ENS CACHAN
Département Informatique
61, avenue du Président Wilson
94 235 CACHAN Cedex

DEA Informatique
Université de PARIS-XI
L.R.I. - Bâtiment 490
91 405 ORSAY Cedex

Diffusion anisotrope d'images cérébrales 3D
et
Segmentation matière blanche/matière grise

Auteur Karl KRISSIAN
Directeur de stage Nicholas AYACHE
Encadrement Grégoire MALANDAIN

Je tiens à remercier tout particulièrement Nicholas Ayache,
pour m'avoir permis d'effectuer ce stage,
Grégoire Malandain qui a suivi mon travail,
ainsi que toute l'équipe du projet Epidaure dont
Jérôme Declerck, Stéphane Cotin, Françoise Pezé,
Luc Soler, Xavier Pennec, Jean-Philippe Thirion, Gérard Subsol, ...
pour leur accueil chaleureux et leur soutien.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Segmenter les images médicales consiste généralement à extraire des structures anatomiques caractéristiques. C'est souvent une étape essentielle dans une chaine de traitements visant à faciliter l'interprétation et l'analyse des images ([Aya95]).
Un des principaux problèmes intervenant dans la segmentation de ces images est la présence d'un bruit introduit par la méthode d'acquisition. L'approche classique permettant d'éliminer le bruit consiste à *lisser* l'image de manière isotrope (sans direction privilégiée) et ne préserve pas suffisamment les contrastes de celle-ci.

Dans le cadre de ce mémoire de DEA, nous explorons dans une première partie les principes de la diffusion anisotrope ([GKKJ92] [DF95]) , qui permet de lisser le bruit tout en préservant le contraste de l'image. Cette diffusion anisotrope est en fait une généralisation de l'équation de diffusion de la chaleur qui correspond au processus classique de lissage des images. Le processus de diffusion est présenté comme une descente de gradient le long d'une surface d'énergie dont l'expression dépendant d'une fonction de diffusion et de la norme du gradient de l'image. Le choix d'une *bonne* fonction de diffusion permet d'assurer la convergence et la restauration de l'image. Nous détaillons la mise en œuvre de ce processus en dimension n et présentons des résultats obtenus sur des images réelles.

Dans une deuxième partie, nous présentons les fondements théoriques de la technique de segmentation proposée par Wells ([WGKJ95]) et basée sur l'algorithme probabiliste EM (Estimation-Maximisation). Cette technique permet de segmenter la matière blanche et la matière grise dans les images IRM du cerveau tout en corrigeant un biais d'intensité introduit par les équipements. Sa mise en œuvre ainsi que des résultats de segmentation sont présentés.

Nous étudions l'intérêt de combiner des deux techniques, en effectuant une étape de diffusion anisotrope avant de segmenter les images. Cette combinaison permet d'atténuer le bruit des images pour obtenir une meilleure segmentation.

Nos contributions sont les suivantes :

- Nous montrons comment ces méthodes de diffusion anisotrope s'appliquent en trois dimensions (la littérature présente essentiellement des exemples bidimensionnels) et nous présentons des résultats concrets sur des images de synthèse et des images réelles,
- nous présentons les principes de l'algorithme EM et son implémentation pratique. Nous explicitons sur des exemples concrets les limites de cette approche,

- nous montrons que l'utilisation préalable d'un algorithme de diffusion améliore sensiblement les résultats de la segmentation obtenus par l'algorithme EM,
- nous proposons des directions de recherche prometteuses pour le futur.

Chapitre 2

Diffusion Anisotrope

Notations

Dans tout ce chapitre, nous utiliserons les notations suivantes :

n	dimension de l'image,
$\mathbb{R}$	ensemble des réels,
$\bar{x}$	un vecteur de $\mathbb{R}^n$ ou un point de l'image,
$u(\bar{x}, t)$	fonction intensité de l'image, fonction de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$,
Ω	domaine de définition de $u_t(\bar{x}) = u(\bar{x}, t)$,
h_k	taille d'un pixel dans la direction de la dimension k,
dx_k	petite variation de la k-ième composante du vecteur $\bar{x}$
Δu	opérateur laplacien de la fonction u,
∇u	vecteur gradient de la fonction u,
$div\,(u)$	opérateur divergence de la fonction u,
$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$	dérivée partielle de u par rapport à la composante x,
x_i	i-ème composante du vecteur x,
$\bar{x} + dx_i$	le vecteur $(x_1, \cdots, x_i + dx_i, \cdots, x_n)$,

2.1 Présentation

2.1.1 Diffusion isotrope

Principe

La diffusion isotrope d'une image s'effectue à l'aide d'un produit de convolution de l'image par un opérateur Gaussien de moyenne nulle et d'écart-type σ.

On note $u(\bar{x})$ la fonction intensité de l'image au point $\bar{x}$.
L'opérateur Gaussien de moyenne nulle et d'écart-type σ est donné par

$$G_\sigma(\overline{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \frac{- < \overline{x}, \overline{x} >}{2\sigma^2}$$

où $< \overline{x}, \overline{x} >$ est le produit scalaire euclidien du vecteur $\overline{x}$ de $\mathbb{R}^n$.

Le produit de convolution de deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ sur $\Omega \in \mathbb{R}^n$ est défini par la fonction

$$(f * g)(\overline{x_0}) = \int_{\Omega} f(\overline{x_0} - \overline{x}).g(\overline{x})d\overline{x}$$

Effectuer un tel produit de convolution avec une fonction Gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type σ est équivalent à résoudre l'équation (2.1) à une échelle $t = \frac{\sigma^2}{2}$.

Equation de propagation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \tag{2.1}$$

On rappelle les définitions dans R^3 des opérateurs suivants :

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
&= div\,(\nabla\,(u)) \\
div\,(\vec{\mathbf{v}}) &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\nabla\,(u) &= \frac{\partial u}{\partial x}.\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial u}{\partial y}.\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial u}{\partial z}.\vec{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

où $(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

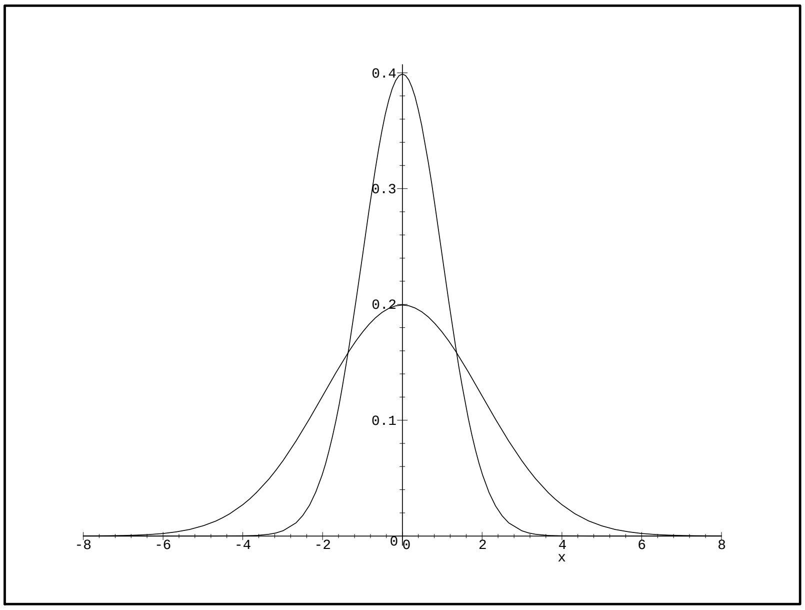


FIG. 2.1 – *Fonction Gaussienne monodimensionnelle avec $\sigma = 1$ et $\sigma = 2$.*

Le calcul du produit de convolution par une Gaussienne de dimension n sur $\Omega = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ peut se décomposer en n produits de convolution de dimension 1 sur chacun des intervalles $[a_1, b_1] \cdots [a_n, b_n]$. Ceci permet de réduire notablement le nombre d'opérations à réaliser pour effectuer cette convolution.

Défauts

Cependant, si le lissage par un opérateur Gaussien permet de réduire le bruit dans les images de faible complexité, il opère de manière identique dans toutes les directions et ne préserve pas les discontinuités ni le contraste des images.

Afin de résoudre les problèmes du lissage, une solution est de transformer l'image à l'aide d'une équation aux dérivées partielles permettant de diffuser de manière non-uniforme, en privilégiant certaines directions.

2.1.2 Diffusion anisotrope

La diffusion anisotrope s'inspire de la diffusion isotrope en introduisant dans l'équation 2.1 une **fonction de diffusion** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dépendant de la norme du gradient de l'image choisie de manière à mieux préserver le contraste de l'image (voir fig 2.2).

Principe de la diffusion anisotrope

La nouvelle équation de diffusion s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div\,(g(\mid \nabla u \mid).\nabla\,(u)) \tag{2.2}$$

où la fonction **g** est appelée fonction de diffusion.
Typiquement, on suppose que les variations du gradient d'intensité de l'image dues au bruit sont inférieures à un seuil noté **k** qui est lui-même inférieur au gradient introduit par les discontinuités de l'image non bruitée.

D'une part, la fonction **g** sera choisie de manière à diffuser très peu lorsque $\mid \nabla u \mid$ est très supérieur à **k** afin de limiter la diffusion dans les zones à forts gradients.
D'autre part, elle devra tendre vers une constante non nulle lorsque $\mid \nabla u \mid$ est proche de zéro, agissant comme l'équation 2.1 de propagation de la chaleur.
L'approche variationnelle présentée ci-après permet de mieux comprendre ce processus et de préciser les contraintes nécessaires pour la fonction de diffusion.

2.2 Approche variationnelle

2.2.1 Présentation du problème

Cette approche est expliquée dans le rapport de recherche de R. Deriche et O. Faugeras [DF95]. Elle consiste à interpréter la diffusion anisotrope comme une descente de gradient afin de minimiser une énergie.

On note u, la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur le rectangle $\Omega = (0, a) \times (0, b)$.

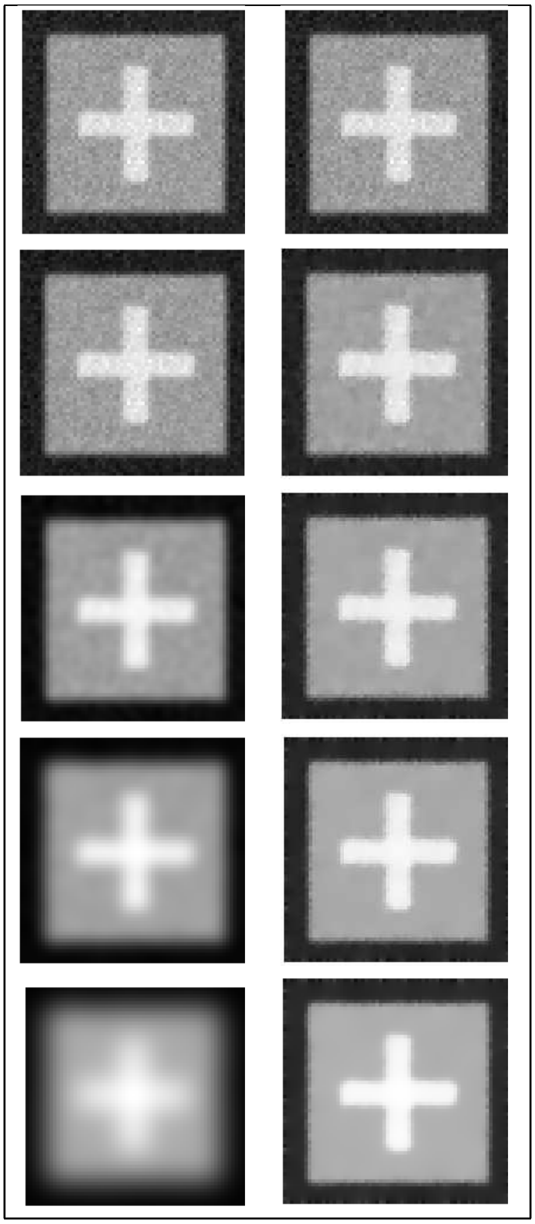


FIG. 2.2 – *Résultats* **à gauche** *du produit de convolution de l'image par une Gaussienne, et* **à droite** *d'un filtrage anisotrope à une échelle t identique.*

$u(\bar{x})$ représente l'intensité de l'image au point $\bar{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ où n est la dimension de l'image. On cherche à trouver l'image originale non bruitée u à partir de l'image bruitée v dont on dispose. On modélise v par la formule :

$$v \;=\; Pu + \nu$$

où P est un opérateur linéaire (l'opérateur de convolution par exemple) et ν est un bruit généralement considéré comme Gaussien de moyenne nulle.
On ramène le problème à celui de la minimisation de l'énergie $E(u)$ dont l'expression est la suivante :

$$E(u) \;=\; \frac{1}{2}\,\|v - Pu\|^2 + \lambda \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid) d\Omega \tag{2.3}$$

le premier terme de $E(u)$ est un terme d'attache aux données et le second terme prend en compte le lissage anisotrope de l'image.
On cherche une fonction Φ qui permette d'implémenter une méthode stable et convergente pour le calcul du minimum, tout en préservant le contraste de l'image.

2.2.2 Les équations d'Euler-Lagrange

Le problème de Lagrange consiste à trouver l'extremum de l'expression :

$$I(y) \;=\; \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx$$

où y est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, f est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que la fonction y vérifie $y(x_0) = y_0$ et $y(x_1) = y_1$. On suppose aussi que y est dérivable et de dérivée continue y'.
Si la fonction $y^0(x)$ est un extremum de $I(y)$, alors elle doit être solution de l'**équation différentielle d'Euler-Lagrange**

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$$

Dans le cas des fonctions à plusieurs variable, on suppose que $I(u)$ est de la forme :

$$I(u) \;=\; \int_\Omega f(x, y, u, u_x, u_y)dxdy$$

$$\text{avec } \; \forall (x,y) \in \partial\Omega \;\; u(x,y) \;=\; u_0(x,y)$$

où u possède des dérivées partielles continues u_x et u_y.
L'**équation d'Euler-Lagrange** qui est une condition nécessaire pour obtenir un extremum de $I(u)$ est donnée par :

$$f_u - \frac{d}{dx} f_{u_x} - \frac{d}{dy} f_{u_y} = 0. \tag{2.4}$$

Démonstration :
Soit u^0 un extremum de I.
Soit $h(x, y)$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ différentiable et de dérivées partielles continues, vérifiant

$$\forall \bar{x} \in \partial\Omega, \; h(\bar{x}) \;=\; 0. \tag{2.5}$$

Pour $\epsilon \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_\epsilon(x,y) \;=\; u^0(x,y) + \epsilon h(x,y)$$

$$I(u_\epsilon) = F(\epsilon) = \int_\Omega f(x,y,u+\epsilon h, u_x+\epsilon h_x, u_y+\epsilon h_y)dxdy$$

D'après l'hypothèse d'extremum pour u^0, on doit avoir F'(0) = 0.

$$\begin{aligned}
F'(\epsilon) &= \int_\Omega \frac{df}{d\epsilon}dxdy \\
&= \int_\Omega \left[f_u h + f_{u_x}h_x + f_{u_y}h_y\right]dxdy \\
&= \int_\Omega \left[f_u h + \frac{d}{dx}(f_{u_x}h) - \frac{d}{dx}f_{u_x}h + \frac{d}{dy}(f_{u_y}h_y) - \frac{d}{dy}f_{u_y}h\right]dxdy \\
&\overset{[\,2.5\,]}{=} \int_\Omega \left[\left(f_u - \frac{df_{u_x}}{dx} - \frac{df_{u_y}}{dy}\right)h\right]dxdy + \underbrace{\int_0^b [f_{u_x}h]_0^a dy}_{0} + \underbrace{\int_0^a [f_{u_y}h]_0^b dx}_{0}
\end{aligned}$$

Dans les équations ci-dessus, les valeurs de f sont calculées en $(x,y,u+\epsilon h, u_x+\epsilon h_x, u_y+\epsilon h_y)$. Lorsque ϵ vaut 0, on obtient en (x,y,u_x,u_y)

$$\forall h \text{ vérifiant les conditions (2.5), } F'(0) = \langle\, f_u - \frac{d}{dx}f_{u_x} - \frac{d}{dy}f_{u_y}\ ,\ h\,\rangle$$

On en déduit l'équation d'Euler-Lagrange (2.4). □

2.2.3 Retour à la minimisation de E

L'équation 2.3 peut se décomposer une somme de deux termes $E(u) = E_1(u) + \lambda E_2(u)$ avec $E_1(u) = \frac{1}{2}\|v - Pu\|^2$ et $E_2(u) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)d\Omega$.
Le minimum de l'énergie vérifie alors $\nabla E = \nabla E_1 + \lambda\nabla E_2 = 0$, avec :

$$\begin{aligned}
\nabla E_1(u) &= -P^*(v - Pu) \\
&\textbf{car} \\
\frac{E_1(u+\epsilon h) - E_1(u)}{\epsilon} &= - < Ph, v - Pu > + O(\epsilon) \\
&= < h, -P^*(v - Pu) > + O(\epsilon)
\end{aligned}$$

où P^* représente l'opérateur adjoint de P.
En outre,

$$\begin{aligned}
\nabla E_2(u) &= -div\left(\Phi'(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \\
&\textbf{car} \\
\nabla E_2(u) &\overset{[\,2.4\,]}{=} -\frac{d}{dx}f_{u_x} - \frac{d}{dy}f_{u_y} \\
\text{où } f(u_x,u_y) &= \Phi(\sqrt{u_x^2+u_y^2}) \\
f_{u_x}(u_x,u_y) &= \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}}\Phi'(\sqrt{u_x^2+u_y^2}) = \frac{u_x}{|\nabla u|}\Phi'(|\nabla u|)
\end{aligned}$$

On obtient alors pour $\nabla E = 0$ l'équation suivante :

$$P^*(v - Pu) + \lambda div\left(\Phi'(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0 \tag{2.6}$$

Il est intéressant de réécrire l'expression de $E_2(u)$ en fonction de $u_{\xi\xi}$ et de $u_{\eta\eta}$ qui sont les dérivées secondes directionnelles de $u(\bar{x})$ dans la direction du gradient $\xi = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ et dans la direction η orthogonale au gradient. On a dans un premier temps :

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi} &= \nabla(u_\xi).\xi \\ &= \nabla\left(\nabla u.\xi\right).\xi \\ &= \nabla\left(\frac{\nabla u.\nabla u}{\mid \nabla u \mid}\right).\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid} \\ &= \nabla\left(\mid \nabla u \mid\right).\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Et d'autre part,

$$u_{\eta\eta} = \Delta u - u_{\xi\xi} \tag{2.8}$$

On rappelle l'égalité suivante (où α est un réel et $\vec{\mathbf{v}}$ un vecteur)

$$div(\alpha.\vec{\mathbf{v}}) = \alpha.\mathbf{div}(\vec{\mathbf{v}}) + < \nabla\alpha, \vec{\mathbf{v}} > \tag{2.9}$$

ainsi que

$$\nabla\left(F(s)\right) = F'(s)\nabla s \tag{2.10}$$

où F est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et s une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

On peut alors réécrire

$$div\left(\Phi'(\mid \nabla u \mid)\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}\right) \overset{[\,2.9\,]}{=} \Phi'(\mid \nabla u \mid) div\left(\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}\right) + \nabla\left(\Phi'(\mid \nabla u \mid)\right).\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}$$

Le deuxième terme s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla\left(\Phi'(\mid \nabla u \mid)\right).\xi &\overset{[\,2.10\,]}{=} \Phi''(\mid \nabla u \mid)\, \nabla\left(\mid \nabla u \mid\right).\xi \\ &\overset{[\,2.7\,]}{=} \Phi''(\mid \nabla u \mid)\, u_{\xi\xi} \end{aligned}$$

Le premier terme s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi'(\mid \nabla u \mid) div\left(\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}\right) &\overset{[\,2.9\,]}{=} \Phi'(\mid \nabla u \mid)\left(\frac{1}{\mid \nabla u \mid} div\left(\nabla u\right) + \nabla\left(\frac{1}{\mid \nabla u \mid}\right).\nabla u\right) \\ &\overset{[\,2.10\,]}{=} \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid}\left(\Delta u - \nabla\left(\mid \nabla u \mid\right)\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}\right) \\ &\overset{[\,2.7\,]}{=} \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid}\left(\Delta u - u_{\xi\xi}\right) \\ &\overset{[\,2.8\,]}{=} \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid} u_{\eta\eta} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$P^*(v - Pu) + \lambda\left(\Phi''(\mid \nabla u \mid)u_{\xi\xi} + \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid}u_{\eta\eta}\right) = 0. \tag{2.11}$$

Remarque

On peut facilement généraliser le résultat (2.11) en dimension $n \in N$, avec $\Omega = (0, a_1) \times \cdots \times (0, a_n)$. Pour cela, il suffit de remplacer $u_{\eta\eta}$ par la somme des n-1 dérivées secondes directionnelles selon $\eta_1, \cdots, \eta_{n-1}$, où $(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_{n-1})$ forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Cela se traduit par une diffusion toujours isotrope dans l'hyperplan orthogonal au gradient de l'intensité.

2.3 Choix de la fonction de diffusion

Le lien entre l'équation de diffusion 2.2 et l'équation 2.11 obtenue au chapitre 2 s'effectue en supprimant le premier terme d'attache aux données de 2.11 et en posant $\lambda = 1$ et

$$g(\mid \nabla u \mid) = \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid}.$$

L'équation 2.2 s'interprète alors comme une descente de gradient le long d'une surface d'énergie $E(u)$ définie par :

$$E(u) = \int_{\Omega} \Phi(\mid \nabla u \mid) d\Omega \tag{2.12}$$

et elle peut mise sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla E = \Phi''(\mid \nabla u \mid) u_{\xi\xi} + \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid} u_{\eta\eta} \tag{2.13}$$

2.3.1 Critères de stabilité

Afin d'assurer la stabilité du processus d'évolution quelles que soient les conditions initiales, la surface E(u) doit posséder un minimum global.
Si l'on impose les deux contraintes 2.14 et 2.15 à la fonction Φ alors l'énergie E(u) sera convexe et la stabilité du processus sera assurée.

$$\Phi''(\mid \nabla u \mid) \geq 0 \tag{2.14}$$

$$\Phi'(\mid \nabla u \mid) \geq 0 \tag{2.15}$$

En effet, le gradient étant une fonction linéaire (donc convexe) et la norme euclidienne étant convexe,

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+, \lambda + \mu = 1,$$
$$\forall u, v \text{ fonctions de } \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}$$
$$\mid \nabla(\lambda u + \mu v) \mid \leq \lambda \mid \nabla u \mid + \mu \mid \nabla v \mid$$

en outre, Φ est croissante d'après (2.15), donc

$$\Phi(\mid \nabla(\lambda u + \mu v) \mid) \leq \Phi(\lambda \mid \nabla u \mid + \mu \mid \nabla v \mid)$$

et Φ et $\int$ sont convexes, ce qui assure donc la convexité de E.

2.3.2 Critères de restauration

Le processus de diffusion anisotrope devrait idéalement satisfaire les deux critères suivants :

1. La diffusion doit s'effectuer de manière isotrope dans les régions homogènes, c'est-à-dire lorsque $\mid \nabla u \mid$ est proche de zéro.
2. Dans les zones à fort gradient, la diffusion ne doit s'effectuer que dans la direction η qui est orthogonale au gradient de manière à conserver le contraste et renforcer les contours.

Ces deux critères s'interprètent par rapport à la fonction de diffusion Φ à l'aide de l'équation 2.13.
Le premier critère est équivalent à

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Phi'(x)}{x} \;=\; \lim_{x\to 0}\Phi''(x) \;=\; \Phi''(0) > 0 \tag{2.16}$$

Et le deuxième critère est équivalent à

$$\lim_{x\to\infty}\Phi''(x) \;=\; 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty}\frac{\Phi'(x)}{x} = Constante > 0 \tag{2.17}$$

Ces deux conditions ne pouvent être réalisées simultanément puisque si $\Phi''(x)$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini alors $\frac{\Phi'(x)}{x}$ tend aussi vers zéro.
Un critère plus large consiste à imposer à $\Phi''(x)$ de décroître plus rapidement que $\frac{\Phi'(x)}{x}$ lorsque x tend vers l'infini :

$$\lim_{x\to\infty}\Phi''(x) \;=\; 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty}\frac{\Phi'(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty}\frac{x\Phi''(x)}{\Phi'(x)} = 0 \tag{2.18}$$

2.3.3 Différentes fonctions proposées

Ces différentes fonctions sont représentées graphiquement en annexe.

Auteur	$\Phi(s)$	$\frac{\Phi'(s)}{s}$	$\Phi''(s)$	$\frac{s\Phi''(s)}{\Phi'(s)}$
Perona-Malik [PM90]	$\frac{-k^2}{2}\left(e^{-\left(\frac{s}{k}\right)^2}-1\right)$	$e^{-\left(\frac{s}{k}\right)^2}$	$\left(1-2\left(\frac{s}{k}\right)^2\right)e^{-\left(\frac{s}{k}\right)^2}$	$1-2\left(\frac{s}{k}\right)^2$
Perona-Malik [PM90]	$\frac{k^2}{2}\log\left(1+\left(\frac{s}{k}\right)^2\right)$	$\frac{1}{1+\left(\frac{s}{k}\right)^2}$	$\frac{k^2\left(k^2-s^2\right)}{\left(k^2+s^2\right)^2}$	$\frac{k^2-s^2}{k^2+s^2}$
Geman et Reynolds [GR84]	$\frac{\left(\frac{s}{k}\right)^2}{1+\left(\frac{s}{k}\right)^2}$	$\frac{2k^2}{\left(k^2+s^2\right)^2}$	$-\frac{2k^2\left(-k^2+s^3\right)}{\left(k^2+s^2\right)^2}$	$-\frac{k^2-s^3}{k^2+s^2}$
Tikhonov	$\frac{s^2}{2}$	1	1	1
Green [Gre90]	$\log\cosh(s/k)$	$\frac{\tanh(s/k)}{ks}$	$k^{-2}\left(\cosh\left(\frac{s}{k}\right)\right)^{-2}$	$\frac{s}{k\sinh\left(\frac{s}{k}\right)\cosh\left(\frac{s}{k}\right)}$
Rudin [ROF92]	s	$\frac{1}{s}$	0	0
Aubert [CABFB94]	$\sqrt{1+\left(\frac{s}{k}\right)^2}-1$	$\frac{1}{\sqrt{1+(s/k)^2}}k^{-2}$	$\frac{\lvert k\rvert}{\left(k^2+s^2\right)^{3/2}}$	$\frac{k^2}{k^2+s^2}$
Alvarez [ALM92]	...	g(s)	(1-h(s))g(s)	1-h(s)

Alvarez ne propose pas une fonction Φ mais deux fonctions g() et h() vérifiant les propriétés suivantes :

$$h(s) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } s \geq 2e \\ 0 & \text{si } s \leq e \end{cases}$$

et

$$g(s) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{lorsque } s \to 0 \\ 0 & \text{lorsque } s \to \infty \end{cases}$$

Si l'on impose en outre à h(s) de rester inférieure à 1 (sur l'intervalle [e,2e]) et à g(s) d'être positive, alors les conditions de stabilité sont vérifiées.
Cependant, cette approche ne permet plus d'interpréter le processus de diffusion comme un algorithme de minimisation d'une énergie dépendante de la fonction Φ, à moins d'imposer

$$h(s) = -\frac{g'(s)}{g(s)}$$

Le tableau ci-dessous donne les conditions vérifiées par chacune de ces fonctions de diffusion :

	stabilité		restauration	
Auteur	condition 2.14	condition 2.15	condition 2.16	condition 2.18
Perona-Malik		□	□	
Perona-Malik		□	□	
Geman Reynolds		□	□	
Tikhonov	□	□	□	
Green (*)	□	□	□	□
Rudin	□	□		□
Aubert (*)	□	□	□	□
Alvarez (*)	□	□	□	□

Seules les 3 fonctions signalées par un astérisque vérifient toutes les conditions de stabilité et de restauration de l'image.

2.4 Mise en œuvre du processus de diffusion

L'équation de diffusion anisotrope (2.2) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= div\left(g(\mid \nabla u \mid).\nabla\left(u\right)\right) \\ &= div\left(\frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid}.\nabla\left(u\right)\right) \end{aligned}$$

est réécrite en introduisant la fonction $c(\bar{x}, t) = (g(\mid \nabla u \mid))(\bar{x}, t)$, où $\bar{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ représentant la position d'un pixel de l'image, et $t \in \mathbb{R}$ est le paramètre d'évolution du processus :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x}, t) = div\left(c(\bar{x}, t).\nabla\left(u\right)(\bar{x}, t)\right) \tag{2.19}$$

2.4.1 Approximation numérique en dimension 1

En dimension 1, l'équation 2.19 s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(c(x,t).\nabla\left(u\right)(x,t)\right) \\ &\approx \frac{\partial}{\partial x}\left(c(x,t).\frac{1}{dx}\left(u(x+\frac{dx}{2},t) - u(x-\frac{dx}{2},t)\right)\right) \\ &\approx \frac{1}{dx^2}.\Big[\, c(x+\frac{dx}{2},t).\left(u(x+dx,t) - u(x,t)\right) - \qquad (2.20) \\ &\qquad c(x-\frac{dx}{2},t).\left(u(x,t) - u(x-dx,t)\right)\Big] \\ &\approx \varphi_{droite} - \varphi_{gauche} \text{ si } dx = 1 \qquad (2.21) \end{aligned}$$

En notant $\varphi(x,t)$ la fonction $c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$,

$$\varphi_{droite} = \varphi(x+\frac{dx}{2},t) \text{ et } \varphi_{gauche} = \varphi(x-\frac{dx}{2},t).$$

2.4.2 Généralisation en dimension n

Le résultat précédent se généralise facilement en dimension n, et correspond à la somme des variation de la fonction φ selon chaque dimension.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x},t) &= div\left(c(\bar{x},t).\nabla(u)(\bar{x},t)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(c(\bar{x},t).\frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x},t)\right) \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(c(\bar{x},t).\frac{1}{dx_i}\left(u(\bar{x}+\frac{dx_i}{2},t)-u(\bar{x}-\frac{dx_i}{2},t)\right)\right) \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{dx_i^2}.\Big[\, c(\bar{x}+\frac{dx_i}{2},t).\left(u(\bar{x}+dx_i,t)-u(\bar{x},t)\right) - \\
&\qquad\qquad c(\bar{x}-\frac{dx_i}{2},t).\left(u(\bar{x},t)-u(\bar{x}-dx_i,t)\right)\,\Big] \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i^+}-\varphi_{x_i^-} \text{ si } \forall i, dx_i = 1 \qquad (2.22)\\
\text{noté}\ & (\delta u)(\bar{x},t)
\end{aligned}$$

En notant $\varphi(\bar{x},t)$ le vecteur $c(\bar{x},t)\nabla(u)(\bar{x},t)$,

$$\varphi_{x_i^+} = \varphi_{x_i}(\bar{x}+\frac{dx_i}{2},t) \text{ et } \varphi_{x_i^-} = \varphi_{x_i}(\bar{x}-\frac{dx_i}{2},t).$$

2.4.3 Algorithme

La diffusion a été programmée en dimensions 1, 2 et 3. Le processus consiste à itérer un certain nombre de fois l'équation

$$\forall\bar{x}\in\Omega, u(\bar{x},t+dt) = u(\bar{x},t)+dt.(\delta u)(\bar{x},t)$$

Le calcul de $(\delta u)(\bar{x},t)$ n'est cependant pas immédiat, deux versions ont été réalisées :

1. La première avec dx = 1 pixel donc dx_i = la taille d'un pixel selon la i^{me} dimension,
2. La deuxième avec dx = 2 pixels.

Dans la première version, le calcul de $(\delta u)(\bar{x},t)$ se fait directement pour chaque pixel (ou voxel) mais l'expression $c(\bar{x}\pm\frac{dx_i}{2},t)$ nécessite d'évaluer la norme du gradient de l'image au milieu de pixels voisins.
Cette norme est calculée à l'aide de la moyenne des gradients de l'image en chacun des deux pixels. La deuxième version utilise une valeur plus importante pour dx, ce qui entraîne une perte de précision dans le calcul des dérivées, mais permet d'améliorer le temps de calcul.
En effet, cette version permet de mémoriser dans un premier temps les valeurs de $c(\bar{x},t)$ pour tout $\bar{x}\in\Omega$ puis ensuite de calculer plus rapidement $(\delta u)(\bar{x},t)$, chaque valeur de $c(\bar{x},t)$ étant utilisée 2n fois pour tout $\bar{x}\in\Omega$.

Première version de l'algorithme

Algorithme 1 (calcul de $(\delta u)(\bar{x},t)$ version 1) *:*

Pour $\bar{x}$ dans Ω Faire
    delta = 0
    Pour i = 1 à n Faire
        delta = delta + 1/h_i $\times$ $\left(\varphi_{x_i^+} - \varphi_{x_i^-}\right)$
    FinPour
    *u($\bar{x}$,t+dt) = u($\bar{x}$,t) + delta*dt*
FinPour

avec pour le calcul de $\varphi_{x_i^+}$ (par exemple)
gradientcarre = 0
Pour k = 1 à n Faire
    $var_k = \frac{1}{2.h_k}\left(u(\bar{x}+\frac{h_i}{2}+h_k) - u(\bar{x}+\frac{h_i}{2}-h_k)\right)$
    *gradientcarre = gradientcarre + var_k * var_k*
FinPour
$\varphi_{x_i^+} = g(\ \sqrt{gradientcarre}\ ) * var_i$

et
$u(\bar{x}+\frac{h_i}{2}\pm h_k) = \frac{1}{2}\left(u(\bar{x}+h_i\pm h_k) + u(\bar{x}\pm h_k)\right)$

Le calcul de complexité donne les résultats suivant, avec p le nombre de points de l'image et n la dimension de l'image :

- nombre de $\sqrt{\cdots}$ = 2np ,
- nombre d'accès à l'image = 24np,
- nombre d'additions = np(n+27),
- nombre de multiplications ou divisions = np(n+14) ,
- nombre d'appels à la fonction de diffusion g() = 2np.

Deuxième version

Algorithme 2 (calcul de $(\delta u)(\bar{x},t)$ version 2) *:*

Première Partie : Calcul des $c(\bar{x},t)$
Pour $\bar{x}$ dans Ω Faire
    Pour k = 1 à n Faire
        $d = \frac{1}{2.h_k}\left(u(\bar{x}+h_k) - u(\bar{x}-h_k)\right)$
        *gradientcarre = gradientcarre + d * d*
    FinPour
    $c(\bar{x}) = g(\sqrt{gradientcarre})$
FinPour

Deuxième partie : Calcul de la nouvelle image
Pour $\bar{x}$ dans Ω Faire
    delta = 0
    Pour k = 1 à n Faire
        $delta = delta + \frac{1}{4.h_k^2}\Big[\, c(\bar{x}+h_k) * (u(\bar{x}+2.h_k) - u(\bar{x})) -$
                $c(\bar{x}+h_k) * (u(\bar{x}) - u(\bar{x}-2.h_k))\,\Big]$
    FinPour
    $u(\bar{x},t+dt) = u(\bar{x},t+dt) + delta*dt$
FinPour

Le calcul de complexité donne les résultats suivant, avec p le nombre de points de l'image et n la dimension de l'image :

- nombre de $\sqrt{\cdots}$ = p ,
- nombre d'accès à l'image = 4np,
- nombre d'additions = p(8n-2),
- nombre de multiplications ou divisions = n(5n+1) ,
- nombre d'appels à la fonction de diffusion g() = p.

On constate que ces valeurs sont bien meilleures que celles de l'algorithme précédent, pour les raisons expliquées précédemment.
La dimension restant en pratique égale à 1, 2 ou 3, elle peut être considérée comme constante et la complexité sur le plan théorique est de O(p). En outre, ces algorithmes ne permettent pas de calculer le gradient sur les bords de l'image, et il faudrait alors diffuser dans le plan orthogonal au bord (en 3D) ou dans la droite orthogonale (en 2D).

2.5 Principaux paramètres de la procédure

2.5.1 Le seuil k et la fonction de diffusion

Evolution d'une pente

On crée une fonction de la forme 'arc-tangente', qui simule une variation importante de l'intensité de l'image (pente). Les figures suivantes permettent d'interpréter l'évolution de cette image.

En dimension 1, le processus de diffusion anisotrope s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Phi''(\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Si l'on note pour t fixé, u(x,t) = u(x), $du = \Phi''(u'(x))u''(x)$

La figure 2.3 contient l'image u(x), et ses dérivées u' et u".

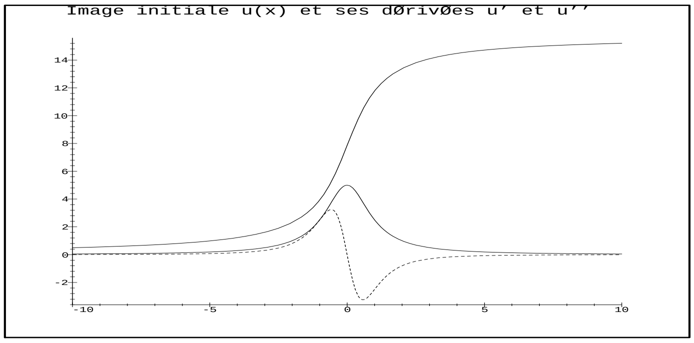


FIG. 2.3 – *fonction pente*

Afin de bien comprendre le processus, on a représenté les quatre fonctions suivantes :

1. la fonction de diffusion Φ'',
2. le coefficient $\Phi''(u')$,
3. la variation de l'image $du = \Phi''(u')u''$,
4. et la nouvelle pente $u + du$.

Fonction de diffusion stable (figure 2.4)

Le processus est stable mais lorsque l'on itère à l'infini, il tend vers une image de gradient nul (minimum de la surface d'énergie).
Les gradients faibles (<au seuil k) sont beaucoup plus atténués que les gradients forts ($\gg$ k).

Fonction de diffusion instable (figure 2.5)

Le processus est instable mais il possède la propriété de rehausser la pente si la norme du gradient est bien supérieure à k.

La figure 2.6 montre bien la différence d'évolution d'une même pente pour la fonction de *Green* stable et pour la fonction de *Perona et Malik 1* instable. Nous constatons que la fonction instable a

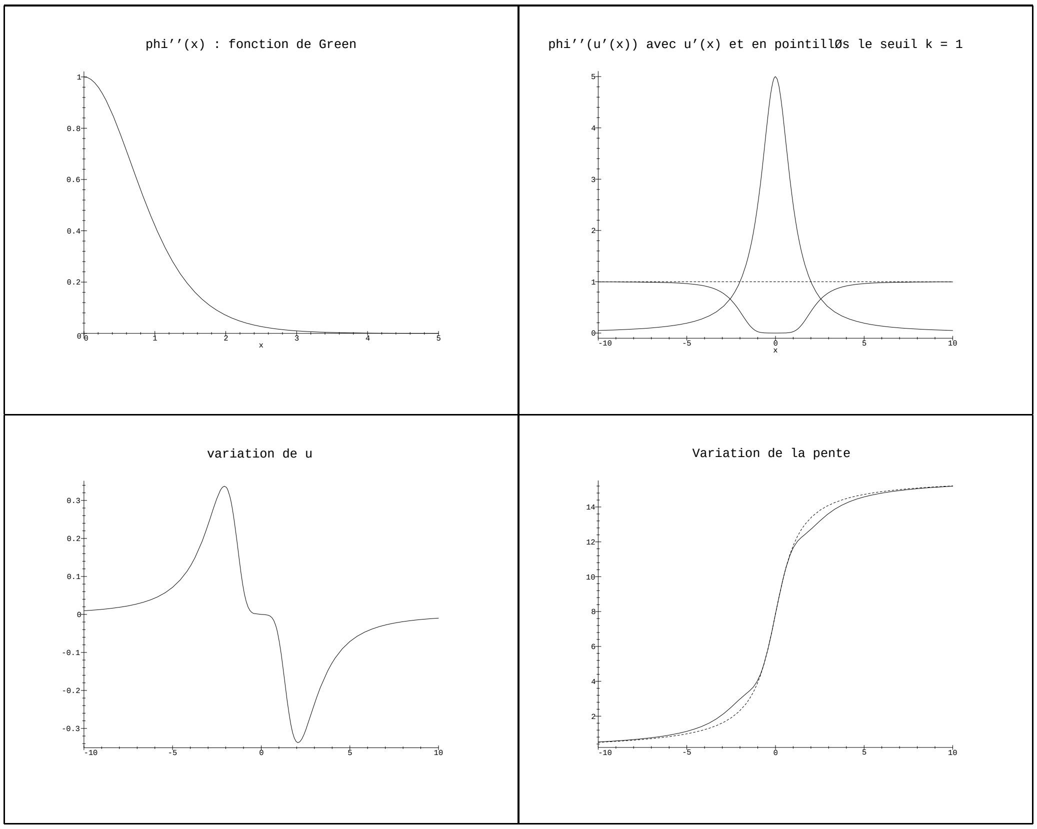


FIG. 2.4 – **en haut à gauche** *fonction de Green, stable;* **en haut à droite** *coefficient de diffusion quasi nul si u' >2k;* **en bas à gauche** *variation de u;* **en bas à droite** *nouvelle pente.*

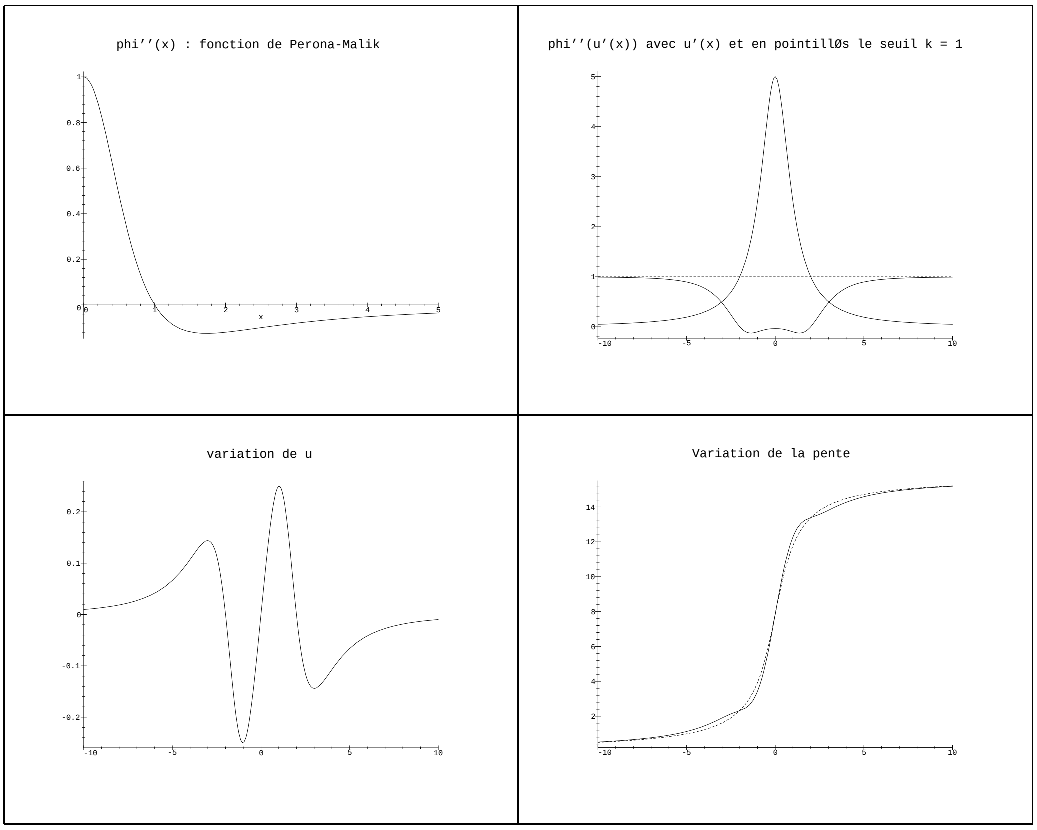


FIG. 2.5 – **en haut à gauche** *fonction rationnelle de Perona-Malik, instable;* **en haut à droite** *le coefficient de diffusion devient négatif lorsque la pente dépasse le seuil k;* **en bas à gauche** *variation de u;* **en bas à droite** *nouvelle pente.*

rendue la pente verticale après un nombre élevé d'itérations, mais qu'elle a aussi créé des oscillations parasites.

En pratique la valeur du seuil k dépend directement de l'écart-type du bruit dans l'image. La diffusion anisotrope ne sera efficace que si les variations du gradient introduites par le bruit restent inférieures aux valeurs du gradient qui caractérisent les frontières des différents tissus.

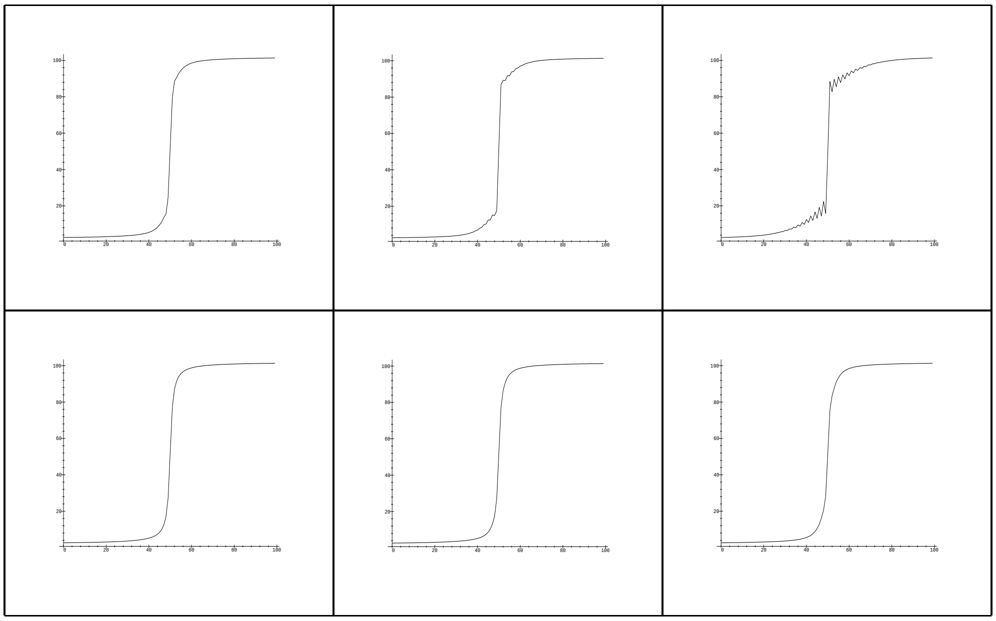


FIG. 2.6 – *Evolution d'une pente selon la fonction de diffusion et le nombre de pas avec un seuil $k = 5$* **ligne du haut** *fonction de Perona et Malik 1 (instable);* **ligne du bas** *fonction de Green (stable);* **colonne de gauche** *résultat après 10 itérations;* **colonne du milieu** *résultat après 50 itérations;* **colonne du droite** *résultat après 300 itérations.*

2.5.2 Le nombre de pas

La figure 2.7 présente l'évolution du processus de diffusion anisotrope sur une ligne d'une image IRM du cerveau. Les images ont été obtenues avec un seuil k = 1 et un paramètre dt = 0.3 après 0,..,8,20,30 et 45 itérations.
Lorsque $x \in [0..40]$, l'intensité correspond à celle du fond de l'image. Le bruit dans cette zone est éliminé rapidement grâce à une diffusion importante.
Dans l'image 8, le bruit pour x <40 a été bien atténué et les contraste de l'image pour x >40 sont conservés.
Par contre, la perte d'information par rapport à l'image initiale est mise en évidence après un nombre élevé d'itérations (image 45) où les *pics* et les *creux* de la fonction d'intensité sont atténués.

2.6 Autre approche

Lorsque Φ'' est négatif, la fonction de diffusion peut réhausser le gradient de l'image et donc le contraste, mais cela introduit une instabilité. En effet, l'équation de diffusion agit alors comme une

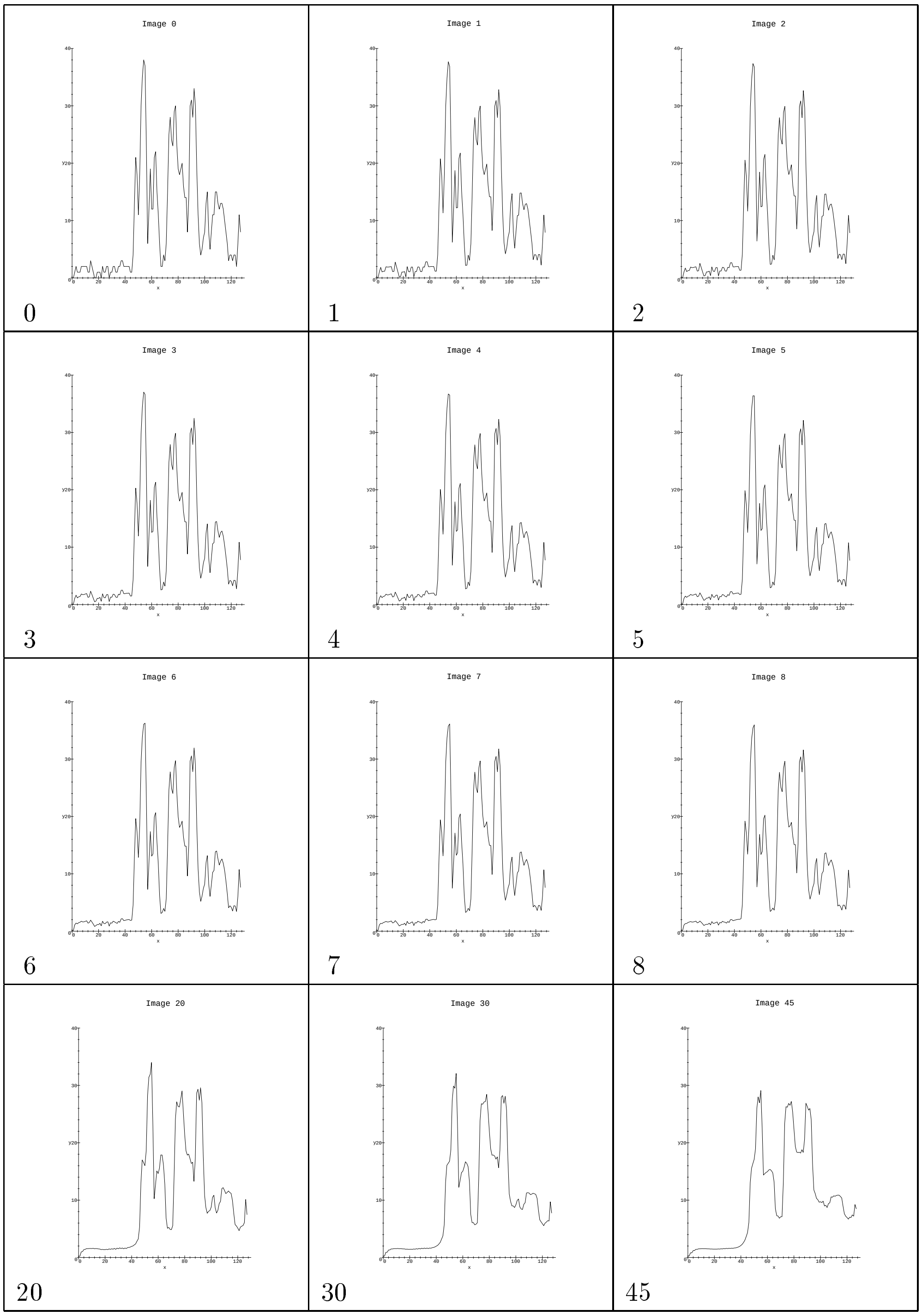


FIG. 2.7 – *Evolution d'une ligne d'intensité prise sur une image IRM du cerveau. Diffusion anisotrope avec* $k = 1$*,* $dt = 0.3$*; itérations 0..8,20,30,45.*

équation inverse de la chaleur et en outre les discontinuités introduites par le bruit peuvent être accentuées.

L'algorithme peut alors avoir un effet contraire à celui souhaité, c'est-à-dire amplifier le bruit au lieu de le supprimer.

Afin de résoudre ce problème, Catté, Lions, Morel et Coll [CCLM92] proposent de calculer le coefficient de diffusion non pas sur la norme du gradient de l'image, mais plutôt sur la norme du gradient de l'image lissée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div\,(g(\mid \nabla(G_\sigma * u) \mid)\nabla u)$$

Dans cette équation, G_σ représente une fonction gaussienne d'écart-type σ et $*$ est le produit de convolution.
Cette approche permet de résoudre le problème des discontinuités locales du gradient liées au bruit. La stabilité et la convergence de ce nouveau modèle sont démontrés dans [CCLM92].

Les auteurs proposent de fixer l'arrêt de l'algorithme à une échelle t de l'ordre du paramètre σ de la Gaussienne.

La figure 2.8 permet de comparer l'évolution d'une pente avec l'équation de diffusion proposée par *Pérona et Malik* (approche "classique") et avec celle proposée par *Catté*. Le seuil k est fixé à 2 et l'écart-type de la gaussienne vaut 1. Le résultat après 300 itérations montre l'avantage de la méthode la méthode de *Catté* qui permet d'utiliser une fonction qui "réhausse" la pente tout en conservant un processus stable. Cependant, lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini, les deux méthodes convergent vers une fonction constante, même si la méthode de *Catté* qui préserve mieux la pente converge moins vite vers cette solution (figure 2.8 après 5000 itérations).

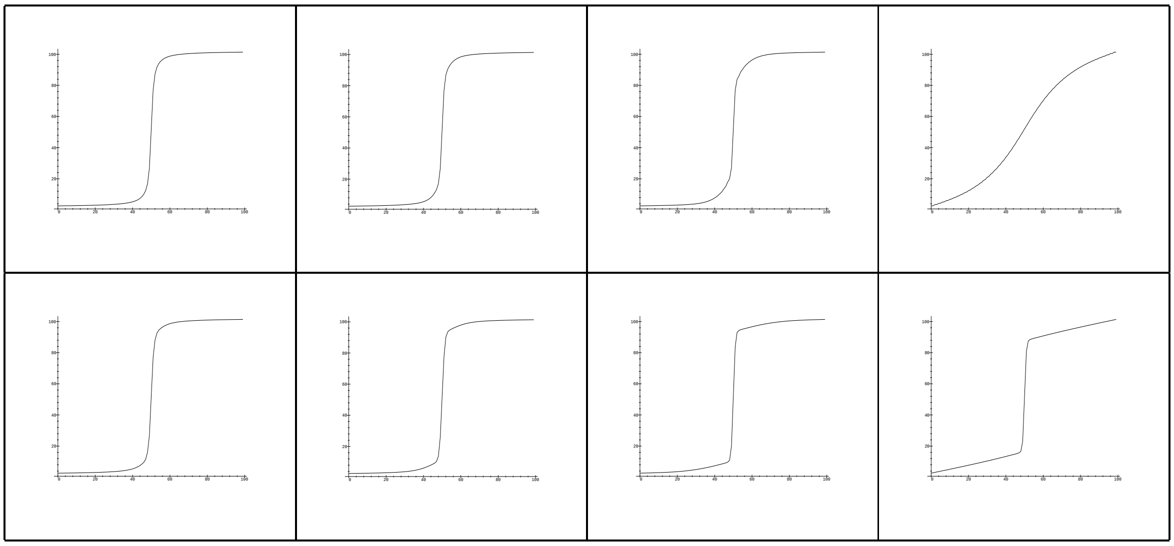


FIG. 2.8 – *Comparaison de la méthode de Catté (paragraphe 2.6) et de la méthode de Pérona et Malik, avec un seuil k = 2* **ligne du haut** *fonction de Green (stable);* **ligne du bas** *fonction de Perona et Malik 1 avec le processus de diffusion présenté en 2.6;* **de gauche à droite** *résultats après 10,50,300 et 5000 itérations.*

2.7 Défauts et perspectives

La mise en oeuvre du processus de diffusion anisotrope fondée sur des travaux récents ([GKKJ92], [DF95]) a donné de bons résultats pour l'amélioration de la qualité des images et du rapport signal / bruit .
L'étude des différents paramètres de l'algorithme met cependant en évidence des améliorations possibles à ce processus :

- permettre au processus de converger vers une image segmentée ou linéaire par parties. Nordström propose dans [Nor90] d'introduire un terme d'attache aux données dans le processus de diffusion,
- proposer une valeur pour le seuil k de l'ordre de l'écart-type du bruit,
- fixer un critère d'arrêt de l'algorithme,
- étendre la diffusion isotrope dans le plan tangent aux isosurfaces en une diffusion anisotrope, et obtenir trois coefficients de diffusion dans les images tridimensionnelles.

Dans la prochaine partie, nous étudierons une technique de segmentation d'images utilisée pour la reconnaissance des tissus (matière blanche et matière grise) du cerveau.

Cette technique servira à évaluer la diffusion anisotrope en tant que pré-traitement de la segmentation.

Chapitre 3

Segmentation matière blanche / matière grise

Les images tridimensionnelles deviennent de plus en plus populaires dans le domaine médical. Elles proviennent de différentes sources comme l'imagerie par résonnance magnétique IRM, la tomographie (appelée aussi imagerie par scanner), l'imagerie issue de la médecine nucléaire et l'échographie.
Ces images partagent la spécificité de décrire des propriétés physiques ou chimiques en chaque point d'un volume étudié. Cette information est stockée dans une matrice tridimensionnelle I(x,y,z) où chaque valeur représente l'intensité moyenne d'un voxel (élément volumique) appelé ainsi par analogie au pixel dans une image bidimensionnelle.
Dans le cas des IRM, l'intensité I mesure la densité et la structure locales des protons et dans le cas des images tomographiques, I mesure la densité locale d'absorption de rayons X. Ces deux types d'informations sont complémentaires.
L'intensité des images issues de la médecine nucléaire mesure localement la densité des molécules radioactives injectées. Elles fournissent des informations sur la fonctionnalité du métabolisme des régions étudiées (par exemple la densité de glucose consommée par unité de temps et de volume dans le cerveau).
Enfin, l'échographie mesure la variation locale de l'impédance acoustique (fonction de la vitesse de propagation des ultra-sons). Les images échographiques sont acquises facilement et rapidement, et donnent à la fois des informations anatomiques (par exemple sur les frontières des structures anatomiques) et dynamiques (par exemple les battements du coeur).

Parmi les principaux centres d'intérêt du traitement d'images, la segmentation des images tridimensionnelles joue un rôle essentiel car elle intervient comme étape préliminaire à la majorité des autres traitements informatiques. Le but de celle-ci est de partitionner une image tridimensionnelle en régions correspondant à des structures anatomiques d'intérêt. Malheureusement, toutes les techniques d'acquisition d'images générent des artefacts comme du bruit et du biais qui rendent difficile cette tâche de segmentation.

Dans ce chapitre, nous étudions une technique de segmentation proposée par Wells [WGKJ95] visant à segmenter la matière blanche et la matière grise dans des images IRM tridimensionnelles issues du cerveau.

3.1 Présentation du problème

Les images du cerveau permettant de localiser la matière blanche et la matière grise s'obtiennent par résonance magnétique. Les images obtenues sont difficiles à segmenter pour deux raisons. D'une part, les intensités des différents tissus sont proches relativement à l'écart-type du bruit. D'autre part, des inhomogénéités spatiales dans l'intensité d'un même tissu sont introduites par les équipements d'acquisition.

L'image mesurée est modélisée par l'équation :

$$I_{mes}(\bar{x}) \;=\; I_{rest}(\bar{x}) \times G(\bar{x}) + N(\bar{x}) \tag{3.1}$$

où

- I_{mes} est l'image mesurée,
- I_{rest} est l'image restaurée qui doit être obtenue par l'algorithme,
- G est le gain multiplicatif intoduit par les appareils de mesure,
- N est le bruit de l'image.

Wells et al [WGKJ95] décrivent une méthode statistique qui prend en compte à la fois des connaissances sur les propriétés des tissus et les inhomogénéités de l'intensité pour corriger l'image initiale. Pour cela, ils utilisent l'*algorithme EM* (Estimation-Maximisation) dont la convergence est assurée par l'itération de deux étapes :

- une étape d'estimation de la classification des tissus,
- une étape de maximisation de la probabilité du gain.

Nous montrons dans les paragraphes suivants comment l'algorithme EM est appliqué dans le cadre de la segmentation d'images cérébrales.

3.2 Utilisation de l'algorithme EM pour la segmentation

Les inhomogénéités d'intensité dans l'image sont modélisées par un facteur multiplicatif, dans la suite de ce chapitre, nous travaillerons sur le logarithme de l'intensité de l'image ce qui permettra de transformer le *gain multiplicatif* en un *biais additif* .

On notera

n	le nombre de points de l'image,
Y_i	l'intensité de l'image au point i,
β_i	le biais d'intensité de l'image au point i,
p	le nombre de classes,
$(C_1, \cdots, C_p)$	les différentes classes,
U	le vecteur des moyennes d'intensités par classe,
Γ_i	la classe d'appartenance du point i,
W_{ik}	la probabilité pour le point i d'appartenir à la classe k,

3.2.1 Théorie

La distribution des valeurs d'intensité de l'image est modélisée par une distribution normale

$$p(Y_i|\Gamma_i,\beta_i) = G_\sigma(Y_i - U_{\Gamma_i} - \beta_i), \tag{3.2}$$

où

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \tag{3.3}$$

Une probabilité à priori pour un point d'appartenir à une classe Γ_i de tissu est utilisée et notée $p(\Gamma_i)$. Elle est choisie uniforme à travers les différentes classes ($\frac{1}{p}$) car on suppose qu'un point n'a a priori pas de raison d'appartenir à une classe plutôt qu'à une autre.

Le vecteur de biais $\beta = (\beta_0, \cdots, \beta_{n-1})^t$ est modélisé par une densité de probabilité gaussienne de moyenne nulle, (ce qui traduit la forme lisse du biais imposée par les techniques d'acquisitions de l'IRM)

$$p(\beta) = G_{\psi_\beta}(\beta),$$

où

$$G_{\psi_\beta}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mid \psi_\beta \mid^{-\frac{1}{2}} e^{\left(-\frac{1}{2}x^t\psi_\beta^{-1}x\right)}$$

ψ_β dénote la matrice $n \times n$ de covariance du vecteur de biais.

En utilisant la définition de la probabilité conditionnelle, en supposant l'indépendance de l'appartenance à une classe et du biais, et en supposant l'indépendance des voxels, la formule de Bayes conduit à l'expression suivante de la probabilité du biais connaissant l'image observée :

$$p(\beta|Y) = \prod_i \left[\sum_{\Gamma_i} p(Y_i|\Gamma_i,\beta_i)p(\Gamma_i)\right] \frac{p(\beta)}{p(Y)}. \tag{3.4}$$

On estime la valeur du biais comme la valeur de β qui maximise cette probabilité

$$\hat{\beta} = \arg\max_\beta p(\beta|Y). \tag{3.5}$$

Une condition nécessaire pour obtenir ce maximum est d'avoir un gradient nul :

$$\forall i \left[\frac{\partial}{\partial\beta_i}(\ln p(\beta|Y))\right]_{\beta=\hat{\beta}} = 0 \tag{3.6}$$

En remplaçant $p(\beta|Y)$ par son expression en 3.4, on obtient :

$$\forall i \left[\frac{\sum_{\Gamma_i} p(\Gamma_i)\frac{\partial}{\partial\beta_i}(p(Y_i|\Gamma_i,\beta_i))}{\sum_{\Gamma_i} p(\Gamma_i)p(Y_i|\Gamma_i,\beta_i)} + \frac{\frac{\partial p(\beta)}{\partial\beta_i}}{p(\beta)}\right]_{\beta=\hat{\beta}} = 0 \tag{3.7}$$

La modélisation 3.2 permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial\beta_i}(p(Y_i|\Gamma_i,\beta_i)) = \frac{1}{\sigma^2}(Y_i - U_{\Gamma_i} - \beta_i)\, p(Y_i|\Gamma_i,\beta_i) \tag{3.8}$$

et d'exprimer 3.7 sous la forme suivante :

$$\forall i \left[Y_i - \beta_i - \sum_j W_{ij} U_{\Gamma_j} + \sigma^2 \frac{\frac{\partial p(\beta)}{\partial \beta_i}}{p(\beta)} \right]_{\beta=\hat{\beta}} = 0 \tag{3.9}$$

avec

$$W_{ij} = \frac{p(\Gamma_i = C_j) p(Y_i|\Gamma_i = C_j, \beta_i)}{\sum_{k=1} p p(\Gamma_i = C_k) p(Y_i|\Gamma_i = C_k, \beta_i)} \tag{3.10}$$

La condition 3.9 peut être réécrite ainsi :

$$\left[Y - \beta - WU + \sigma^2 \frac{\nabla_\beta p(\beta)}{p(\beta)} \right]_{\beta=\hat{\beta}} = 0 \tag{3.11}$$

Et en différenciant le dernier terme de 3.11

$$\left[Y - \beta - WU - \sigma^2 \psi_\beta^{-1} \beta \right]_{\beta=\hat{\beta}} = 0 \tag{3.12}$$

On obtient finalement :

$$[\beta = H(Y - WU)]_{\beta=\hat{\beta}} \tag{3.13}$$

$$\text{avec} \tag{3.14}$$

$$H = \left(I + \sigma^2 \psi_\beta^{-1} \right)^{-1} \tag{3.15}$$

3.2.2 Etapes de l'algorithme

L'algorithme se présentre comme un processus itératif où chaque itération est composée de deux étapes

$\hookrightarrow$ **Etape E** (Estimation)

$$W_{ik}^{n+1} = \frac{P(\Gamma_i = C_k) P(Y_i/\Gamma_i = C_k, \beta_i)}{\sum_{l=0}^{p} P(\Gamma_i = C_l) P(Y_i/\Gamma_i = C_l, \beta_i)}$$

$\hookrightarrow$ **Etape M** (Maximisation)

$$\hat{\beta} = \arg\max_\beta P(\beta/Y) = H(Y - WU)$$

Le processus converge en maximisant la probabilité du biais estimé dans l'image. L'expression de la matrice H est difficile à obtenir et demande un temps de calcul très important. Le calcul de H (3.16) requiert deux inversions de matrice de dimension $(n \times n)$ où n est le nombre de points de l'image.

$$H = \left(I + \sigma^2 \psi_\beta^{-1} \right)^{-1} \tag{3.16}$$

Dans la pratique, on utilise pour H un filtre passe bas qui permet de modéliser l'homogénéité spatiale du biais.

Le filtre H utilisé pour l'implémentation de notre algorithme est un lissage par une gaussienne dont l'écart-type est donné en paramètre.

L'initialisation du processus est faite avec une matrice de biais nulle et une probabilité $p(\Gamma_i)$ égale pour chaque classe à $\frac{1}{p}$. L'utilisateur doit spécifier l'écart-type du filtre H, le nombre de classes, les moyennes et les écart-types pour l'intensité de chaque classe, ainsi que le nombre d'itérations.

En outre, l'estimation du biais dans certaines classes comme le fond de l'image n'a pas d'intérêt et peut même fausser le calcul global du biais. En effet, si le fond de l'image a par exemple une intensité moyenne de 5 et le bruit un écart-type de même valeur, l'intensité peut être multipliée par deux à cause du bruit et non pas d'un biais dans l'image.
Afin de résoudre ce problème, l'utilisateur peut spécifier les classes qui ne seront pas prises en compte dans l'estimation du biais.

Chapitre 4

Résultats

Ce chapitre présente des résultats de l'utilisation de la diffusion anisotrope comme étape préliminaire à la segmentation d'images médicales. Une première partie montre des résultats de la combinaison de la diffusion anisotrope avec la méthode de segmentation utilisant l'algorithme EM. Nous présentons dans une deuxième partie des résultats de la segmentation de vaisseaux sanguins dans des angiographies du cerveau avec et sans diffusion anisotrope préalable.

4.1 Segmentation des tissus dans les IRM du cerveau

Afin de montrer l'intérêt de combiner la diffusion anisotrope avec la méthode de segmentation utilisant l'algorithme EM, nous allons présenter des tests effectués sur des images synthétiques.
Ces tests sont réalisés à l'aide d'une première **image segmentée** I_0 .
Cette image sera ensuite **bruitée** à l'aide d'un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart-type σ, puis elle sera **biaisée** à l'aide d'une fonction multiplicative gaussienne dont on fixera l'amplitude maximale, l'écart-type, et dont le paramètre sera l'abscisse x de l'image.
Nous obtiendrons alors une image I_0' que l'on peut caractériser par l'équation suivante :

$$I_0' \ = \ I_0 \times B(x) + N_\sigma \tag{4.1}$$

où $B(x)$ est le biais multiplicatif et N_σ le bruit gaussien d'écart-type σ.
A partir de l'image I_0', nous calculerons les images I_1 et I_2, la première étant obtenue par segmentation directe de I_0' et la deuxième par segmentation du résultat d'une diffusion anisotrope de I_0'.
Enfin, la comparaison de I_1 et I_2 avec l'image initiale I_0 permettra d'évaluer la qualité des segmentations obtenues.

Trois séries de tests sont présentées :

1. premièrement, des tests sur la segmentation d'une image en forme de croix tridimensionnelle fortement bruitée,

2. deuxièmement, des tests sur la segmentation d'une image synthétisée à partir d'une vraie IRM du cerveau, à laquelle on a ajouté un faible bruit et un biais important,

3. troisièmement, la même image que précédemment à laquelle nous ajoutons à la fois un bruit et un biais de fortes amplitudes.

4.1.1 Image bruitée non biaisée

L'image choisie pour les tests est une croix tridimensionnelle centrée dans un cube (cf fig 4.1). C'est une image contenant trois couleurs : 0, 100 et 120, où la valeur 0 représente le fond de l'image, la valeur 100 simule la matière grise et la valeur 120 simule la matière blanche.

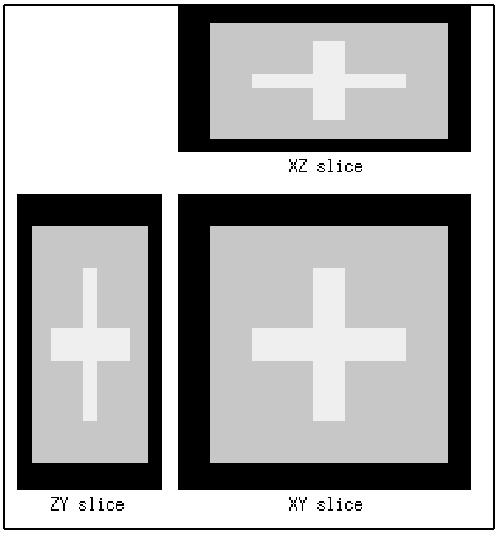


FIG. 4.1 – *Image I_0 créée pour les tests : croix en 3 dimensions.*

Dans cette partie, nous travaillons sur l'image de la figure 4.1 qui a été bruitée avec un bruit d'écart-type supérieur à 10, de manière à mélanger les régions représentant les matières blanche et grise et à rendre la segmentation plus difficile. La figure 4.2 représente l'image obtenue après bruitage.

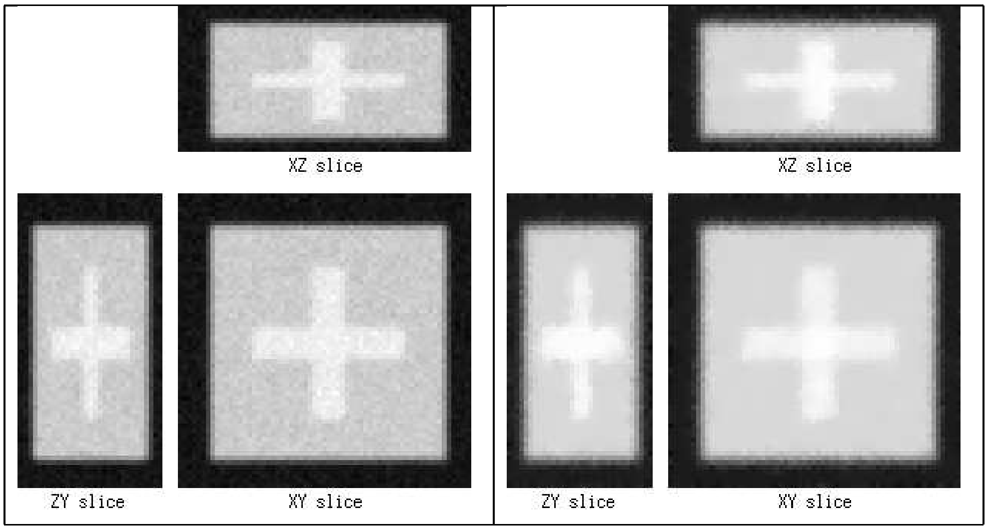


FIG. 4.2 – **à gauche** *Image de test bruitée $I_{bruitee}$* **à droite** *Image $I_{bruitee}$ après diffusion anisotrope.*

Nous présenterons et comparerons les résultats de cette image de test segmentée à l'aide de l'algorithme EM avec et sans diffusion anisotrope préalable.

Segmentation directe

L'image de gauche de la figure 4.2 a été segmentée avec l'algorithme EM et les paramètres suivants :

nombre de classes	3		
écart-type du filtre	3		
nombre d'itérations	10		
	classe 1	classse 2	classe 3
moyennes	0	100	120
écart-types	3	3	3

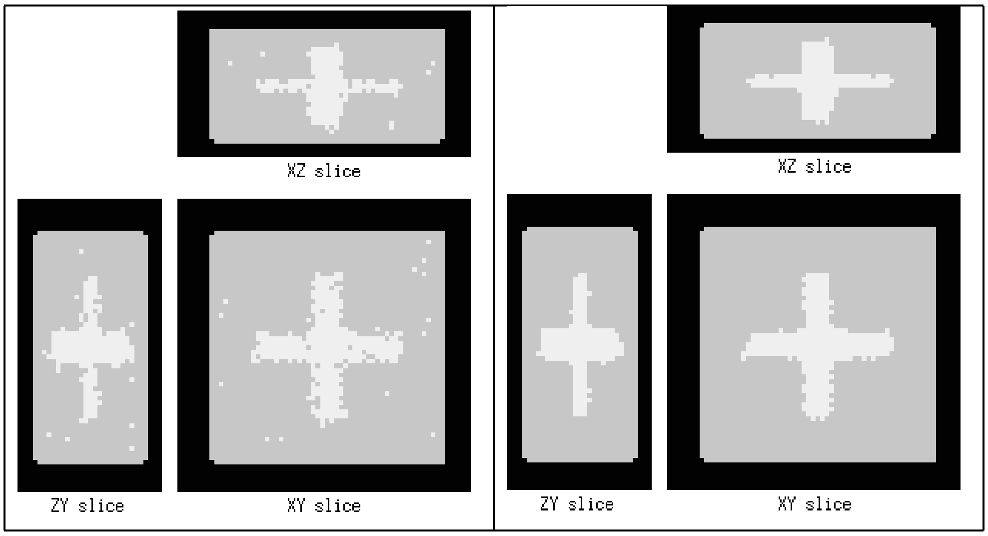


FIG. 4.3 – **à gauche** *Résultat I_1 d'une segmentation directe de l'image bruitée .* **à droite** *Résultat I_2 d'une segmentation après diffusion anisotrope de l'image bruitée .*

Diffusion puis segmentation

L'image de droite de la figure 4.2 est obtenue à l'aide d'une diffusion anisotrope de l'image de gauche utilisant l'algorithme présenté par Catté et al [CCLM92].

Les paramètres de la diffusion sont :

fonction de diffusion	Perona et Malik 1
dimension	3D
écart-type de la gaussienne	0.7
nombre d'itérations	10
dt	$\frac{1}{7}$
seuil k	1.0

Cette image est ensuite segmentée avec les mêmes paramètres que l'image précédente. La figure 4.3 présente les résultats des deux segmentations.

Comparaison

Chacune des deux images représentées dans la figure 4.3 est comparée avec l'image segmentée initiale 4.1

I_0 / I_1	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Classe 1	66047	0	0
Classe 2	378	61994	728
Classe 3	0	488	1437

I_0 / I_2	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Classe 1	66047	0	0
Classe 2	395	62647	58
Classe 3	0	467	1458

On constaste que le pourcentage de points bien classés augmente pour toutes les classes, l'atténuation du bruit a donc permis une meilleure évaluation de l'appartenance d'un point à une classe donnée.
En outre, cette comparaison fait apparaître l'intérêt de diffuser l'image pour obtenir une meilleure connexité des classes.

4.1.2 Image biaisée et peu bruitée

L'image initiale I_0 utilisée est une image IRM du cerveau déjà segmentée (figure 4.4). Cette image contient quatre classes d'intensité :

Classe	C_1 : fond de l'image	C_2 : autres tissus	C_3 : matière grise	C_4 : matière blanche
Intensité	10	34	66	80

Nous ajoutons à cette image un **bruit gaussien** d' écart-type environ 3 et un **biais** d'amplitude 1.5 , d'écart-type 25, et centré en 'x = 50'. La figure 4.5 représente l'image obtenue.

Le résultat de la segmentation de I_0' sans effectuer une diffusion anisotrope est déja satisfaisant (figure 4.6) car le bruit de l'image est faible. Cette segmentation est effectuée avec l'algorithme EM en prenant les valeurs des classes de l'image initiale I_0, un écart-type de 5 pour le filtre H, et un nombre d'itérations de 50.
le tableau de droite permet de comparer classe par classe les points de l'image initiale et ceux de l'image finale.

Remarque
Si l'on prend un nombre d'itérations inférieur à 50, le résultat de la segmentation peut faire apparaître des régions homogènes de matière grise de l'image initiale qui sont mal classées en matière blanche à cause du biais initial de l'image.
Plus la modélisation de filtre H sera proche du biais réel existant dans l'image, et plus l'algorithme convergera rapidement.

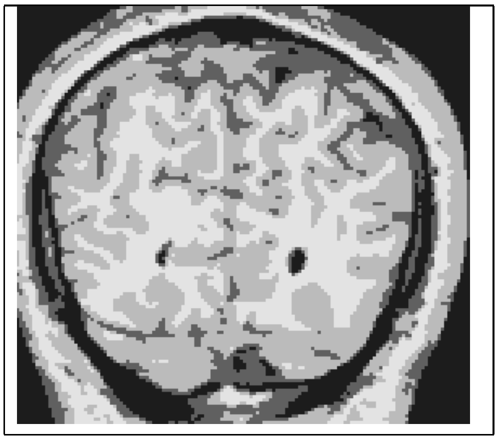


FIG. 4.4 – *Image IRM du cerveau segmentée, servant d'image initiale I_0 pour les tests.*

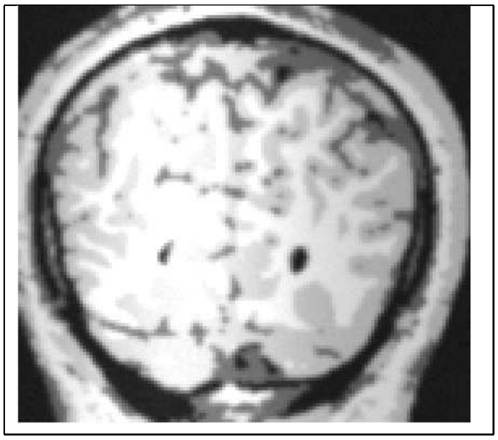
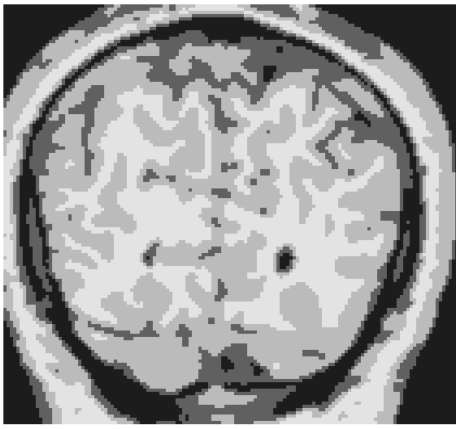


FIG. 4.5 – *Image I'_0 bruitée et fortement biaisée.*



I_1/I_0	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	3345	19	0	0
C_2	215	2958	105	0
C_3	0	206	6818	275
$5C_4$	0	0	198	4061

FIG. 4.6 – *Segmentation I_1 de I'_0 avec l'algorithme EM.*

4.1.3 Image biaisée et bruitée

Dans ce paragraphe, nous reprenons l'image I_0 précedente, mais l'image de test I_0' est modifiée. Le bruit ajouté à l'image a un **écart-type** de l'orde de 15, supérieur à l'écart d'intensité entre la matière blanche (intensité 80) et la matière grise (intensité 66). Le valeur du biais que précédemment, le résultat I_0' est représenté dans la figure 4.7.

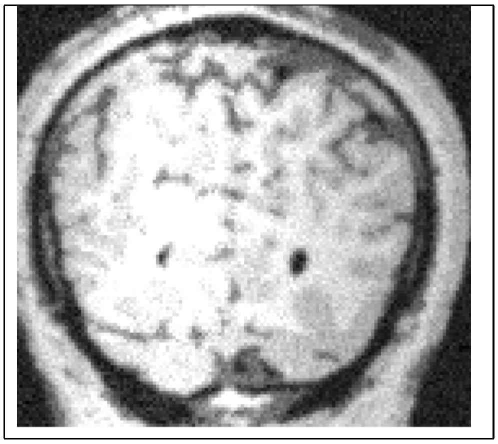


FIG. 4.7 – *Image I_0' bruitée et biaisée.*

Cette image est ensuite diffusée de manière anisotrope en utilisant les paramètres suivants :

équation de diffusion	Catté et al
fonction de diffusion	Green
dimension	2D
écart-type de la gaussienne	0.7
nombre d'itérations	6
dt	0.04
seuil k	0.7

Le résultat de cette diffusion est représenté dans la figure 4.8.

Nous présentons cette fois-ci les deux résultats de segmentation sans et avec une diffusion anisotrope préalable (figure 4.9).
La segmentation est effectuée avec l'algorithme EM en prenant, comme dans le paragraphe précédent, les valeurs des classes de l'image initiale I_0, un écart-type de 5 pour le filtre H, et un nombre d'itérations de 50.

La figure 4.10 permet de comparer classe par classe les points de l'image initiale et ceux de l'image finale pour les deux imnages segmentées I_1 et I_2.
On constate une amélioration des résultats dans le cas d'une diffusion anisotrope préliminaire. Cette amélioration est encore plus nette en comparant les images de la figure 4.9.
Comme on pouvait s'y attendre, la diffusion améliore la qualité de la segmentation obtenue en fournissant des classes de tissus plus connexes et plus homogènes.

Cependant, il est intéressant de noter que l'image I_{dif} ne doit pas être trop diffusée de manière

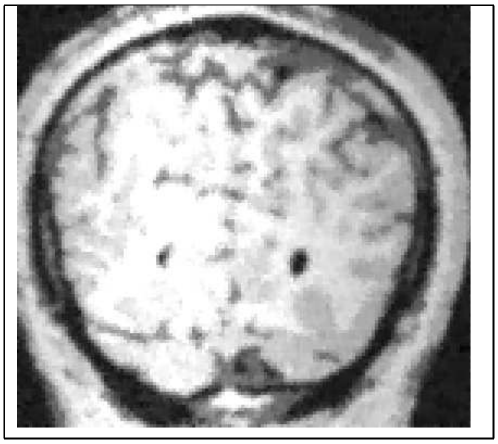


FIG. 4.8 – *Diffusion anisotrope de* I'_0 : I_{dif}.

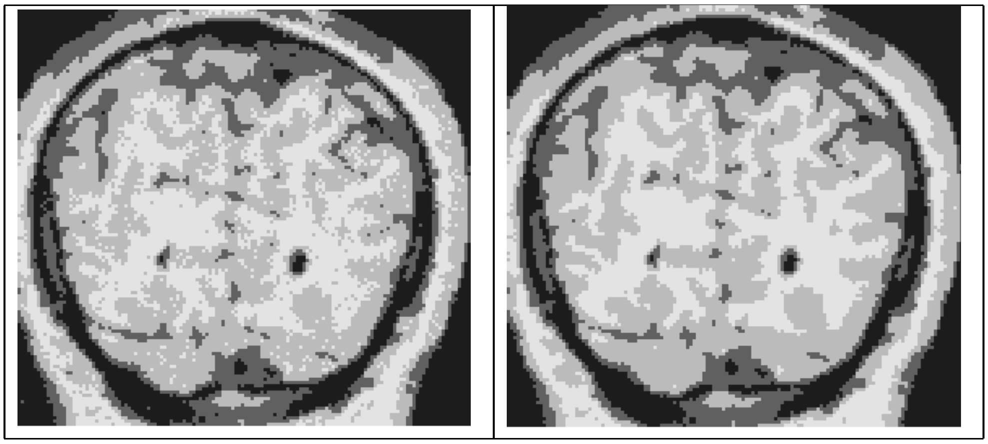


FIG. 4.9 – **à gauche** *segmentation* I_1 *de* I'_0, **à droite** *segmentation* I_2 *de* I_{dif}.

I_1/I_0	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	3259	98	0	0
C_2	301	2826	371	7
C_3	0	259	6034	738
C_4	0	0	716	3591

I_2/I_0	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	3259	89	0	0
C_2	301	2816	364	7
C_3	0	278	6249	588
C_4	0	0	508	3741

FIG. 4.10 – *Comparaison des points classe par classe;* **à gauche** *de l'image* I_1 *avec l'image* I_0, **à droite** *de l'image* I_2 *avec l'image* I_0.

à pouvoir garder les mêmes paramètres de segmentation.
Regis Guillemaud et Michael Brady dans [GB96] ont étudié l'influence de la diffusion anisotrope sur le champ de biais, et ils proposent de diffuser de manière anisotrope l'image corrigée issue de l'algorithme EM, c'est-à-dire de faire un post-traitement plutôt qu'un pré-traitement.
Si le pré-traitement élimine de manière évidente le bruit de l'image, il peut cependant lisser aussi le biais qui varie très lentement (et donc qui a un faible gradient).
La diffusion anisotrope comme pré-traitement de l'algorithme EM est efficace dans la mesure où l'on peut atténuer le bruit sans déformer le biais de l'image, c'est-à-dire avec un seuil k faible et un petit nombre d'itérations.

Enfin, une nouvelle approche à explorer est d'imbriquer une diffusion anisotrope dans le processus de segmentation de l'algorithme EM, tout en assurant la stabilité et la convergence de cet algorithme.

4.2 Segmentation de vaisseaux

La figure 4.11 présente le résultat d'une segmentation de vaisseaux effectuée à l'aide d'un algorithme de propagation. Cet algorithme, présenté par Allen R. Sanderson et al [SPH93] , extrait dans l'image un ensemble de points connexes. L'utilisateur doit spécifier un point de départ à l'intérieur des vaisseaux ainsi qu'un seuil d'intensité s. Tout point dont l'intensité est supérieure au seuil s sera considéré comme appartenant aux vaisseaux. L'ensemble des points sélectionnés est ensuite propagé par connexité en prenant en compte l'intensité de l'image et le gradient de l'intensité. Idéalement, le processus devrait s'arréter automatiquement sur les frontières des vaisseaux, mais dans la pratique, le bruit présent dans le fond de l'image rend difficile cette segmentation.

L'image du haut de la figure 4.11 représente une surface de point de même intensité (isosurface) extraite de l'image segmentée après une diffusion anisotrope.
L'image du bas représente une isosurface de même intensité extraite de l'image segmentée sans diffusion anisotrope préliminaire.
La comparaison ces deux images montre bien l'intérêt de la diffusion anisotrope qui rend l'algorithme de segmentation plus robuste.

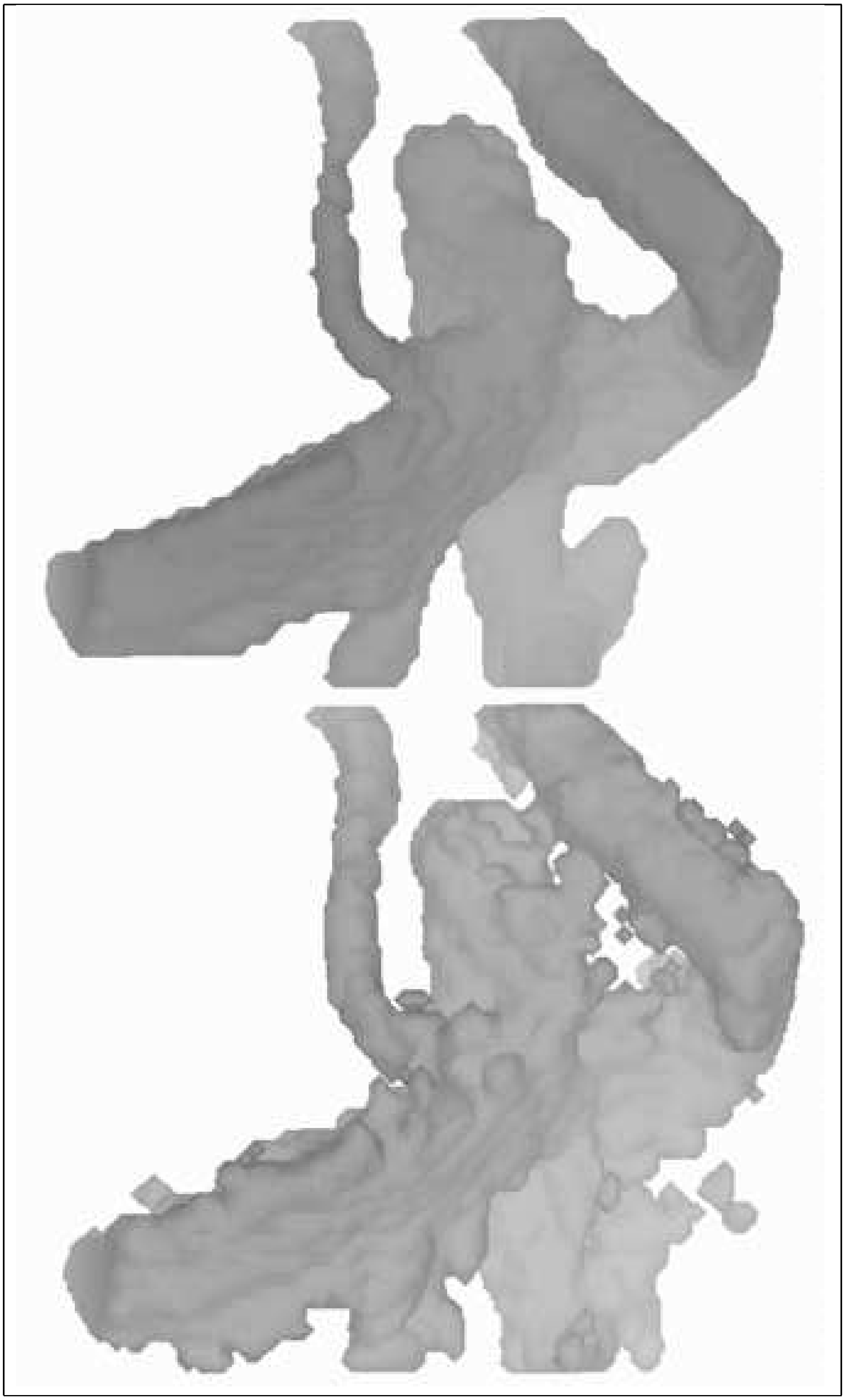


FIG. 4.11 – *Segmentation de vaisseaux* **image du haut** *avec diffusion anisotrope préliminaire,* **image du bas** *sans diffusion anisotrope.*

Chapitre 5

Conclusion

Afin de mesurer l'intérêt d'effectuer une étape de diffusion anisotrope avant de segmenter les images médicales, nous avons été amenés à programmer une méthode de segmentation particulière. Les résultats obtenus sont très encourageants, et ont mis en évidence l'apport des techniques de diffusion anisotrope dans le domaine de l'analyse des images médicales.

Des améliorations sont envisageables pour les techniques de diffusion anisotrope et de segmentation à l'aide de l'algorithme EM. Dans un premier temps, plusieurs améliorations de la diffusion anisotrope sont envisageables :

- l'introduction d'un terme d'attache aux données dans le processus de diffusion,
- la convergence du processus vers une image segmentée ou continue et linéaire par parties,
- l'estimation du seuil k et de l'arrêt de l'algorithme.

Deuxièmement, la segmentation EM qui prend en compte le biais des images pourrait intégrer des modèles plus précis de ce biais. Michael Brady et al [GBTA96] proposent d'introduire une interpolation du biais par des splines afin de mieux prendre en compte la forme du biais.
En outre, il serait intéressant de comparer les résultats de la diffusion anisotrope utilisée comme pré-traitement et comme post-traitement de l'algorithme de segmentation proposé par Wells. Et une imbrication de ces deux méthodes pourrait peut être donner de meilleurs résultats.

Enfin, dans le cadre plus particulier de la détection de petites structures comme les vaisseaux. Il serait intéressant de transformer l'équation 2.13 qui se généralise en dimension 3 sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Phi''(\mid \nabla u \mid) u_{\xi\xi} + \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid} (u_{v_1 v_1} + u_{v_2 v_2})$$

où v_1 et v_2 forment une base du plan orthogonal au gradient,
en

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_\xi u_{\xi\xi} + C_{v_1} u_{v_1 v_1} + C_{v_2} u_{v_2 v_2}$$

avec v_1 et v_2 les directions respectives de plus forte et de plus faible courbure de l'isosurface au point considéré (courbures principales). Et C_{v_1} et C_{v_2} deux coefficients permettant de privilégier la diffusion dans la direction de plus faible courbure.

Annexe A

Représentation graphique des fonctions de diffusion

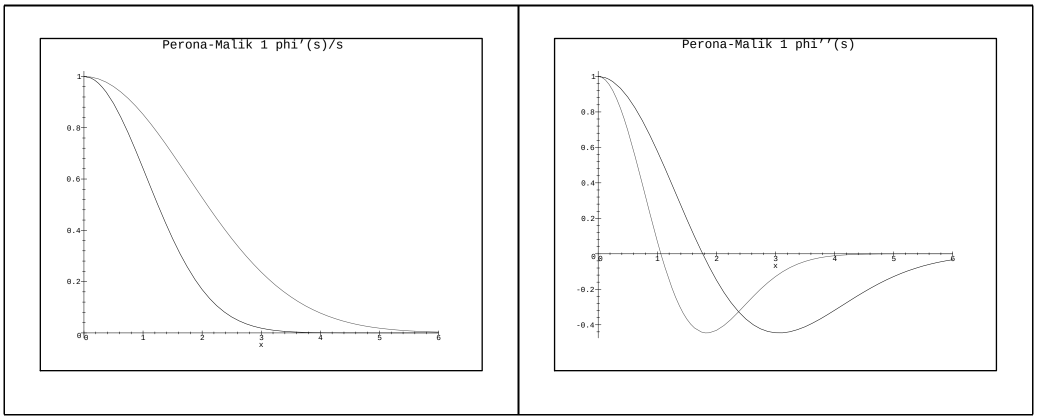


FIG. A.1 – *Perona Malik 1*

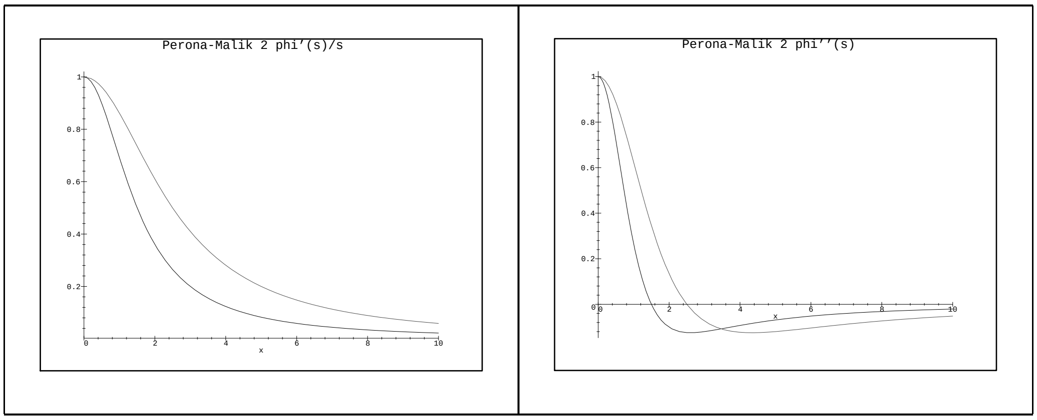


FIG. A.2 – *Perona Malik 2*

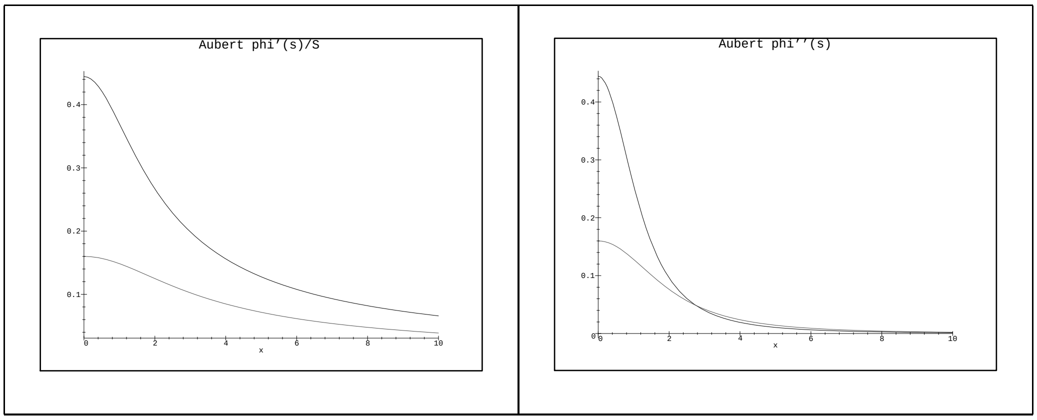


FIG. A.3 – *Aubert*

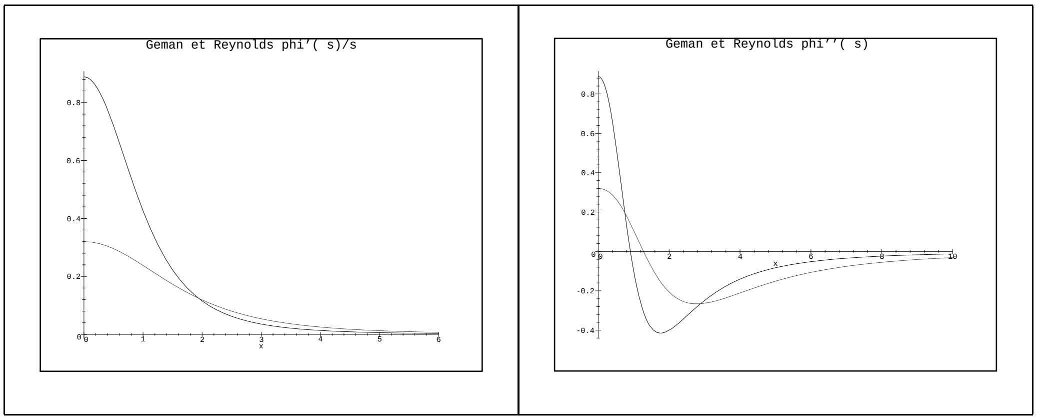


FIG. A.4 – *Geman et Reynolds*

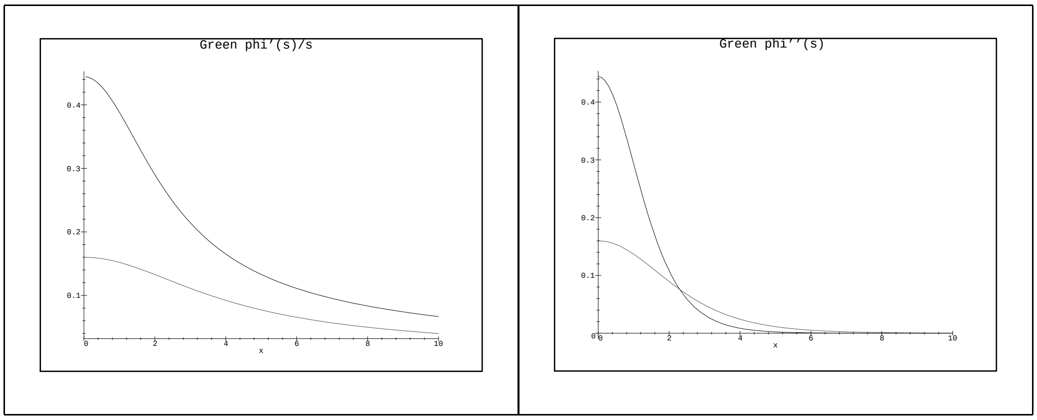


FIG. A.5 – *Green*

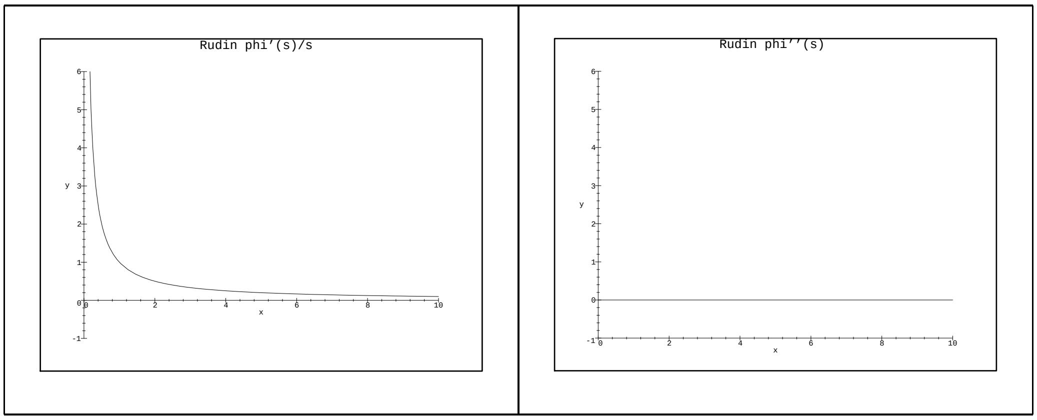


FIG. A.6 – *Rudin*

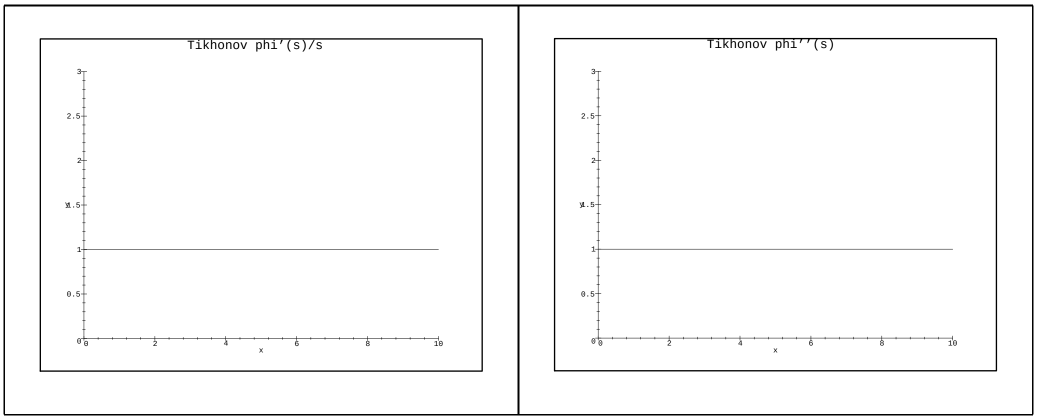


FIG. A.7 – *Tikhonov*

Bibliographie

[ALM92] L. Alvarez, P.L. Lions, and J.M. Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(3):845–866, 1992.

[Aya95] N. Ayache. Medical computer vision, virtual reality and robotics. *Image and Vision Computing*, 13(4), May 1995.

[CABFB94] P. Charbonnier, G. Aubert, M. Blanc-Ferraud, and M. Barlaud. Two-Deterministic Half-Quadratic Regularization Algorithms for Computed Imaging. In *IEEE Int. Conf. on Image Proc. ICIP*, pages 168–172, Austin (Texas), November 1994.

[CCLM92] F. Catte, T. Coll, P.L. Lions, and J.M. Morel. Image Selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(1):182–193, February 1992.

[DF95] R. Deriche and O. Faugeras. *Les EDP en Traitement des images et Vision par Ordinateur.* Technical Report 2697, INRIA Sophia Antipolis, November 1995.

[GB96] R. Guillemaud and M. Brady. Enhancement of MR images. In *VBC*, Hamburg, 1996.

[GBTA96] S. Gilles, M. Brady, J.P. Thirion, N. Ayache, and J. Declerck. Biais Field Correction of Breast MR Images. In *VBC*, 1996.

[GKKJ92] G. Gerig, O. Kübler, R. Kikinis, and F.A. Jolesz. Nonlinear Anisotropic Filtering of MRI Data. *IEEE Transactions on medical imaging*, 11(2), 1992.

[GR84] S. Geman and G. Reynolds. Constrained Restauration and the Recovery of discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6, 1984.

[Gre90] P.J. Green. Bayesian Reconstruction From Emission Tomography Data Using A Modified EM Algorithm. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 9, 1990.

[Nor90] N. Nordström. Biased anisotropic diffusion - A unified regularization and diffusion approach to edge detection. *Image Vision Comput.*, 8(4):318–327, 1990.

[PM90] P. Perona and J. Malik. Scale-Space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7):629–639, 1990.

[ROF92] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60:259–268, 1992.

[SPH93] A.R. Sanderson, D.L. Parker, and T.C. Henderson. Simultaneous Segmentation of MR and X-ray Angiograms for Visualisation of Cerebral Vascular Anatomy. In *Int. Conf. Volume Image Processing*, Utrecht, The Netherlands, June 1993.

[WGKJ95] W.M. Wells, W.E.L. Grimson, R. Kikinis, and F.A. Jolesz. Adaptative Segmentation of MRI Data. *Lectures Notes in Computer Science*, 905:59–69, 1995.