

## Simulation Médicale Modélisation des Tissus Mous

Hervé Delingette  
Herve.Delingette@sophia.inria.fr

---

---

---

---

---

---

---

---

## Plan

- ➡ Description des simulateurs médicaux
- Modélisation des tissus mous
  - Modèles Masses-Ressorts
  - Introduction à la biomécanique
  - Mécanique des Milieux Continus
  - Estimation de paramètres biomécaniques.
  - Discrétisation par la Méthode des Elements-Finis
  - Modèle Elastique Linéaire Pré-calculé
  - Modèle Masses-Tenseurs

---

---

---

---

---

---

---

---

## Motivation de la simulation médicale

- Complexité croissante des procédures thérapeutiques et en particulier chirurgicales
  - ➡ Besoin Croissant de formation des chirurgiens et des internes en chirurgie
- Les erreurs médicales sont devenues socialement et économiquement inacceptables
  - ➡ Besoin croissant d'une évaluation objective de la performance des chirurgiens
- Extension naturelle de la planification de chirurgie

---

---

---

---

---

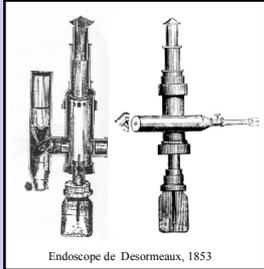
---

---

---

### Simulation de la chirurgie Laparoscopique

- Le concept de la laparoscopie a été inventé au milieu du XIX<sup>eme</sup> siècle



---

---

---

---

---

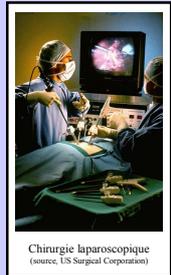
---

---

---

### Simulation de la chirurgie Laparoscopique

- Le concept de la laparoscopie a été inventé au milieu du XIX<sup>eme</sup> siècle



---

---

---

---

---

---

---

---

### Principe de la chirurgie mini-invasive



---

---

---

---

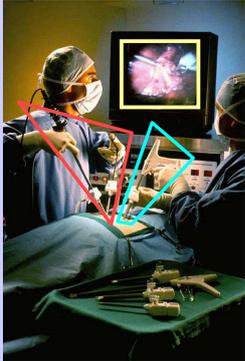
---

---

---

---

## La chirurgie mini-invasive



- ➔ Désynchronisation  
œil-main
- ➔ Caméra manipulée  
par un assistant
- ➔ Instruments longs  
passant par un point  
fixe
- ↓
- Apprentissage et  
entraînement spécifiques

© 1997 United States Surgical Corporation

---

---

---

---

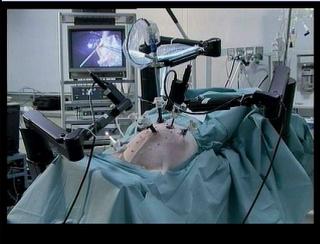
---

---

---

---

## Robots utilisés en chirurgie mini-invasive



Zeus (Computer Motion)  
Courtesy of L. Soler (IRCAD)



Da Vinci (Intuitive Surgery)  
Courtesy of E. Coste-Manière (Chir)

---

---

---

---

---

---

---

---

## Formation des chirurgiens : Aujourd'hui

- Entraînement aux gestes à partir de :
  - Simulateur Mécanique
  - Animaux (Ethique, Isomorphisme)
  - Patients (courbe d'apprentissage)



© 1997 United States Surgical Corporation



© 1995 Universal Pictures



© 1997 United States Surgical Corporation

---

---

---

---

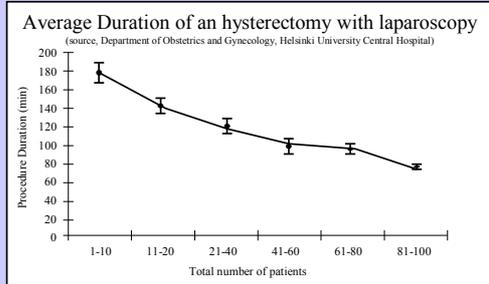
---

---

---

---

## Courbe d'apprentissage




---

---

---

---

---

---

---

---

## Entraînement ou Préparation

- **Simulateur Générique**
  - Très important pour la formation des jeunes chirurgiens
  - Permet d'évaluer objectivement la pratique des chirurgiens
  - Simulation de pathologies rares
- **Simulation à partir de l'anatomie d'un patient donné**
  - Validation d'une stratégie opératoire ou d'une gestuelle opératoire pour des interventions complexes.

---

---

---

---

---

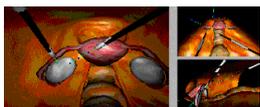
---

---

---

## Simulateurs construits par des Universités

- Hull, Sheffield, Stanford, Berkeley, Utrecht, ETZH, EPFL, LIFL, INRIA, ...



SPIC, LIFL



Ve, Kats, Hull



Vesta, University of California



Stanford Biocomp

---

---

---

---

---

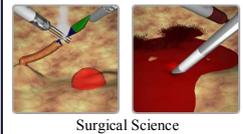
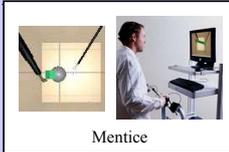
---

---

---

### Simulateurs Commerciaux

- Mentice, ReachIn, Surgical Science, Simbionix, Select-it, Xitact, ...



---

---

---

---

---

---

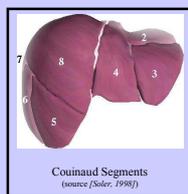
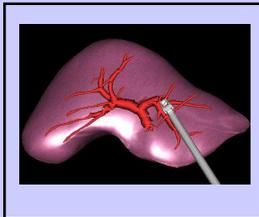
---

---

### SIMULATEURS INRIA

[Cotin, 1997] [Picinbono, 2001]  
[Forest 2003]

- Simulation d'une hepatectomie par laparoscopie
- Inclut vaisseaux sanguins et parenchyme hépatique



---

---

---

---

---

---

---

---

### SIMULATEURS INRIA

[Cotin, 1997] [Picinbono, 2001]  
[Forest 2003]

- Interface homme-machine = pinces à retour d'effort



---

---

---

---

---

---

---

---

## SIMULATEURS INRIA

[Cotin, 1997] [Picinbono, 2001]

[Forest 2003]

- Déformation du parenchyme hépatique et de la veine porte



---

---

---

---

---

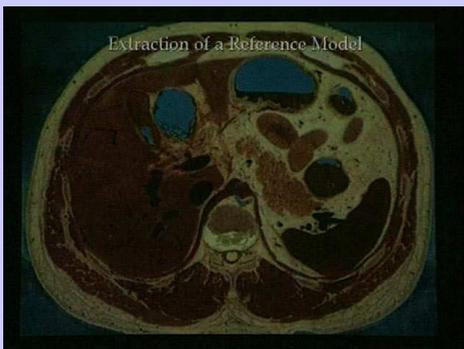
---

---

---

## SIMULATEURS INRIA

[Cotin, 1997] [Picinbono, 2001] [Forest 2003]



---

---

---

---

---

---

---

---

## Plan

- Description des simulateurs médicaux
- ➔ • Modélisation des tissus mous
  - Modèles Masses-Ressorts
  - Introduction à la biomécanique
  - Mécanique des Milieux Continus
  - Estimation de paramètres biomécaniques.
  - Discrétisation par la Méthode des Elements-Finis
  - Modèle Elastique Linéaire Pré-calculé
  - Modèle Masses-Tenseurs

---

---

---

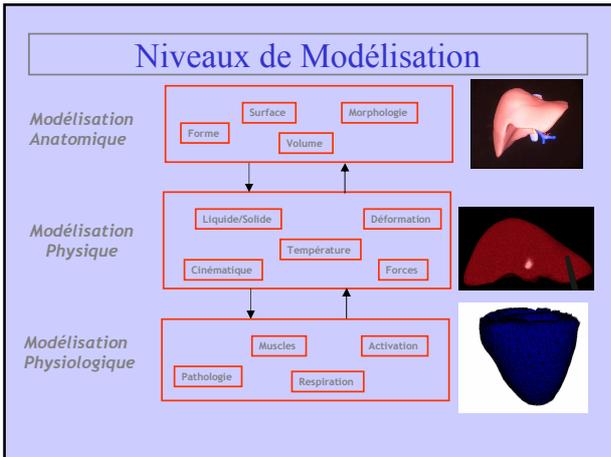
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

### Simulation du geste Chirurgical

- **Modélisation Physique**
  - Nature déformable des tissus mous
  - Interaction complexe des instruments chirurgicaux avec les tissus mous (découpe,...)
- **Importance de l'interactivité**
  - Retour visuel (24 images / s)
  - Retour d'efforts sur les instruments chirurgicaux ( de 300 à 1000 consignes / s)

---

---

---

---

---

---

---

---

### Plan

- Description des simulateurs médicaux
- Modélisation des tissus mous
  - ➔ Modèles Masses-Ressorts
  - Introduction à la biomécanique
  - Mécanique des Milieux Continus
  - Estimation de paramètres biomécaniques.
  - Discrétisation par la Méthode des Elements-Finis
  - Modèle Elastique Linéaire Pré-calculé
  - Modèle Masses-Tenseurs

---

---

---

---

---

---

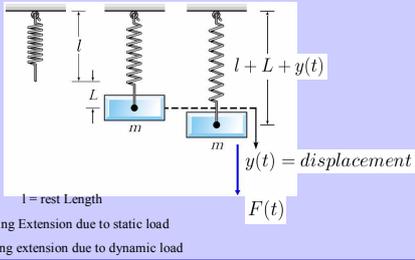
---

---



### 1D Spring-mass system

**Dynamic problem:** What is motion of the mass when acted by an external force or is initially displaced?




---

---

---

---

---

---

---

---



### Spring-mass system

#### Forces acting on the mass

- the applied force  $F(t)$
- the weight  $w = mg$
- the spring force  $F_s(t) = -k[L + y(t)]$
- the damping force  $F_d(t) = -cy'(t)$

#### Net force acting on the mass

$$\begin{aligned}
 F_{net}(t) &= F(t) + w + F_s(t) + F_d(t) \\
 &= F(t) + \cancel{mg} - k[L + y(t)] - cy'(t) \\
 &= F(t) - ky(t) - cy'(t)
 \end{aligned}$$

---

---

---

---

---

---

---

---



### 1. Spring-mass system

#### Newton's Second Law of Motion

the acceleration of an object due to an applied force is in the direction of the force and given by:

$$F_{net} = ma = my''(t)$$

#### For our spring-mass system

$$my''(t) = \underbrace{F(t) - cy'(t) - ky(t)}_{F_{net}}$$

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = F(t)$$

---

---

---

---

---

---

---

---



## 2. Undamped Free Vibrations

$$m\cancel{y''(t)} + \cancel{cy'(t)} + ky(t) = \cancel{F(t)}$$

no damping

$$my''(t) + ky(t) = 0$$

no external force

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\cos \omega_0 t, \quad \sin \omega_0 t \quad (\text{particular solutions})$$

$$y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (\text{general solution})$$

$A$  and  $B$  are arbitrary constants determined from initial conditions  $y(0) = y_0$  and  $y'(0) = y'_0$

---

---

---

---

---

---

---

---

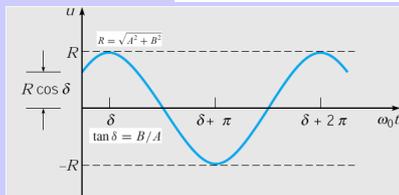


## 2. Undamped Free Vibrations

$$y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

$$y(t) = R \cos(\omega_0 t - \delta)$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \delta = B/A.$$



Periodic, simple harmonic motion of the mass

---

---

---

---

---

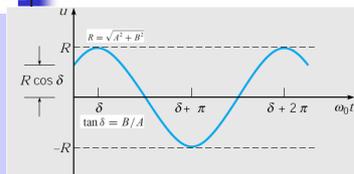
---

---

---



## 2. Undamped Free Vibrations



$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \left(\frac{m}{k}\right)^{1/2} \quad \text{Period of motion}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Natural frequency of the vibration}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{Amplitude (constant in time)}$$

$$\delta \quad \text{Phase or phase angle}$$

---

---

---

---

---

---

---

---



### 3. Damped Free Vibrations

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = \cancel{F(t)}$$

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0$$

no external force

Assume an exponential solution  $y(t) = e^{rt}$

Then  $y'(t) = re^{rt}$ ,  $y''(t) = r^2e^{rt}$

and substituting in equation above, we have

$$mr^2 + cr + k = 0$$

(characteristic equation)

---

---

---

---

---

---

---

---



### 3. Damped Free Vibrations

$$mr^2 + cr + k = 0$$

Solutions to characteristic equation:

$$r_1, r_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} = \frac{c}{2m} \left( -1 \pm \sqrt{1 - \frac{4km}{c^2}} \right)$$

- $c^2 - 4km > 0$ ,  $y = Ae^{r_1t} + Be^{r_2t}$  overdamped
- $c^2 - 4km = 0$ ,  $y = (A + Bt)e^{-ct/2m}$  critically damped
- $c^2 - 4km < 0$ ,  $y = e^{-ct/2m}(A \cos \mu t + B \sin \mu t)$  underdamped

$m, c, k$  are positive  $\rightarrow$  The solution  $y$  decays as  $t$  goes to infinity *regardless* the values of  $A$  and  $B$   
**Damping gradually dissipates energy!**

---

---

---

---

---

---

---

---



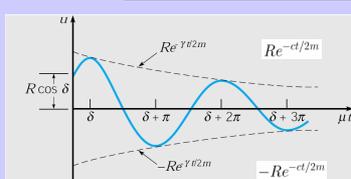
### 3. Damped Free Vibrations

The most interesting case is **underdamping**, i.e:

$$y = e^{-ct/2m}(A \cos \mu t + B \sin \mu t)$$

$$A = R \cos \delta \text{ and } B = R \sin \delta$$

$$y = Re^{-ct/2m} \cos(\mu t - \delta)$$



$$\mu = \frac{(4km - c^2)^{1/2}}{2m}$$

---

---

---

---

---

---

---

---



### 3. Damped Free Vibrations: Small Damping

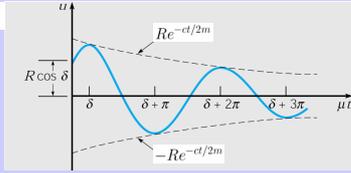
$$y = Re^{-ct/2m} \cos(\mu t - \delta) \quad \mu = \frac{(4km - c^2)^{1/2}}{2m}$$

$\mu = \text{quasi frequency}$

$$\frac{\mu}{\omega_0} = 1 - \frac{c^2}{8km}$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\mu}$$

$T_d = \text{quasiperiod}$



$$\frac{T_d}{T} = \frac{\omega_0}{\mu} = \left(1 - \frac{c^2}{4km}\right)^{-1/2} \cong \left(1 + \frac{c^2}{8km}\right)$$

As  $\frac{c^2}{4km}$  increases  $\implies$  the quasi frequency  $\mu$  decreases  
 $\implies$  the quasi period  $T_d$  increases

---

---

---

---

---

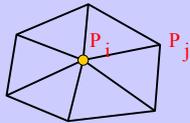
---

---

---

### Masse-Ressorts en 3D

- Définition d'un système physique constitué de masses ponctuelles



$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \in N(\mathbf{P}_i)} k_{ij} (\|\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j\| - l_{ij}^0) \frac{\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j}{\|\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j\|}$$

---

---

---

---

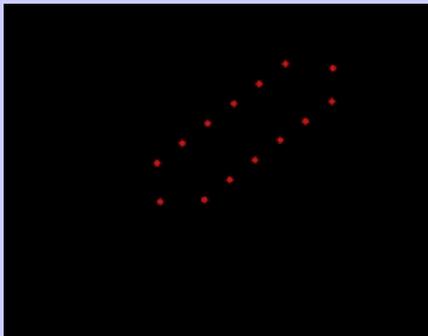
---

---

---

---

### Example Masses-Ressorts 2D



---

---

---

---

---

---

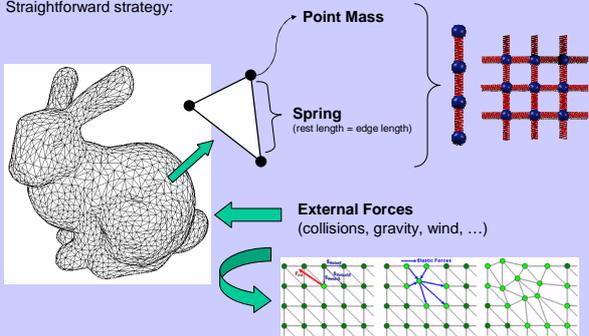
---

---

## Flexible Objects → SPRING-MASS SYSTEMS

The simplest, most common approach

Straightforward strategy:




---

---

---

---

---

---

---

---

## Spring mass fish

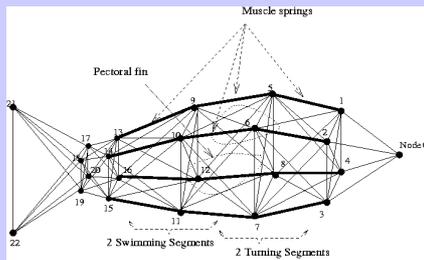


Figure 4.1: The biomechanical fish model. Black dots indicate lumped masses. Lines indicate deformable elements at their natural, rest lengths.

Source Xiaoyuan Tu, <http://www.dgp.toronto.edu/people/tu>

---

---

---

---

---

---

---

---

## Avantages Modèles Masse-Ressorts

- Utilisation de la mécanique du point (et pas de la mécanique des milieux continus)
- Peut-être défini sur un graphe (pas de notion de maillage)
- Facile à mettre en œuvre dans un schéma explicite ou implicite

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{P}_i}{dt^2} = \gamma_i \frac{d\mathbf{P}_i}{dt} + \mathbf{F}_i$$

---

---

---

---

---

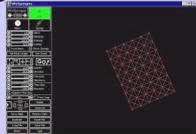
---

---

---

## Avantages Modèles Masse-Ressorts

- Permet de modéliser des grands déplacements
- Largement utilisé dans la communauté de la synthèse d'images depuis plus de 20 ans
- Exemples :
  - xspringies / winspringies par D. De Carlo
  - Java Xspringies




---

---

---

---

---

---

---

---

## Problèmes des masse-ressorts (1)

- Comportement trop mou
  - utilisation d'un schéma implicite d'intégration
  - On remplace

$$\mathbf{F}_{ij} = k_{ij} \left( \|\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j\| - l_{ij}^0 \right) \frac{\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j}{\|\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j\|}$$

$$\mathbf{F}_{ij} = [\mathbf{K}_{ij}] (\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_i^0) \quad \text{avec} \quad [\mathbf{K}_{ij}] = \frac{\partial \mathbf{F}_{ij}}{\partial \mathbf{P}_i}$$

---

---

---

---

---

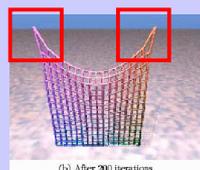
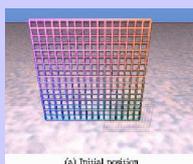
---

---

---

## Problèmes des masse-ressorts (1)

- Mauvais comportement en cisaillement
  - voir travaux de X. Provot




---

---

---

---

---

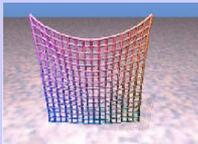
---

---

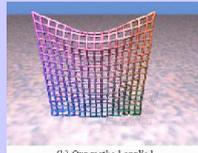
---

### Problèmes des masse-ressorts (3)

- Solutions au problème de cisaillement
  - ajout d'éléments diagonaux
  - Utilisation d'une limite sur la déformation des ressorts



(a) Our method applied to "structural" springs



(b) Our method applied to "structural" and "shear" springs

---

---

---

---

---

---

---

---

### Problèmes des masse-ressorts (4)

- Comportement dépend du maillage
  - aucune étude globale permet de relier la topologie du maillage à son comportement
  - Difficulté à relier les paramètres de raideurs à des grandeurs physiques (Module de Young, coefficient de Poisson)
  - Utilisation de méthodes connexionnistes ou d'algorithmes génétiques pour l'identification de paramètres.

---

---

---

---

---

---

---

---

### Plan

- Description des simulateurs médicaux
- Modélisation des tissus mous
  - Modèles Masses-Ressorts
  - ➔ Introduction à la biomécanique
  - Mécanique des Milieux Continus
  - Estimation de paramètres biomécaniques.
  - Discrétisation par la Méthode des Elements-Finis
  - Modèle Elastique Linéaire Pré-calculé
  - Modèle Masses-Tenseurs

---

---

---

---

---

---

---

---

## Caractérisation des tissus mous

- Le comportement biomécanique de la plupart des tissus mous est très complexe.
- Un tissu mou est généralement constitué de plusieurs structures :
  - Fluides : eau et sang
  - Matériaux fibreux : fibres musculaires, fibres neuronales
  - Membranes : capsule de Glisson
  - Parenchyme : hépatique ou cérébral

---

---

---

---

---

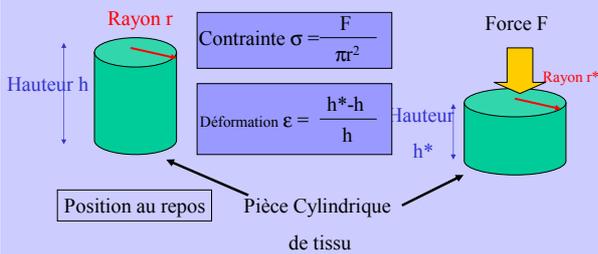
---

---

---

## Caractérisation des tissus mous

- Pour simplifier, on analyse la relation contrainte-déformation




---

---

---

---

---

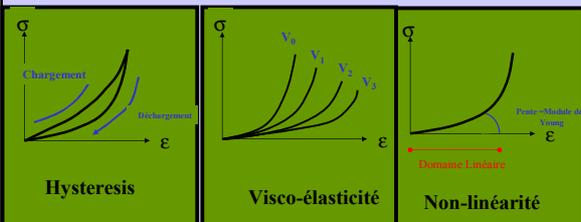
---

---

---

## Caractérisation des tissus mous

- Dans les relations contrainte-déformation, on observe des phénomènes de :



Anisotropie




---

---

---

---

---

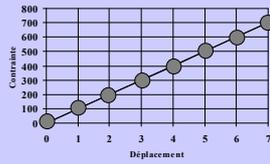
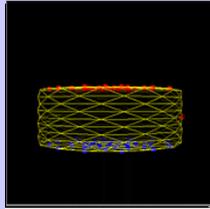
---

---

---

## Matériau Elastique Linéaire

- Comportement simplifié
- Seulement valide pour des petites déformations (moins de 5%)



---

---

---

---

---

---

---

---

## Plan

- Description des simulateurs médicaux
- Modélisation des tissus mous
  - Modèles Masses-Ressorts
  - Introduction à la biomécanique
  - ➔ • Mécanique des Milieux Continus
  - Estimation de paramètres biomécaniques.
  - Discrétisation par la Méthode des Elements-Finis
  - Modèle Elastique Linéaire Pré-calculé
  - Modèle Masses-Tenseurs

---

---

---

---

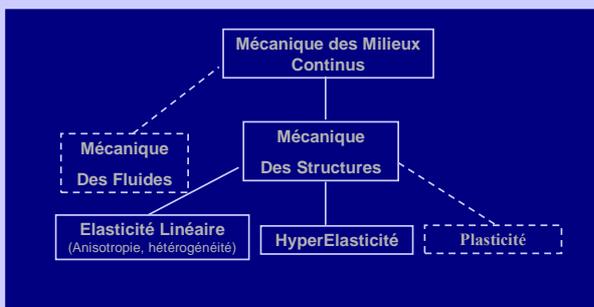
---

---

---

---

## Mécanique des Milieux Continus



---

---

---

---

---

---

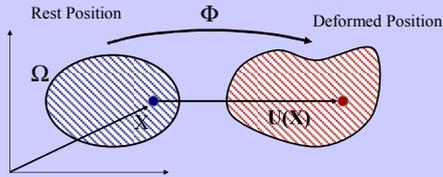
---

---

## Basics of Continuum Mechanics

- Deformation Function
- $X \in \Omega \mapsto \phi(X) \in \mathfrak{R}^3$
- Displacement Function  

$$U(X) = \phi(X) - X$$




---

---

---

---

---

---

---

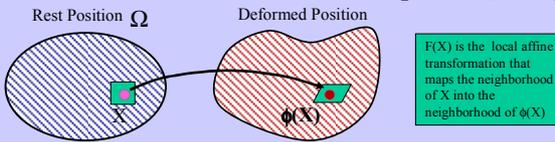
---

## Basics of Continuum Mechanics

- The local deformation is captured by the deformation gradient :

$$F = \frac{\partial \phi}{\partial X}$$

$$F_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial X_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$




---

---

---

---

---

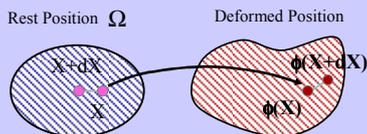
---

---

---

## Basics of Continuum Mechanics

- Distance between point may not be preserved



- Distance between deformed points

$$(ds)^2 = \|\phi(X+dX) - \phi(X)\|^2 \approx dX^T (\nabla \phi^T \nabla \phi) dX$$

- Right Cauchy-Green Deformation tensor

$$C = \nabla \phi^T \nabla \phi \quad \text{Measures the change of metric in the deformed body}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

## Basics of Continuum Mechanics

- Example : Rigid Body motion entails no deformation  $\phi(X) = RX + T$   
 $F(X) = \nabla \phi(X) = R \quad C = R^T R = Id$
- Strain tensor captures the amount of deformation
  - It is defined as the “distance between C and the Identity matrix”

$$E = \frac{1}{2} (\nabla \phi^T \nabla \phi - Id) = \frac{1}{2} (C - Id)$$

---

---

---

---

---

---

---

---

## Strain Tensor

- Diagonal Terms :  $\epsilon_i$ 
  - Capture the length variation along the 3 axis



- Off-Diagonal Terms :  $\gamma_i$ 
  - Capture the shear effect along the 3 axis



$$E = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

## Linearized Strain Tensor

- Use displacement rather than deformation  
 $\nabla \phi(X) = Id + \nabla U(X)$

$$E = \frac{1}{2} (\nabla U + \nabla U^T + \nabla U^T \nabla U)$$

- Assume small displacements

$$E_{Lin} = \frac{1}{2} (\nabla U + \nabla U^T)$$

---

---

---

---

---

---

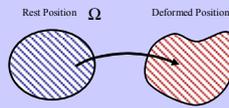
---

---

## Hyperelastic Energy

- The energy required to deform a body is a function of the invariants of strain tensor  $E$  :

- Trace  $E = I_1$
- Trace  $E^*E = I_2$
- Determinant of  $E = I_3$



$$W(\phi) = \int_{\Omega} w(I_1, I_2, I_3) dX \quad \text{Total Elastic Energy}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

## Linear Elasticity

- Isotropic Energy

$$w(X) = \frac{\lambda}{2} (\text{tr } E_{Lin})^2 + \mu \text{tr } E_{Lin}^2$$

$(\lambda, \mu)$  : Lamé coefficients      Hooke's Law

$w(X)$  : density of elastic energy

- Advantage :

- Quadratic function of displacement

$$w = \frac{\lambda}{2} (\text{div } U)^2 + \mu \|\nabla U\|^2 - \frac{\mu}{2} \|\text{rot } U\|^2$$

- Drawback :

- Not invariant with respect to global rotation

- Extension for anisotropic materials

---

---

---

---

---

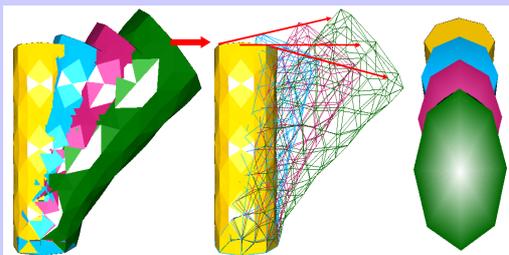
---

---

---

## Shortcomings of linear elasticity

- Non valid for «large rotations and displacements»




---

---

---

---

---

---

---

---

### St-Venant Kirchoff Elasticity

- Isotropic Energy

$$w(X) = \frac{\lambda}{2} (tr E)^2 + \mu tr E^2$$

$(\lambda, \mu)$  : Lamé coefficients

- Advantage :
  - Generalize linear elasticity
  - Invariant to global rotations
- Drawback :
  - Poor behavior in compression
  - Quartic function of displacement
- Extension for anisotropic materials

---

---

---

---

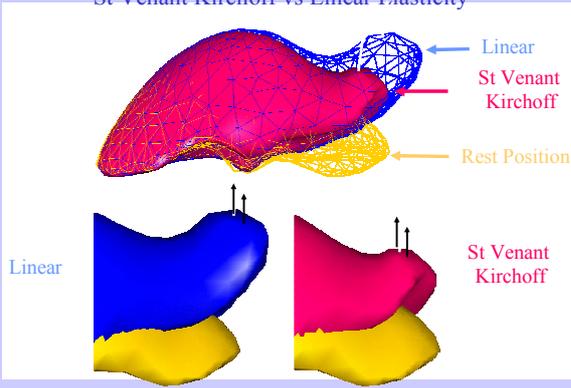
---

---

---

---

### St Venant Kirchoff vs Linear Elasticity




---

---

---

---

---

---

---

---

### Other Hyperelastic Material

- Neo-Hookean Model  $w(X) = \frac{\mu}{2} tr E + f(I_3)$
- Fung Isotropic Model  $w(X) = \frac{\mu}{2} e^{tr E} + f(I_3)$
- Fung Anisotropic Model  $w(X) = \frac{\mu}{2} e^{tr E} + \frac{k_1}{k_2} (e^{k_2(I_3-1)} - 1) + f(I_3)$
- Veronda-Westman  $w(X) = c_1 (e^{\gamma tr E}) + c_2 tr E^2 + f(I_3)$
- Mooney-Rivlin :  $w(X) = c_{10} tr E + c_{01} tr E^2 + f(I_3)$

---

---

---

---

---

---

---

---

## Plan

- Description des simulateurs médicaux
- Modélisation des tissus mous
  - Modèles Masses-Ressorts
  - Introduction à la biomécanique
  - Mécanique des Milieux Continus
  - ➔ Estimation de paramètres biomécaniques.
  - Discrétisation par la Méthode des Elements-Finis
  - Modèle Elastique Linéaire Pré-calculé
  - Modèle Masses-Tenseurs

---

---

---

---

---

---

---

---

## Estimating material parameters

- Complex for biological tissue :
  - Heterogeneous and anisotropic materials
  - Tissue behavior changes between in-vivo and in-vitro
  - Ethics clearance for performing experimental studies
  - Effect of preconditioning
  - Potential large variability across population

---

---

---

---

---

---

---

---

## Soft Tissue Characterization

- Different possible methods
  - In vitro rheology
  - In vivo rheology
  - Elastometry
  - Solving Inverse problems

---

---

---

---

---

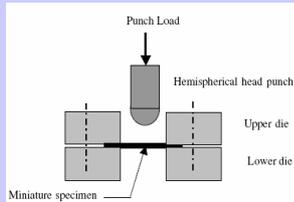
---

---

---

## Soft Tissue Characterization

- In vitro rheology
- 😊 • can be performed in a laboratory. Technique is mature
- 😞 • Not realistic for soft tissue (perfusion, ...)



---

---

---

---

---

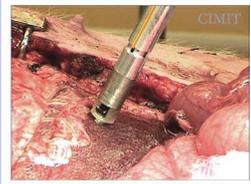
---

---

---

## Soft Tissue Characterization

- In vivo rheology
- 😊 • can provide stress/strain relationships at several locations
- 😞 • Influence of boundary conditions not well understood



Source : Cimit, Boston USA

---

---

---

---

---

---

---

---

## Soft Tissue Characterization

- Elastometry (MR, Ultrasound)
- 😊 • measure property inside any organ non invasively
- 😞 • validation ? Only for linear elastic materials



Source Echosens, Paris

---

---

---

---

---

---

---

---

## Soft Tissue Characterization

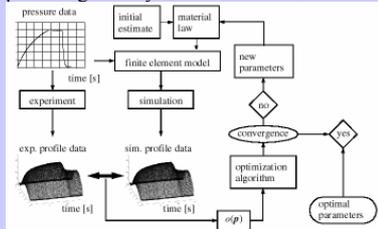
- Inverse Problems



- well-suited for surgery simulation (computational approach)



- require the geometry before and after deformation




---

---

---

---

---

---

---

---

## Soft Tissue Characterization

- Still difficult to find “reliable” soft tissue material parameters
- Example : Liver soft tissue characterization

First Author	Experimental Technique	Liver Origin	Young Modulus (kPa)
Yamashita [111]	Image-Based	Human	Not Available
Brown [15]	<i>in-vivo</i>	Porcine Liver	≈ 80
Carter [17]	<i>in-vivo</i>	Human Liver	≈ 170
Dan [27]	<i>ex-vivo</i>	Porcine Liver	≈ 10
Liu [62, 61]	<i>ex-vivo</i>	Bovine Liver	Not Available
Nava [76]	<i>in-vivo</i>	Porcine Liver	≈ 90
Miller [74]	<i>in-vivo</i>	Porcine Liver	Not Available
Sakuma [92]	<i>ex-vivo</i>	Bovine Liver	Not Available

Table 2: List of published articles providing some quantitative data about the biomechanical properties of the liver.

---

---

---

---

---

---

---

---

## Plan

- Description des simulateurs médicaux
- Modélisation des tissus mous
  - Modèles Masses-Ressorts
  - Introduction à la biomécanique
  - Mécanique des Milieux Continus
  - Estimation de paramètres biomécaniques.
- ➡ • Discrétisation par la Méthode des Elements-Finis
  - Modèle Elastique Linéaire Pré-calculé
  - Modèle Masses-Tenseurs

---

---

---

---

---

---

---

---

## Discretisation techniques

- Four main approaches :
  - Volumetric Mesh Based
  - Surface Mesh Based
  - Meshless
  - Particles

---

---

---

---

---

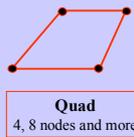
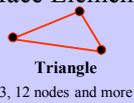
---

---

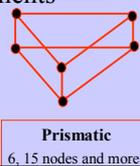
---

## Different types of meshes

- Surface Elements :



- Volume Elements



---

---

---

---

---

---

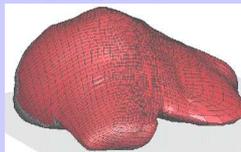
---

---

## Structured vs Unstructured meshes

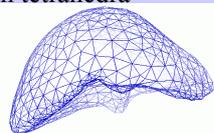
- Example 1 : Liver meshed with hexahedra

3 months work  
(courtesy of ESI)



- Example 2: Liver meshed with tetrahedra

Automatically  
generated (1s)



---

---

---

---

---

---

---

---

## Volumetric Mesh Discretization

- Classical Approaches :
  - Finite Element Method (weak form)
  - Rayleigh Ritz Method (variational form)
  - Finite Volume Method (conservation eq.)
  - Finite Differences Method (strong form)
- FEM, RRM, FVM are equivalent when using linear elements

---

---

---

---

---

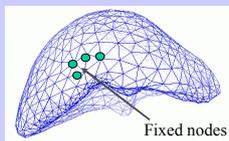
---

---

---

## Rayleigh-Ritz Method

- Step1 : Choose
  - Finite Element (e.g. linear tetrahedron)
  - Mesh discretizing the domain of computation
  - Hyperelastic Material with its parameters
  - Boundary Conditions



$$w(X) = \frac{\lambda}{2} (\text{tr } E)^2 + \mu \text{tr } E^2$$

Young Modulus  
Poisson Coefficient

---

---

---

---

---

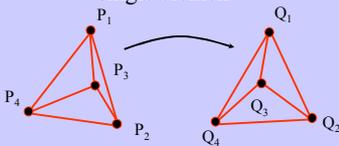
---

---

---

## Rayleigh-Ritz Method

- Step2
  - Write the elastic energy required to deform a single element



$$u(P_i) = Q_i - P_i = U_i$$

$$u(X) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i(X) u(P_i)$$

$$\nabla \lambda_i(X) = -\frac{M_i}{6V(T)}$$

$$\text{tr } E = -\sum_i \frac{M_i \cdot U_i}{6V(T)}$$

$$W_{T_i} = \sum_{jk} U_j^t [K_{jk}^T] U_k$$

$$[K_{jk}^T] = \frac{1}{36 \cdot V(T)} (\lambda M_j M_j^t + \mu M_j M_j^t + \mu (M_j \cdot M_i) [Id_{3 \times 3}])$$

---

---

---

---

---

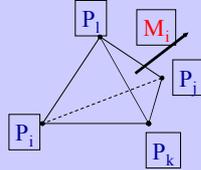
---

---

---

### Elément Tétraédrique Linéaire

- Élément de base
  - Tétraèdre
  - Fonction de forme linéaire
  - Élément de type P1
- Interpolation



Si 
$$X = \sum_{i=1}^4 \lambda_i(X) P_i$$

$$u(P_i) = U_i$$

Alors 
$$u(X) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i(X) u(P_i)$$

---

---

---

---

---

---

---

---

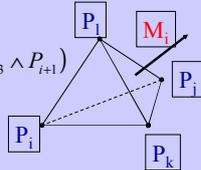
### Coordonnées barycentriques

- Détermination des  $\lambda_i(X)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0^x & P_1^x & P_2^x & P_3^x \\ P_0^y & P_1^y & P_2^y & P_3^y \\ P_0^z & P_1^z & P_2^z & P_3^z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_i(x) = \frac{M_i \cdot (x - P_{i+1})}{6V(T)}$$

$$M_i = (-1)^{i+1} (P_{i+1} \wedge P_{i+2} + P_{i+2} \wedge P_{i+3} + P_{i+3} \wedge P_{i+1})$$




---

---

---

---

---

---

---

---

### Linearized Strain Tensor

- On écrit :  $E=1/2 (C-I)$

$$\nabla \lambda_i(X) = -\frac{M_i}{6V(T)} \quad \nabla u^j = \sum_{i=1}^4 \nabla \lambda_i(X) U_i^j$$

$$trE = -\sum_i \frac{M_i \cdot U_i}{6V(T)}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Stiffness Matrix

- Ecrire l'énergie élastique pour chaque tétraèdre

$$W_{T_i} = \sum_{jk} U_j [\mathbf{K}_{jk}^{T_i}] U_k$$

- Avec:

- le tétraèdre  $T_i$
- ses coefficients de Lamé  $\lambda_i$  et  $\mu_i$
- ses vecteurs normaux  $\mathbf{M}_i$  à la position au repos

$$[\mathbf{K}_{jk}^{T_i}] = \frac{1}{36 \cdot V(T_i)} (\lambda_i \mathbf{M}_k \mathbf{M}_j^T + \mu_i \mathbf{M}_j \mathbf{M}_k^T + \mu_i (\mathbf{M}_j \cdot \mathbf{M}_k) [\mathbf{Id}_{3 \times 3}])$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Matrice de Raideur

- Ecrire l'énergie élastique totale

$$W_{\text{total}} = \sum_{T_i} W_{T_i}$$

- Dériver l'expression de la force élastique au sommet  $i$  :

$$F_i = \frac{\partial W_{\text{total}}}{\partial U_i}$$

qui peut être écrit comme :

$$F_i = [\mathbf{K}_{ii}] U_i + \sum_j [\mathbf{K}_{ij}] U_j$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Rayleigh-Ritz Method

- Step3

- Sum to get the total elastic energy

$$W(U) = \int_{\Omega_n} w(I_1, I_2, I_3) dX = \sum_{T_i} W_{T_i} = U^T K U$$

- Write the conservation of energy

$$W(U) = \underbrace{F^T U}_{\text{Internal Energy}} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho(X) (X \cdot g) dX}_{\text{Gravity Potential Energy}}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

## Rayleigh-Ritz Method

- Step3

- Write first variation of the energy :

Linear Elasticity

$$KU = R$$

Static case

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = R(t)$$

Dynamic case

HyperElasticity=NonLinear Elasticity

$$K(U) = R$$

Static case

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + K(U) = R(t)$$

Dynamic case

---

---

---

---

---

---

---

---

## Plan

- Description des simulateurs médicaux
  - Modélisation des tissus mous
    - Modèles Masses-Ressorts
    - Introduction à la biomécanique
    - Mécanique des Milieux Continus
    - Estimation de paramètres biomécaniques.
    - Discrétisation par la Méthode des Elements-Finis
- ➡
- Modèle Elastique Linéaire Pré-calculé
  - Modèle Masses-Tenseurs

---

---

---

---

---

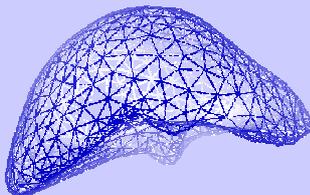
---

---

---

## Modélisation en Eléments Finis

- Utilise un maillage tétraédrique conforme pour modéliser les tissus mous
- Construction du maillage tétraédrique à partir de la triangulation de son enveloppe



---

---

---

---

---

---

---

---

## Elasticité Linéaire et FEM

- Résoudre le problème statique conduit à :

$$F = [K] u$$

- avec
  - **[K]** Matrice de Rigidité (3n.3n)
  - **u** Vecteurs de déplacement (3n)
  - **F** Forces Externes (3n) + conditions aux limites

---

---

---

---

---

---

---

---

## Complexité de FEM

- Taille de K :  $(3N)^2$ 
  - N est le nombre de sommets internes et à la surface
- Modèle de foie:
  - N = 1969 (9517 Tétraèdres)
  - Temps de calcul = 20s  
avec gradient conjugué pré-conditionné
- Contraintes Temps-réel (25Hz and 300Hz)



---

---

---

---

---

---

---

---

## Principe des Pré-calculs

- Principes
  - On inverse la matrice de rigidité uniquement pour les nœuds de la surface
  - Pendant la simulation, on effectue des calculs matrice-vecteurs
- **Hypothèse 1**
  - On interagit uniquement avec les nœuds de la surface du maillage
- **Hypothèse 2**
  - Pas de changement de topologie durant la simulation

---

---

---

---

---

---

---

---

## Description des pré-calculs

- On décompose le problème en fonction des nœuds de la surface et des nœuds internes

$$\begin{bmatrix} K_{SS} & K_{SI} \\ (K_{SI})^T & K_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_S \\ U_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_S \\ F_I \end{bmatrix}$$

Indice s = surface  
Indice i = interne

- On précalcule  $G_{SS}$ , compliance des nœuds de la surface

$$\begin{bmatrix} U_S \\ U_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{SS} & G_{SI} \\ (G_{SI})^T & G_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_S \\ F_I \end{bmatrix}$$

- Pendant la simulation on calcule :

$$U_S = G_{SS} F_S \quad \text{où } F_S \text{ est un vecteur « creux »}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

## Calcul de $G_{SS}$

- Trois méthodes pour calculer la matrice  $G_{SS}$

1) Résoudre itérativement  $3N_S$  équations linéaires

- Optimise la taille mémoire et le temps de calcul
- Requiert un maillage volumique

2) Utiliser la condensation de matrice

- Permet de calculer  $G_{SS}$  même pour des matériaux rigides
- Demande de calculer l'inverse de  $K_{II}$

3) Utiliser la méthode par éléments frontières

- Requiert un maillage surfacique uniquement
- Fait des hypothèses fortes sur le matériau (isotrope et homogène)

---

---

---

---

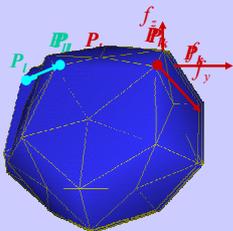
---

---

---

---

## Méthode no 1



$$G_{SS}^{lk} = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

Stoque :  $\{ [G_{SS}^{lk}]; (k, l) = 0 \dots N_{nc} - 1 \}$

---

---

---

---

---

---

---

---

## Méthode no 1

- Algorithme :
  - Pour chaque sommet i de la surface
    - Pour chaque direction d (x, y ou z)
      - met  $F_s$  à 0
      - Applique la force  $f = 1$  Newton suivant la direction d sur le sommet i
      - Résoud  $F=KU$
      - Pour chaque sommet  $j \neq i$ 
        - » Stocke le déplacement du sommet j,  $u_j$ , dans une colonne de la matrice  $[G_{SS}^y]$

---

---

---

---

---

---

---

---

## Méthode no 2

- Condensation de matrice :

$$(K_{SS} - K_{SI}(K_{II})^{-1}K_{IS})U_S = F_S - K_{SI}(K_{II})^{-1}F_I$$

$G_{SS} = (K)$

$$G_{SS} = (K_{SS} - K_{SI}(K_{II})^{-1}K_{IS})^{-1}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

## Calcul pendant la simulation

- Après applications de forces

$$u_l = \sum_k [G_{SS}^{lk}] f_k^{B_e}$$

- Après avoir imposé un déplacement au nœud k

$$u_l = [G_{SS}^{lk}] [G_{SS}^{kk}]^{-1} u_k$$

---

---

---

---

---

---

---

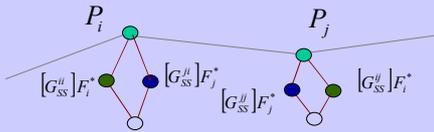
---

## Calcul pendant la simulation (2)

- Après avoir imposé 2 déplacements aux nœuds i et j

$$\begin{cases} G_{ss}^i F_i^* + G_{ss}^j F_j^* = U_i \\ G_{ss}^i F_i^* + G_{ss}^j F_j^* = U_j \end{cases}$$

On doit trouver les forces  $F_i^*$  et  $F_j^*$  qui doivent amener les sommets i et j à se déplacer de  $U_i$  et  $U_j$




---

---

---

---

---

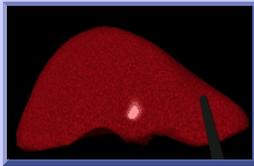
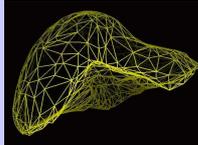
---

---

---

## Temps de calcul

- Modèle de foie:
  - N = 1969 (9517 Tétrahédres)
  - déformation: 10ms (vs. 20s)
  - forces: 2ms (vs. 20s)
  - Facteur d'accélération: 2000 to 10000




---

---

---

---

---

---

---

---

## Modèle Pré-Calculé avec Texture and Reflets



9517  
Tétrahédres

AJISIM 1999  
Epidémiologie IMAGIS Sinus

---

---

---

---

---

---

---

---

## Modèle quasi-statique linéaire pré-calculé

- Performances (P II 450MHz)
  - Force ou déplacement à un sommet : > 3300 Hz
  - Déplacement imposé à 3 sommets (un triangle) : > 800 Hz
  - Déplacement imposé à 10 sommets : >130 Hz
  - Déplacement imposé à 20 sommets : > 30 Hz
- Inconvénients
  - Ne peut pas prendre en compte les changements de topologie

---

---

---

---

---

---

---

---

## Plan

- Description des simulateurs médicaux
  - Modélisation des tissus mous
    - Modèles Masses-Ressorts
    - Introduction à la biomécanique
    - Mécanique des Milieux Continus
    - Estimation de paramètres biomécaniques.
    - Discrétisation par la Méthode des Elements-Finis
    - Modèle Elastique Linéaire Pré-calculé
- ➔ • Modèle Masses-Tenseurs

---

---

---

---

---

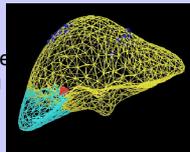
---

---

---

## Modèle Masse- Tenseur

- Motivations
  - Pré-calcul ne permet pas de simuler la découpe
  - Résoudre  $[K]u = F$  sur le maillage complet sans pré-calculs est trop coûteux pour le temps-réel.
- Idée
  - Introduire un modèle élastique autorisant les découpes là où s'effectuent.



---

---

---

---

---

---

---

---

### Modèle Masse-Tenseur (2)

- Repose sur un modèle élastique linéaire dynamique discrétisé avec un schéma explicite
- Equation du mouvement Newtonienne :

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F$$

$M$  est une matrice de Masse  
 $C$  est une matrice d'amortissement

---

---

---

---

---

---

---

---

### Modèle Masse-Tenseur (3)

- Choix des matrices :
    - Masse
      - Pour optimiser la valeur du pas de temps (lors de découpe) on utilise
    - Amortissement  $M = m_0 [Id_3]$ 
      - Suivant le schéma, on utilise  $C = \gamma_1 m_0 [Id_3]$
- Ou encore  $C = \gamma_1 m_0 [Id_3] + \gamma_2 K$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Modèle Masse-Tenseur (4)

- Discrétisation temporelle explicite:
  - Méthode d'Euler

$$\begin{array}{c}
 M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 \frac{{}^{t-\Delta t}U - 2{}^tU + {}^{t+\Delta t}U}{(\Delta t)^2} \quad C = \gamma_1 m_0 [Id_3] + \gamma_2 K \quad \frac{{}^tU - {}^{t-\Delta t}U}{\Delta t}
 \end{array}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Modèle Masse-Tenseur (4)

- Discrétisation temporelle explicite:

- Méthode d'Euler

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F$$

- Méthode d'Euler avec DF centrées

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F$$

$\frac{t-\Delta t}{(\Delta t)^2} U - 2 \frac{t}{(\Delta t)^2} U + \frac{t+\Delta t}{(\Delta t)^2} U$

$\frac{t+\Delta t}{2\Delta t} U - \frac{t-\Delta t}{2\Delta t} U$

$C = \gamma_1 m_0 [\text{Id}_3]$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Modèle Masse-Tenseur (5)

- Comparaison des 3 approches

	Méthode d'Euler	Euler avec DF centrées	Runge Kutta
Temps de calcul	faible	faible	élevé
Amortissement	Rayleigh	masse	masse
Pas de temps	faible	moyen	élevé

- Calcul du pas de temps
  - Critère de courant ou analyse matricielle

---

---

---

---

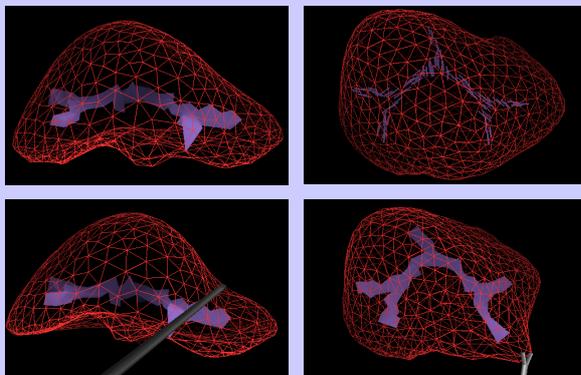
---

---

---

---

### Anisotropy from vessels




---

---

---

---

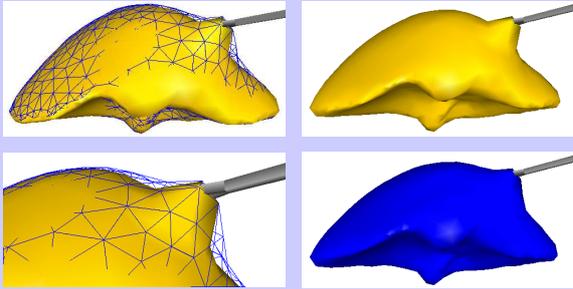
---

---

---

---

## Anisotropy from the Glisson capsule




---

---

---

---

---

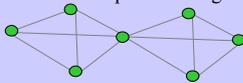
---

---

---

## Structure de donnée (1)

- Maillage tétraédrique
  - On contraint le maillage à être une variété
    - Le voisinage de chaque sommet est formé d'une seule composante connexe par les triangles
    - Le voisinage de chaque arête est formé d'une seule composante connexe par les triangles



- La surface ( triangulaire) est une variété (existence de normale à chaque sommet)
- On accède facilement au voisinage topologique en marchant autour des sommets, arêtes, triangles,...

---

---

---

---

---

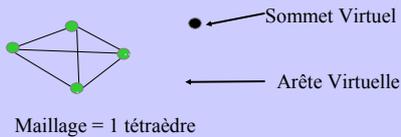
---

---

---

## Structure de donnée (2)

- On ferme topologiquement chaque maillage en ajoutant des sommets virtuels



- Facilite le parcours de voisinage
- Gère les composantes connexes

---

---

---

---

---

---

---

---

### Structure de donnée (3)

- Stockage optimal de la matrice de rigidité
  - Sur chaque sommet :  $[K_{ii}]$
  - Sur chaque arête reliant sommets i et j:  $[K_{ij}]$
$$[K_{ji}] = [K_{ij}]^T$$
- Calcul de la force élastique

$$[K_{ii}]U_i + \sum_{j \in N(P_i)} [K_{ij}]U_j$$

- Requiert un passage sur la liste des arêtes et un passage sur la liste des sommets

---

---

---

---

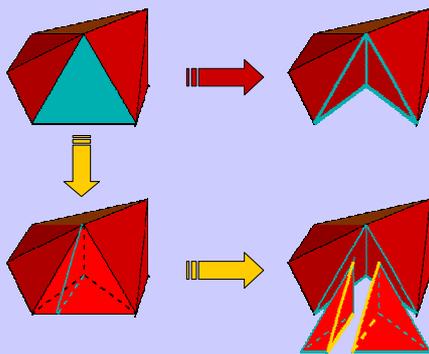
---

---

---

---

### Découpe ou raffinement du maillage




---

---

---

---

---

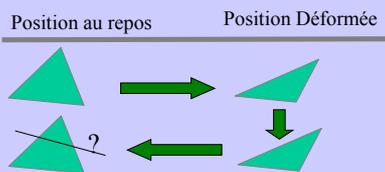
---

---

---

### Découpe

- Détruire des Tétraèdres
  - Mise à jour de 4 tenseurs aux sommets et 10 tenseurs d'arêtes
- Remaillage
  - Uniquement un problème géométrique si la découpe est faite à la position au repos.




---

---

---

---

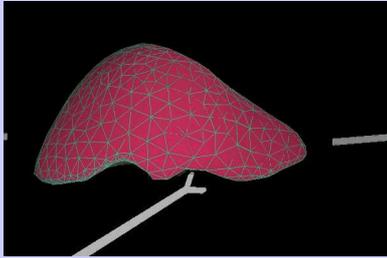
---

---

---

---

## Modèles Masses-Tenseurs (basse résolution)



N = 1394 (6342 Tétraèdres)

---

---

---

---

---

---

---

---

## Simulation de gestes chirurgicaux



Gliding



Gripping



Cutting (pliers)



Cutting (US)

---

---

---

---

---

---

---

---

## Modèle Masse- Tenseur (3)

- Lien avec les modèles masses-ressorts
  - Masses-ressorts  $\mathbf{F}_i = \sum_{j \in N(\mathbf{P}_i)} k_{ij} (\|\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j\| - l_{ij}^0) \frac{\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j}{\|\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j\|}$
  - Force Elastique  $\mathbf{F}_i = [\mathbf{K}_{ii}] \mathbf{P}_i^0 \mathbf{P}_i + \sum_{j \in N(\mathbf{P}_i)} [\mathbf{K}_{ij}] \mathbf{P}_j^0 \mathbf{P}_j$
- Structure de données
  - Placer  $[\mathbf{K}_{ii}]$  aux sommets
  - Placer  $[\mathbf{K}_{ij}]$  aux arêtes

---

---

---

---

---

---

---

---

## Comparaison des Modèles Biomécaniques

	Modèle élastique pré-calculé	Modèle élastique dynamique	Modèle masse-ressort
Efficacité calculatoire	+++	+	+
Réalisme Biomécanique	+	+	-
Simulation de découpe	-	++	+
Grands Déplacements	-	-	+

---

---

---

---

---

---

---

---