERINK, J., et VIERGEVER, M. (1992). « Scale and the differential structure of images ». *Image and Vision Computing*, 10(6):376–388.

FORD, G., ESTES, R., et CHEN, H. (1992). « Scale-space analysis for image sampling and interpolation ». Dans *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP-92, San Franscisco, March 23-26, 1992)*, volume 3, pages 165–168.

FÖRSTNER, M. et GÜLCH, E. (1987). « A Fast operator for detection and precise location of distinct points, corners and centres of circular features ». Dans *Proc. ISPRS Intercommission Conf. on Fast Processing of Photogrammetric Data*, pages 281–305.

FRANGI, A., NIESSEN, W., VINCKEN, K., et VIERGEVER, M. (1998). « Multiscale vessel enhancement filtering ». Dans *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI)*, éditeurs : WELLS, W., COLCHESTER, A., et DELP, S., volume 1496 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 130–137.

FRITSCH, D., PIZER, S. M., MORSE, B. S., EBERLY, D., et LIU, A. (1994). « The multiscale medial axis and its applications in image registration ». *Pattern Recognition Letters*, 15(5):445–452.

FRITSCH, D. S., EBERLY, D., PIZER, S. M., et MCAULIFFE, M. J. (1995). « Simulated cores and their application in medical imaging ». Dans *International Conference on Information Processing in Medical Imaging (IPMI)*, pages 365–368.

FURST, J., KELLER, R., MILLER, J., et PIZER, S. (1997). « Image Loci are Ridges in Geometric Spaces ». Dans *Scale-Space Theory in Computer Vision (Scale-Space)*, volume 1252 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 176–187, Utrecht, The Netherlands. Springer Verlag.

FURST, J. et PIZER, S. (1998). « Marching Optimal-Parameter Ridges: an Algorithm to Extract Shape Loci in 3D Images ». Rapport technique TR-98-006, University of North Carolina.

FURST, J., PIZER, S., et EBERLY, D. (1996). « Marching cores: a method for extracting cores from 3D medical images ». Dans *Proc. Workshop on Math. Methods in Biomed. Image Anal.*, pages 124–130.

GAGE, M. et HAMILTON, R. (1987). « The heat equation shrinking convex plane curves ». *Journal of Differential Geometry*, 23:69–96.

GEMAN, S. et GEMAN, D. (1984). « Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restauration of Images ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6:721–741.

GEMAN, S. et REYNOLDS, G. (1992). « Constrained Restauration and the Recovery of discontinuities ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(3):367–383.

GERIG, G., KOLLER, T., SZÉKELY, G., BRECHBÜHLER, C., et KÜBLER, O. (1993). « Symbolic description of 3-D structures applied to cerebral vessel tree obtained from MR angiography volume data ». Dans *Information Processing in Medical Imaging, Proc. IPMI'93*, éditeurs : BARRETT, H. et GMITRO, A., numéro 687 dans Lecture Notes in Computer Science, pages 94–111. Springer Verlag.

GERIG, G., KÜBLER, O., KIKINIS, R., et JOLESZ, F. (1992). « Nonlinear Anisotropic Filtering of MRI Data ». *IEEE Transaction on Medical Imaging*, 11(2):221–232.

GODUNOV, S. (1959). « A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics ». *Mat. Sbornik.*, 47:271–290.

GORDON, R., BENDER, R., et HERMAN, G. T. (1970). « Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography ». *J. of Theor. Biol.*, 29:471–481.

GRAHAM, R. (1962). « Snow removal: A noise-stripping process for TV signals ». *IEEE Transactions on Information Theory*, 6:129–144.

GRANLUND, G. et KNUTSSON, H. (1995). *Signal Processing for Computer Vision*. Kluwer Academic Publishers.

GRAYSON, M. (1987). « The heat equation shrinks embedded plane curves to round points ». *Journal of Differential Geometry*, 26:285–314.

GRAYSON, M. (1989). « A short note on the evolution of a surface by its mean curvature ». *Duke Mathematical Journal*, 58(3):555–558.

GREEN, P. (1990). « Bayesian Reconstruction from Emission Tomography Data using a Modified EM Algorithm ». *IEEE Transaction on Medical Imaging*, 9(1):84–93.

HADHOUD, M. M. et THOMAS, D. (1988). « The two-dimensional adaptative LMS(TDLMS) algorithm ». *IEEE Transactions on Circuits Systems*, 35(5):485–494.

HARALICK, R., STERNBERG, S., et ZHUANG, X. (1987). « Image analysis using mathematical morphology ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 9:532–550.

HAY, G. et CHESTERS, M. (1977). « A model of visual threshold detection ». *Journal Theor. Biol.*, 67:221–240.

HEIJMANS, H. (1995). « Mathematical morphology: A modern approach in image processing based on algebra and geometry ». *SIAM Review*, 37:1–36.

HERMAN, G. (1980). *Image Reconstruction from Projections: the Fundamentals of Computerized Tomography*. Academic Press, New York.

HUMMEL, R. et MONIOT, R. (1989). « Reconstructions from zero-crossings in scale-space ». *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37:2111–2130.

IIJIMA, T. (1959). « Basic theory of pattern observation ». *Papers of Technical Group on Automata and Automatic Control, IECE*. in Japanese.

IIJIMA, T. (1962). « Observation theory of two-dimensional visual patterns ». *Papers of Technical Group on Automata and Automatic Control*. in Japanese.

IIJIMA, T. (1963). « Basic theory on normalization of two-dimensional visual pattern ». *Studies on Information and Control, Pattern Recognition Issue, IECE*, 1:15–22. in Japanese.

IIJIMA, T. (1971). « Basic equation of figure and observational transformation ». *Systems, Computers, Controls*, 2(4):70–77.

JACKWAY, P. (1992). « Morphological Scale-Space ». Dans *International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, volume C, pages 252–255, The Hague.

JACKWAY, P. et DERICHE, M. (1996). « Scale-Space Properties of the Multiscale Morphological Dilatation-Erosion ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(1):38–51.

JUHAN, V., NAZARIAN, B., MALKANI, K., BULOT, R., BARTOLI, J., et SEQUEIRA, J. (1997). « Geometrical Modelling of Abdominal Aortic Aneurysms ». Dans *CVRMed-MRCAS'97*, éditeurs : TROCCAZ, J., GRIMSON, E., et MÖSGES, R., volume 1205 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 243–252.

KAPLAN, D. et MA, Q. (1994). « On the statistical characteristics of the log-compressed Rayleigh signals: Theorical formulation and experimental results ». *J. Acoust. Soc. Amer.*, 95:1396–1400.

KASS, M. et WITKIN, A. (1987). « Analyzing Oriented Patterns ». *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 37:362–385.

KIMMEL, R., KIRYATI, N., et BRUCKSTEIN, A. (1997). « Analysing and Synthesizing Images by Evolving Curves with the Osher-Sethian Method ». *International Journal of Computer Vision*, 24(1):37–55.

KLINGER, A. (1971). « Pattern and search statistics ». Dans *Optimizing Methods in Statistics*, éditeur : RUSTAGI, J., New York. Academic Press.

KOENDERINK, J. (1984). « The structure of images ». *Biol. Cybern.*, 50(363-370).

KOLLER, T., GERIG, G., SZÉKELY, G., et DETTWILER, D. (1995). « Multiscale detection of curvilinear structures in 2D and 3D image data ». Dans *International Conference on Conputer Vision (ICCV'95)*, pages 864–869.

KORNPROBST, P. (1998). « *Contribution à la restauration d'images et à l'analyse de séquences: approches variationnelles et solutions de viscosité* ». Thèse de Doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, Av. Joseph Vallot, 06108 Nice cedex 2.

KRISSIAN, K. (1996). « Diffusion anisotrope d'images cerebrales 3D et Segmentation matière blanche / matière grise ». Stage de DEA, ENS Cachan et Paris XI.

KRISSIAN, K., MALANDAIN, G., et AYACHE, N. (1996). « Directional Anisotropic Diffusion applied to segmentation of vessels in 3D images ». Rapport technique 3064, INRIA Sophia Antipolis, 2004 route des Lucioles BP 93 06902 Sophia Antipolis Cedex (France). http://www.inria.fr/rapports/sophia/RR-3064.html.

KRISSIAN, K., MALANDAIN, G., et AYACHE, N. (1997). « Directional Anisotropic Diffusion Applied to Segmentation of Vessels in 3D Images ». Dans *Scale-Space Theory in Computer Vision*

(Scale-Space), volume 1252 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 345–348, Utrecht, The Netherlands. Springer Verlag.

KRISSIAN, K., MALANDAIN, G., et AYACHE, N. (1998a). « Model Based Multiscale Detection and Reconstruction of 3D Vessels ». Rapport technique 3442, INRIA Sophia Antipolis, 2004 route des Lucioles BP 93 06902 Sophia Antipolis Cedex (France). http://www.inria.fr/rapports/sophia/RR-3442.html.

KRISSIAN, K., MALANDAIN, G., AYACHE, N., VAILLANT, R., et TROUSSET, Y. (1998b). « Model-Based Multiscale Detection of 3D Vessels ». Dans *Proceedings IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 722–727, Santa Barbara.

KRISSIAN, K., MALANDAIN, G., AYACHE, N., VAILLANT, R., et TROUSSET, Y. (1998c). « Model-Based Multiscale Detection of 3D Vessels ». Dans *Workshop on Biomedical Image Analysis*, éditeur : VEMURI, B., pages 202–208, Santa Barbara.

KRISSIAN, K., MALANDAIN, G., AYACHE, N., VAILLANT, R., et TROUSSET, Y. (1999a). « Model Based Detection of Tubular Structures in 3D Images ». accepted for publication in Computer Vision and Image Understanding.

KRISSIAN, K., MALANDAIN, G., AYACHE, N., VAILLANT, R., et TROUSSET, Y. (1999b). « Model Based Detection of Tubular Structures in 3D Images ». Rapport technique 3736, INRIA Sophia Antipolis. http://www.inria.fr/rapports/sophia/RR-3736.html.

KRISSIAN, K., VAILLANT, R., TROUSSET, Y., MALANDAIN, G., et AYACHE, N. (2000). « Automatic and accurate measurement of a cross-sectional area of vessels in 3D X-ray angiography images ». Dans *Proc. of SPIE'medical imaging 2000, Image Processing conference*, San Diego. to appear.

KUZNETSOV, N. (1976). « Accuracy of some approximate methods for computing the weak solutions of first-order quasi-linear equation ». *USSR Comp. Math. and Math. Phys.*, 16:105–119.

LAX, P. (1973). « Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves ». *Society of Industrial and Applied Mathematics: Philadelphia, Pennsylvania.*

LEVEQUE, R. (1992). *Numerical Methods for Conservation Laws.* Birkauser Verlag, Basel.

LINDEBERG, T. (1990). « Scale-Space for discrete signals ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(3):234–254.

LINDEBERG, T. (1994). *Scale-Space Theory in Computer Vision.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands.

LINDEBERG, T. (1996). « Edge detection and ridge detection with automatic scale selection ». Dans *Proceedings IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, page 465, San Francisco.

LINDEBERG, T. (1997a). « On the axiomatic foundations of linear scale-space ». Dans *Gaussian scale-space theory*, éditeurs : SPORRING, J., NIELSEN, M., FLORACK, L., et JOHANSEN, P., pages 75–97. Kluwer, Dordrecht.

LINDEBERG, T. (1997b). « Shape-adapted smoothing in estimation of 3D shape cues from affine deformations of local 2D brightness structure ». *Image and Vision Computing*, 15:415–434.

LORENSEN, W. et CLINE, H. (1987). « Marching Cubes: A high resolution 3-D surface construction algorithm ». *Computer Graphics*, 21(4):163–169.

LORENZ, C., CARSEN, I.-C., BUZUG, T., FASSNACHT, C., et WEESE, J. (1997). « Multi-scale Line Segmentation with Automatic Estimation of Width, Contrast and Tangential Direction in 2D and 3D Medical Images ». Dans *CVRMed-MRCAS'97*, volume 1205 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 213–222, Grenoble, France. Springer Verlag.

LORIGO, L. M., FAUGERAS, O., GRIMSON, W., KERIVEN, R., KIKINIS, R., et WESTIN, C.-F. (1999). « Co-Dimension 2 Geodesic Active Contours for MRA Segmentation ». Dans *International Conference on Information Processing in Medical Imaging (IPMI)*, volume 1613 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 126–139. Springer-Verlag.

LOUPAS, A. (1988). « *Digital image processing for noise reduction in medical ultrasonics* ». Thèse de Doctorat, University of Edinburgh, UK.

LUO, D., KING, M., et GLICK, S. (1994). « Local geometry variable conductance diffusion for post-reconstruction filtering ». *IEEE Transactions on Nuclear Sciences*, 41:2800–2806.

M. MULET-PARADA, NOBLE J.A. (1998). « Intensity Invariant acoustic boundary detection ». Dans *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI)*, éditeurs : WELLS, W., COLCHESTER, A., et DELP, S., volume 1496 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 806–813, Boston, USA.

MACKWORTH, A. et MOKHTARIAN, F. (1986). « Scale-Based description and recognition of planar curves and two-dimensional shapes ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(34-43).

MAINTZ, J. (1996). « *Retrospective registration of tomographic brain images* ». Thèse de Doctorat, University of Utrecht, The Netherlands.

MALLADI, R., KIMMEL, R., ADALSTEINSSON, D., SAPIRO, G., CASELLES, V., et SETHIAN, J. (1996). « A Geometric Approach to Segmentation and Analysis of 3D Medical Images ». Dans *Proceedings of MMBIA'96*, pages 244–252.

MALLADI, R., SETHIAN, J., et VEMURI, B. (1995). « Shape Modeling with Front Propagation: A Level Set Approach ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(2):158–175.

MOREAU-GAUDRY, A., CINQUIN, P., et BAGUET, J. (1998). « A New Branching Model: Application to Carotid Ultrasonic Data ». Dans *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI)*, éditeurs : WELLS, W., COLCHESTER, A., et DELP, S., volume 1496 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1049–1056.

MOREL, J. et SOLIMINI, S. (1995). *Variational Methods in Image Segmentation*. Birkhäuser.

MORSE, B., PIZER, S., et LIU, A. (1994). « Multiscale medial analysis of medical images ». *Image and Vision Computing*, 12(6):327–338.

MULET-PARADA, M. et NOBLE, J. (1999). « 2D+T acoustic boundary detection ». *Medical Image Analysis*. to appear.

MUMFORD, D. et SHAH, J. (1985). « Boundary detection by minimizing functionals ». Dans *Proceedings IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 22–26, San Francisco. IEEE Computer Society Press.

MUMFORD, D. et SHAH, J. (1989). « Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems ». *Comm. Pure Applied Math.*, 42:577–685.

NATARAJAN, B. (1994). « On generating topologically consistent isosurfaces from uniform samples ». *The Visual Computer*, 11(1):52–62.

NIELSEN, M., FLORACK, L., et DERICHE, R. (1997). « Regularization, scale-space and edge detection filters ». *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 7(291-307).

NIESSEN, W., VINCKEN, K., et VIERGEVER, M. (1996). « Comparison of Multiscale Representations for a Linking-Based Image Segmentation Model ». Dans *Proceedings of MMBIA*, pages 263–272.

NIESSEN, W., VINCKEN, K., WEICKERT, J., et VIERGEVER, M. (1997). « Nonlinear Multiscale Representations for Image Segmentation ». *Computer Vision and Image Understanding*, 66(2):233–245.

NITZBERG, M. et SHIOTA, T. (1992). « Nonlinear Image Filtering with Edge and Corner Enhancement ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(8):826–833.

NORDSTRÖM, N. (1990). « Biased anisotropic diffusion - A unified regularization and diffusion approach to edge detection ». *Image and Vision Computing*, 8(4):318–327.

OLVER, P. (1986). *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, volume 107 de *Graduate texts in Mathematics*. Springer-Verlag. Second Edition 1993.

OSHER, S. et RUDIN, L. (1990). « Feature-oriented image enhancement using shock filters ». *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 27(4):919–940.

OSHER, S. et RUDIN, L. (1991). « Shocks and other nonlinear filtering applied to image processing ». Dans *Applications of digital image processing XIV. SPIE*, éditeur : TESCHER, A., volume 1567, pages 414–431.

OSHER, S. et SETHIAN, J. (1988). « Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on the Hamilton-Jacobi formalism ». *J. Computational Physics*, 79:12–49.

OTSU, N. (1981). « *Mathematical studies on feature extraction in pattern recognition* ». Thèse de Doctorat, Electrotechnical Laboratory, 1-1-4, Umezono, Sakura-mura, Niihari-gun, Ibaraki, Japan. in Japanese.

PAUWELS, E., VANGOOL, L., FIDDELAERS, P., et MOONS, T. (1995). « An Extended Class of Scale-Invariant and Recursive Scale Space Filters ». 17(7):691–701.

PAYOT, E. (1996). « *Reconstruction Vasculaire tridimensionnelle en imagerie par rayons X* ». Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunication.

PAYOT, E., GUILLEMAUDS, R., TROUSSET, Y., et PRETEUX, F. (1996). « An adaptive and constrained model for 3D X-ray vascular reconstruction ». Dans *Three-dimensional image reconstruction in radiation and nuclear medecine*, éditeurs : GRANGEAT, P. et AMANS, J.-L., pages 47–57, Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

PERONA, P. et MALIK, J. (1990). « Scale-Space and edge detection using anisotropic diffusion ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7):629–639.

PIZER, S., BURBECK, C., COGGINS, J., FRITSCH, D., et MORSE, B. (1994). « Object Shape before Boundary Shape: Scale-Space Medial Axes ». *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 4:303–313.

PIZER, S., EBERLY, D., FRITSCH, D., et MORSE, B. (1998). « Zoom-invariant Vision of Figural Shape: The Mathematics of Cores ». *Computer Vision and Image Understanding*, 69(1):55–71.

RAO, A. et SCHUNCK, B. (1991). « Computing Oriented Texture Fields ». *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 53(2):157–185.

éditeurs : REIBER, J. et van der WALL, E. (1996). « *State of the Art in Quantitative Coronary Arteriography as of 1996* », Dans *CardioVascular Imaging*, éditeurs : REIBER, J. et van der WALL, E., Chapitre 4, pages 39–56. Kluwer Academic Publishers.

ROCHE, A., MALANDAIN, G., AYACHE, N., et PRIMA, S. (1999). « Towards a Better Comprehension of Similarity Measures used in Medical Image Registration ». Dans *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI)*, numéro 1679 dans Lecture Notes in Computer Science, pages 555–566, Cambridge (UK).

ROUGON, N. et PRÊTEUX, F. (1995). « "Geometric Maxwell equations and the structure of diffusive scale-spaces" ». Dans *Proceedings SPIE Conference on Morphological Image Processing and Random Image Modeling - SPIE's 1995*, volume 2528, pages 151–165, San Diego CA, USA.

RUDIN, L., OSHER, S., et FATEMI, E. (1992). « Nonlinear total variation based noise removal algorithms ». *Physica D*, 60:259–268.

SAINT-MARC, P., CHEN, J., et MEDIONI, G. (1991). « Adaptive smoothing: A general tool for early vision ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(6):514–529.

SÁNCHEZ-ORTIZ, G., RUECKERT, D., et BURGER, P. (1999). « Knowledge-based anisotropic diffusion of cardiac magetic resonance images ». *Medical Image Analysis*, 3(1):77–101.

SAPIRO, G. et TANNENBAUM, A. (1993). « Affine Invariant Scale-space ». *International Journal of Computer Vision*, 11(1):25–44.

SAPIRO, G. et TANNENBAUM, A. (1994). « On Affine Plane Curve Evolution ». *J. Func. Analysis*, 119:79–120.

SAPIRO, G. et TANNENBAUM, A. (1995). « Area and Length Preserving Geometric Invariant Scale-space ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(1):67–72.

SARTI, A., MIKULA, K., et SGALLARI, F. (1999). « Nonlinear Multiscale Analysis of Three-Dimensional Echocardiographic Sequences ». *IEEE Transaction on Medical Imaging*, 18(6):453–465.

SATO, Y., ARAKI, T., HANAYAMA, M., NAITO, H., et TAMURA, S. (1998a). « A Viewpoint Determination System for Stenosis Diagnosis and Quantification in Coronary Angiographic Image Acquisition ». *IEEE Transaction on Medical Imaging*, 17(1):121–137.

SATO, Y., NAKAJIMA, S., ATSUMI, H., KOLLER, T., GERIG, G., YOSHIDA, S., et KIKINIS, R. (1997). « 3D Multi-scale Line Filter for Segmentation and Visualization of Curvilinear Structures in Medical Images ». Dans *CVRMed-MRCAS'97*, volume 1205 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 213–222. Springer Verlag.

SATO, Y., NAKAJIMA, S., SHIRAGA, N., ATSUMI, H., YOSHIDA, S., KOLLER, T., GERIG, G., et KIKINIS, R. (1998b). « Three-dimensional multi-scale line filter for segmentation and visualization of curvilinear strutures in medical images ». *Medical Image Analysis*, 2(2):143–168.

SERRA, J. (1982). *Image analysis and mathematical morphology.* Academic Press, London.

SETHIAN, J. (1985). « Curvature and the evolution of fronts ». *Communications in Mathematical Physics*, 101(487-499).

SETHIAN, J. (1996). *Level Set Methods.* Cambridge University Press.

SOD, G. (1985). *Numerical Methods in Fluid Dynamics.* Cambridge Univ. Press.

SOLER, L. (1998). « *Une nouvelle méthode de segmentation des structures anatomiques et pathologiques: application aux angioscanners 3D du foie pour la planification chirurgicale* ». Thèse de Doctorat, Université de Paris Sud XI, 91405 Orsay Cedex.

STEEN, E. et OLSTAD, B. (1994). « Scale-space and boundary detection in ultrasonic imaging using nonlinear signal-adaptative anisotropic diffusion ». Dans *Proceedings of SPIE*, volume 2167, pages 116–127.

SZABO, T. (1998). « *Transducer arrays for medical ultrasound imaging* », Chapitre 5, pages 91–111. Dans [Duck et al., 1998].

SZÉKELY, G., KOLLER, T. M., KIKINIS, R., et GERIG, G. (1994). « Structural Description and Combined 3-D Display for Superior Analysis of Cerebral Vascularity from MRA ». Dans *Visualization in Biomedical Computing*, éditeur : ROBB, R. A., pages 272–281.

éditeurs : TANIMOTO, S. et KLINGER, A. (1980). *Structured Computer Vision.* Academic Press, New York.

TEBOUL, S., BLANC-FÉRAUD, L., AUBERT, G., et BARLAUD, M. (1998). « Variational Approach for Edge-Preserving Regularization using Coupled PDE's ». *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3):387–397.

éditeur : TER HAAR ROMENY, B. (1994). *Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

TER HAAR ROMENY, B. (1996). « Introduction to Scale-Space Theory: Multiscale Geometric Image Analysis ». Rapport technique ICU-96-21, Utrecht University. http://www.cv.ruu.nl/Conferences/Tutorial.html.

TERZOPOULOS, D. (1986). « Regularization of inverse visual problems involving discontinuities ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8:413–424.

THÉVENAZ, P. et UNSER, M. (1997). « Spline pyramids for inter-modal image registration using mutual information ». Dans *Proc. SPIE, Wavelet Applications in Signal and Image Processing V*, volume 3169, pages 236–247, San Diego CA, USA.

Thirion, J. et Gourdon, A. (1992). « The 3D marching lines algorithm and its application to crest lines extraction ». Rapport technique RR-1672, INRIA, Sophia-Antipolis.

Thirion, J. et Gourdon, A. (1993). « The marching lines algorithm: New results and proofs ». Rapport technique RR-1881-1, INRIA, Sophia-Antipolis.

Thirion, J. et Gourdon, A. (1995). « Computing the Differential Characteristics of Isointensity Surfaces ». *Computer vision and image understanding*, 61(2):190–202. Also a Technical Report n^o 1881.

Tikhonov, A. et Arsenin, V. (1977). *Solutions of ill-posed problems.* Wiley, New-York.

Unser, M. et Eden, M. (1994). « FIR approximations of inverse filters and perfect reconstruction filter banks ». volume 36, pages 163–174.

Van Den Boomgaard, R. (1992). « *Mathematical morphology: Extensions towards computer vision* ». Thèse de Doctorat, University of Amsterdam, The Netherlands.

Van Gelder, A. et Wilhelms, J. (1994). « Topological Considerations in Isosurface Generation ». *ACM Transactions on Graphics*, 13(4):337–375.

Verdonck, B. (1996). « *Segmentation, mesure et visualisation des vaisseaux sanguins à partir d'angiographies 3D par résonance magnétique et tomodensitométrie hélicoîdale* ». Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunication.

Weickert, J. (1994). « Scale-space properties of nonlinear diffusion filtering with a diffusion tensor ». report 110, University of Kaiserslautern, Laboratory of Technomathematics, P.O. Box 3049, 67653 Kaiserslautern, Germany, 1994.

Weickert, J. (1995). « Multiscale Texture Enhancement ». Dans *CAIP'95*, pages 230–237. Springer-Verlag.

Weickert, J. (1997a). « Coherence-Enhancing Diffusion of Colour Images ». Dans *Proc. Seventh National Symposium on Pattern Recognition and Image Analysis*, Barcelona.

Weickert, J. (1997b). « Orientation Analysis by Coherence-Enhancing Diffusion ». Dans *Proc. 1997 Real World Computing Symposium RWC'97*, pages 96–103, Tokyo.

Weickert, J. (1997c). « Recursive separable schemes for nonlinear diffusion filters ». Dans *Scale-Space Theory in Computer Vision (Scale-Space)*, éditeurs : ter Haar Romeny, B., Florack, L., Koenderink, J., et Viergever, M., volume 1252 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 260–271, Utrecht. Springer Verlag.

Weickert, J. (1997d). « A review of nonlinear diffusion filtering ». Dans *Scale-Space Theory in Computer Vision (Scale-Space)*, volume 1252 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 3–28, Utrecht, The Netherlands. Springer Verlag.

Weickert, J. (1998). *Anisotropic Diffusion in image processing.* Teubner-Verlag, Stuttgart.

Weickert, J. (1999). « Coherence-Enhancing Diffusion Filtering ». *International Journal of Computer Vision*, 31(2/3):111–127.

WEICKERT, J., ISHIKAWA, S., et IMIYA, A. (1997). « On the history of Gaussian scale-space axiomatics ». Dans *Gaussian scale-space theory*, éditeurs : SPORRING, J., NIELSEN, M., FLORACK, L., et JOHANSEN, P., pages 45–59. Kluwer, Dordrecht.

WELLS, W., VIOLA, P., ATSUMI, H., NAKAJIMA, S., et KIKINIS, R. (1996). « Multi-modal volume registration by maximization of mutual information ». *Medical Image Analysis*, 1(1):35–51.

WHITAKER, R. et GERIG, G. (1994). « *Vector-Valued diffusion* », Chapitre 4, pages 93–134. Dans [Ter Haar Romeny, 1994].

WHITAKER, R. et PIZER, S. (1993). « A Multi-scale Approach to Nonuniform Diffusion ». *CVGIP:Image Understanding*, 57(1):99–110.

WIDROW, B., GLOVER, J. R., MCCOOL, J., KAUNITZ, J., WILLIAMS, C., HEAN, R. H., ZEIDLER, J. R., DONG, E., et GOODLIN, R. (1975). « Adaptive Noise Canceling: Principles and applications ». *Proc IEEE*, 63(12):1692–1719.

WITKIN, A. (1983). « Scale Space Filtering ». Dans *IJCAI*, pages 1019–1021. Karlsruhe.

YOO, T. et COGGINS, J. (1993). « Using statistical pattern recognition techniques to control variable conductance diffusion ». Dans *International Conference on Information Processing in Medical Imaging (IPMI)*, éditeurs : BARRETT, H. et GMITRO, A., Lecture Notes in Computer Science, pages 459–471, Berlin. Springer.

YUILLE, A. L. et POGGIO, T. A. (1986). « Scaling Theorems for Zero Crossings ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8.

ZENG, X., STAIB, L., R.T., S., et DUCAN, J. (1998). « Segmentation and measurement of the cortex from 3D MR Images ». Dans *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI)*, éditeurs : WELLS, W., COLCHESTER, A., et DELP, S., volume 1496 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 519–530.

Index des Références

Index Général